流体力学の枠組みについて

峰田竜二
contact@solarphys.com

2022 年 6 月 16 日

流体力学の枠組みについての自分の理解を述べます。工学的応用のための流体力学の教科書は、非圧縮や渦なしなどの一定の条件を課した個別事例から説明が始まることが多いので、理論の全体的な枠組みを掴みづらいという印象を持っています。以下に述べることは、私が専攻していた地球物理学や宇宙物理学のための教科書や研究を通じて得た認識です[†1]。

目次

[†1] 例えば、Cantwell 博士のスタンフォード大学での講義ノート（https://web.stanford.edu/~cantwell/AA210A_Course_Material/AA210A_Course_BOOK/）の書き方が個人的には好きです。大気や海洋物理学のためのものには Vallis (2017, doi: 10.1017/9781107588417) があります。宇宙物理学のためのものとして、最近 Kato & Fukue (2020, doi: 10.1007/978-981-15-4174-2) が出ました。ものすごく体系的に纏まっていますが、流体力学の初学書には向きません。この分野の日本語の教科書は、おすすめできるものを知りません。

1 流体力学の立ち位置

巨視的な自然現象の理解のために欠かせないのが、物質・電磁場・重力・放射場 (光) の 4 種の場の運動と、その間の相互作用の記述です。電磁場はマクスウェル方程式、重力はアインシュタイン方程式、放射場は放射輸送方程式 (ボルツマン方程式) として、場の量によって記述されます[†2]。物質の部分を場の理論として記述するのが流体力学 (または運動論) です。

流体力学の基礎方程式の導入の仕方には、次の 2 通りがあると思います。

- 原理的な方法：物質を構成する粒子が従う法則から始め、その平均的性質を考えることで、流体力学へ至る。
- 現象論的な方法：物質が多数の粒子から成ることを忘れ（連続体近似）、巨視的な物理量の保存則を出発点とする。

前者は、具体的には運動論 (kinetic theory) です。多数の分子の統計を扱うボルツマン方程式に平均操作 (モーメント積分) を施すことで、流体力学の諸法則が得られます。この方法は、(素) 粒子物理学と我々が観測する巨視的な物理法則を結びつける手法として重要ですが、粒子間の相互作用を摂動 (衝突) として扱えるような系 (つまり気体) に適用範囲が限られます。流体力学の強みは、身の回りの液体や気体、ないしはマントル対流やスライムのような半固体的現象、更には第一近似として、宇宙にあるプラズマ、宇宙全体の物質分布、金属中の伝導電子など、様々な現象を共通の枠組みのもとで考えられることだと思います。よって、以下では後者の現象論的立場を取ります。

現象論的立場をとる場合、保存則の普遍的な枠組みの上に、系に応じた構成則や状態方程式で

[†2] 重力や放射場については、中性子星合体のような激しい現象を除けば、定常または準定常と考えることが多いです。準定常とは、自身の運動方程式の時間微分項は無視し、相互作用する他の場の時間発展に即応して、各時刻ごとに定常方程式が満たされるような分布を達成すると考えることです。特に、重力が定常で弱い状況では、アインシュタイン方程式はポアソン方程式に帰着します。放射場とは、ほとんど光速の粒子から構成される相対論的な場を指します。激しい現象では、光に加えて、ニュートリノも放射場として考慮することがあります。

肉付けすることで、系によって若干形の異なる基礎方程式が得られるという流れになると思います。教科書では、各々の対象とする系における基礎方程式を得るために、例えばニュートン力学を拡張するような説明がなされると思いますが、ここでは、そのような説明の末に構築される体系的な構造を述べます[†3]。

2　連続体近似について

流体力学は、連続体近似のもとで、各巨視的物理量を場の量として考えます。連続体近似とは、物質が多数の構成要素から成ることを忘れ、その事実は内部エネルギー e、圧力 p、温度 T、質量密度 ρ などの熱力学的状態量 (構成則や状態方程式) に押しつけ、物質はどこまで拡大しても滑らかであるとみなす近似です。

流体力学は、基本的に熱伝導や粘性などの散逸現象が微小であるレジームを考えるときに使われますから、更に局所熱平衡という要請も課されます。流体力学では、熱的緩和時間よりも十分に時間的スケールが長く、また、巨視的物理量が変化しないとみなせるような微小領域内に十分に多数の分子が詰まっているような現象を対象とします。よって、第一近似として全ての過程が準静的とみなせ、従って平衡状態で定義される状態量を場の量として定義することができる、という要請です。運動論的には、分布関数がマクスウェル分布とそこからの微小なずれとして表せることを指します。平衡状態からの微小なずれは、散逸現象を起こします。

局所熱平衡が成り立たない現象の場合は、もはや散逸現象の大きさは小さくなく、後述するような単純な構成則が成り立たないため、流体的描像が有用ではなくなり、運動論を用いる必要が出てきます。

3　保存則について

流体力学の現象論的な出発点は局所的保存則です。時空間の各点各時刻の近傍で成り立つ保存則を考えます[†4]。ある単位体積あたりの物理量 $f(\boldsymbol{x},t)$ に対する保存則は、一般に次のように書けます。

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{F}=S \tag{1}$$

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)$ はフラックスと呼ばれます。フラックスは、注目する点での $\boldsymbol{F}$ に垂直な面を、単位時間単位体積あたりに横切る物理量 f の量を表します。S がゼロの場合、$\boldsymbol{F}$ に負の発散がある点では f (物理量の密度) が増加します。上式の左辺はこのことを表しています。言い換えると、フラックスとは、注目する点の、それに連続する周囲との物理量のやり取りを表します。$S(\boldsymbol{x},t)$

[†3] ここで述べているのは、https://solarphys.com/mhd/ で公開されているノートをかいつまんだものです。より詳しくはこのノートにまとめてあります。

[†4] 非相対論的な状況に限って考えます。節 8 で相対論との関係を述べます。

は源泉項です。これは、流体粒子[†5]間の物理量のやり取りがなくとも時間変化に寄与する、f の湧き出しや消滅の効果を表します。

フラックスについて、多くの物理量では、その物理量 f が流体の流速 $\boldsymbol{v}$ に従って、流体粒子ごと移動することによるフラックスが発生します。これを移流 (advection) フラックスと言います。移流フラックスは、注目する物理量密度 f に対して $f\boldsymbol{v}$ と表されます。一般には、フラックスは移流フラックスだけではなく、流れがなくとも発生するような別種のフラックスを考えることもできます。

特に、注目する物理量 f が質量密度 ρ と単位質量あたりの量 ϕ を用いて $f = \rho\phi$ と表される場合、移流フラックスを考慮した上式の左辺は、後述する質量保存則を用いて、常に次のように変形できます。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho\phi\boldsymbol{v}) = \rho\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\phi\right] =: \rho\frac{D\phi}{Dt} \tag{2}$$

D/Dt はラグランジュ微分と呼ばれ、時間発展する流体粒子に沿った物理量の変化率を表します。

4　流体力学の基本法則

流体力学で注目する場の量は、質量密度 ρ、流速 $\boldsymbol{v}$、圧力 p、単位質量あたりの内部エネルギー e、温度 T、単位質量あたりのエントロピー s[†6]などです。前述した保存則 (と境界条件) を 1 個用いれば、これらの量のうちの 1 成分の空間分布と時間発展を計算できます。流体力学の基本法則を保存則の連立方程式系と見た場合、次の構造をしています。

- 質量保存則 (1 成分) $\rightarrow$ ρ を計算
- 運動量保存則 (3 成分) $\rightarrow$ $\boldsymbol{v}$ を計算
- エネルギー保存則 (1 成分) $\rightarrow$ 熱力学的状態量のうちの 1 つを計算

例えばエネルギー保存則として e に関する式を採用したとします。各保存則には、構成則が適用されると、その他の状態量 (p, T) も登場することになります。それらの状態量を ρ, e から計算するために、状態方程式 $p = p(\rho, e), T = T(\rho, e)$ が必要になります。

上述した 3 保存則の基本的な形は、注目する流体が気体か液体かなどに依らず普遍的ですが、それらを具体的に計算可能にするため (方程式系を閉じるため) に必要な構成則や状態方程式については、その流体の物性 (微視的性質) を反映して異なるものが採用されます。

[†5] 物質に対して固定され、流れと一緒に移動するような微小領域を流体粒子と言います。

[†6] 地球流体力学で静水圧平衡にある系を考える場合は、エントロピーと同様の役割をする概念として、温位 θ (注目する流体粒子を基準の高度まで断熱的に移動させたときの仮想的な温度) を考えることがあります。

5　流体力学における熱力学の役割

流体力学に登場する場の量としての状態量は、平衡系の熱力学によって与えられる諸法則を満たします。このことは、上述した局所熱平衡の要請の一部なのだと、私は理解しています。示量的な量については、各点において単位質量当たりの量を考えることで、粒子数の変化の自由度はなくなります。単位質量あたりの体積が $1/\rho$ であることに注意すれば、例えば、微小的かつ準静的な変化に対する熱力学第一法則から次の関係が分かります。

$$\left(\frac{\partial s}{\partial e}\right)_\rho = \frac{1}{T}, \qquad \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_e = -\frac{p}{\rho^2 T} \tag{3}$$

よって、e, ρ が場の量として定義され、状態方程式 $p = p(\rho, e), T = T(\rho, e)$ が与えられていれば、s もそれらを通じて場の量として定義可能であり、その時空間における任意の微分について、次のような関係が満たされます。

$$\text{例えばラグランジュ微分について,} \qquad \frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T}\frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2 T}\frac{D\rho}{Dt} \tag{4}$$

6　各保存則について

6.1　質量保存則

質量密度については、移流以外の流体粒子間のやりとりはなく、核反応が起きない場合は消滅もしませんから、保存則は次のように書けます。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{5}$$

6.2　運動量保存則

単位体積あたりの運動量は $\rho \boldsymbol{v}$ と書けます。これについての保存則は次の通りです。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j - \tau_{ij}) = f_i \tag{6}$$

ベクトルを添え字で表し、アインシュタインの縮約記法を用います。上式は 3 つの保存則が連立されています。運動量には、移流の他に、応力 τ_{ij} によるフラックスもあります。応力として周りの流体粒子との間で押し合いへし合いすることで、運動量の受け渡しが行われます。外力 f_i は運動量の湧き出しに相当します。具体的には、重力やローレンツ力[†7]などです。

[†7] 伝導流体を考え、外力として磁場によるローレンツ力 $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}$ を考える場合は、方程式系に新たに磁場 $\boldsymbol{B}$ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ が加わります。磁場の時間発展を計算するために、ファラデーの法則が必要です。$\boldsymbol{B}$ が計算できれば、ア

方程式系を閉じるためには応力テンソル τ_{ij} を基本量で表さねばなりません。これが必要な構成則の 1 つ目です。適用可能範囲が広く、脳死的にとりあえず用いられる構成則はニュートンの構成則です。これが適用された流体はニュートン流体と呼ばれます。この構成則の仮定は次の 3 つだと思います。

- 流速がゼロのときの応力は、面を垂直に押す向きに等方的にはたらく圧力 p だけである。
- 応力テンソルは流速の勾配の 1 次関数である。例えば勾配が十分に小さい場合は、勾配についての 2 次以上の効果を無視することで、この条件が満たされる。
- 応力テンソルは流速の勾配の等方的な関数である。

これにより、次の構成則が得られます。

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) \right) + \zeta\delta_{ij}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) \tag{7}$$

μ は粘性率、ζ は体積粘性率です。大抵の現象では、ζ の係る項は小さいので、考えないことが多いです。μ, ζ のように、構成則に現れる係数は輸送係数と呼ばれますが、一般にはこれらも、状態量を通じて場の量であると考えなければなりません。輸送係数の状態量に対する依存性は別の理論 (例えば運動論や物性物理学)、あるいは実験によって決定されるべきパラメータであり、流体力学自身によっては説明できません。ここが流体力学を実践で扱ううえで、しばしばネックになる箇所であり、モデルを簡単にするために、空間的に一様な定数として与える (あるいは与えない) ことも多いです。局所熱平衡の仮定の下では、輸送係数の係る項が司る散逸現象の効果は 2 次的なものだからです。

運動量保存則にニュートンの構成則を代入することで、ナヴィエ-ストークス方程式が得られます。以下では、より一般的に、応力テンソル τ_{ij} を圧力 p と粘性応力 τ^{ν}_{ij} に分けて記述します。

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau^{\nu}_{ij} \tag{8}$$

6.3 エネルギー保存則

前述しましたが、基本的に、エネルギー保存則は内部エネルギー e を計算するために必要な保存則です。内部エネルギーとは、系の微視的な自由度に関するエネルギーを全てブラックボックスにして押し付けたような概念です。

まず、運動エネルギーの保存則を考えます。運動量保存則の両辺に左から $\boldsymbol{v}\cdot$ を作用させて、

ンペールの法則 (変位電流は小さいので無視) から $\boldsymbol{j}$ が求まります。ファラデーの法則に現れる電場 $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{j}$ の間の関係はオームの法則という構成則によって与えられます。流体力学にこれらの式を加えた方程式系は磁気流体力学 (MHD) と呼ばれます。

適宜質量保存則を用いながら変形すると、次式を得ます。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2 v_j}_{\text{移流}}\ \underbrace{+pv_j-\tau^{\nu}_{ij}v_i}_{\text{応力によるやり取り}}\right)=\underbrace{+p(\nabla\cdot\boldsymbol{v})}_{\text{圧縮による熱力学的仕事}}\ \underbrace{-\Phi}_{\text{粘性散逸}}\ \underbrace{+v_if_i}_{\text{外力による仕事}} \tag{9}$$

右辺第 1, 2 項は内部エネルギーとのやり取りを表すため、運動エネルギーにとっては源泉になります。特に、

$$\Phi:=\tau^{\nu}_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\underbrace{=}_{\text{ニュートン流体の場合}}2\mu\left[e_{ij}e_{ij}-\frac{1}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})^2\right] \tag{10}$$

$$\text{where,}\qquad e_{ij}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{11}$$

は散逸関数と呼ばれ、非負の値を取ります。つまり、運動エネルギーから内部エネルギーへの一方的な変換を表します。

内部エネルギー保存則は次のように書けます。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\underbrace{\rho e v_j}_{\text{移流}}\ \underbrace{+q_j}_{\text{熱流束}}\right)=\underbrace{-p(\nabla\cdot\boldsymbol{v})}_{\text{圧縮による熱力学的仕事}}\ \underbrace{+\Phi}_{\text{粘性散逸}}\ \underbrace{+\mathcal{L}}_{\text{その他の熱源}} \tag{12}$$

内部エネルギーは移流の他にも、隣の流体粒子との間で、分子衝突やフォノン、伝導電子散乱のような現象を介したエネルギーのやり取りをします。その効果が熱流束 q_j に込められています。上述した、運動エネルギーとの変換の効果が右辺に組み込まれます。

これらの 2 保存則を足し合わせることで、全エネルギーの保存則が得られます。右辺の内部変換項は相殺します。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho e\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 v_j+\rho h v_j-\tau^{\nu}_{ij}v_i+q_j\right)=v_if_i+\mathcal{L} \tag{13}$$

ただし、$h:=e+p/\rho$ は単位質量あたりのエンタルピーを意味します。熱的な移流フラックスについては、エンタルピーフラックスを考える必要があるわけです。移流以外に、粘性と熱伝導のような散逸によるフラックスも発生します[†8]。

[†8] 磁気流体力学では、ローレンツ力を介して運動・磁場エネルギー間での変換があり、またジュール散逸として、磁場エネルギーから内部エネルギーへの一方的な変換が発生します。全エネルギーは運動・内部エネルギーに加え、磁場エネルギー $B^2/(2\mu_0)$ に関する保存則も加えると、綺麗に閉じます。また、外力として、定常的に与えられた重力 $\boldsymbol{f}=-\rho\nabla\phi$ を考える場合、次の恒等式を重力エネルギーの保存則とみなして、全エネルギー保存則に加えれば、重力を内部自由度として扱えます。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)+\nabla\cdot(\rho\phi\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\cdot(\rho\nabla\phi)$$

熱流束を閉じるために、構成則として次のフーリエの法則が用いられることが多いです。

$$\boldsymbol{q} = -\kappa \nabla T \tag{14}$$

κ は熱伝導率であり、輸送係数の一種です。ニュートンの構成則のときと同じように述べると、

- $\boldsymbol{q}$ が T の勾配の等方的 1 次関数である。

という仮定の下での構成則であり、適用可能範囲は広いです。

熱輸送の式

熱対流の問題を考える場合などには、内部エネルギー e の代わりにエントロピー s を考えると問題の見通しが良くなることがあります。s に関する保存則を熱輸送の式と言います。内部エネルギー保存則 (12) を、質量保存則を用いて変形すると、次のようにも書けます。

$$\rho \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} + \Phi + \mathcal{L} \tag{15}$$

熱力学第一法則 (4) より、この式は次のように書き換えられます。

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} + \Phi + \mathcal{L} \tag{16}$$

これが熱輸送の式です。

フーリエの法則を適用して、上式を保存則の形に書き換えると、次式を得ます。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho s v_j - \frac{\kappa}{T}\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{T}\left(\Upsilon + \Phi + \mathcal{L}\right) \tag{17}$$

ただし、

$$\Upsilon := \frac{\kappa}{T}(\nabla T \cdot \nabla T) \tag{18}$$

は非負の値を取ります。ある領域 V を考え、境界でフラックスが無い (断熱的) とし、熱源 $\mathcal{L}$ もゼロとします。この領域にわたって上式を積分すると、次式を得ます。

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho s dV = \int_V \left[\frac{1}{T}\left(\Upsilon + \Phi\right)\right] dV \tag{19}$$

上式右辺は非負の値を取るため、熱伝導や粘性散逸のような不可逆過程が起きている限り、領域内部の総エントロピーは増加することが分かります。熱力学第二法則を確認しました。逆に言うと、熱力学第二法則を満たすためには、Φ, Υ が非負関数になるような構成則を適用する必要があります。

7　状態方程式について

前述した 3 保存則には、状態量として、余分に T, p の 2 量が登場したので、方程式系を閉じるためには、ρ, e, p, T (あるいは e の代わりに s) 間の関係式を 2 個与えなければなりません。これも構成則と同じく、系の物性を反映して、個々に異なるものが適用されます。よく出会うものを 2 つ列挙します。

7.1　理想気体

衝突以外の粒子間相互作用が無いと仮定した流体が理想気体です。そこまで高精度での議論を必要としないならば、適用可能範囲はとても広いです。反応によって粒子種が変化することが無いとすると、比熱比を γ として、次の状態方程式が成り立ちます。

$$p = nk_BT, \qquad e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \tag{20}$$

k_B はボルツマン定数です。n は数密度で、気体の平均分子質量を m とすれば、$n = \rho/m$ と書けます。上式は次のようにも書けます。

$$p = (\gamma - 1)\rho e, \qquad T = \frac{(\gamma - 1)m}{k_B}e \tag{21}$$

この第 1 式を用いて e を消去し、p を用いて内部エネルギーを書き下すこともありますし、第 2 式によって、内部エネルギーの保存則を T についての方程式に落とし込むこともあります。

7.2　状態方程式の線形化

特に、液体の熱対流問題などを扱う場合、各状態量 ρ, s, p, T を、例えば静水圧平衡かつ一様エントロピーのような平衡状態での既知の量 ρ_0, s_0, p_0, T_0 とそこからのずれ ρ_1, s_1, p_1, T_1 に分けて記述します。ただし、エントロピーの定数項には興味がないので、$s_0 = 0$ と置きます。

$$\rho(\boldsymbol{x}, t) = \rho_0(\boldsymbol{x}) + \rho_1(\boldsymbol{x}, t) \tag{22}$$
$$s(\boldsymbol{x}, t) = s_1(\boldsymbol{x}, t) \tag{23}$$
$$p(\boldsymbol{x}, t) = p_0(\boldsymbol{x}) + p_1(\boldsymbol{x}, t) \tag{24}$$
$$T(\boldsymbol{x}, t) = T_0(\boldsymbol{x}) + T_1(\boldsymbol{x}, t) \tag{25}$$

例えば、ρ, s を p, T を用いて表し、消去すると決めたならば、状態方程式 $\rho = \rho(p, T), s = s(p, T)$ を p_1, T_1 について展開します。そして、p_1, T_1 は小さいと仮定して 2 次以上の微小量を無視し、線形化します。方程式を解いた計算結果が実際にこの仮定を満たせば、自己無撞着な解が得ら

れたことになります[†9]。

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \chi_T p_1 - \alpha T_1, \qquad T_0 s_1 = c_p T_1 - \frac{\alpha T_0}{\rho_0} p_1 \tag{26}$$

χ_T, α, c_p はそれぞれ等温圧縮率、熱膨張率、定圧比熱です。展開係数 (つまり状態量の偏微分) は熱力学的考察により得られます。これらの量は、輸送係数と同じく、別の理論 (統計力学や物性物理学) か、あるいは実験によって決定されるべきです。

7.3　ポリトロープ

例えば理想気体を考えている場合に、エネルギー保存則を具体的に解く代わりに、エネルギー輸送に関する人為的な条件を課すことがあります[†10]。例えば、

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\alpha} \tag{27}$$

という条件はポリトロープ条件と呼ばれます。p_0, ρ_0 は基準点での各量を表す定数です。α は系のエネルギー輸送条件に応じて決められます。例えば、系が等温と考えられる場合には $\alpha = 1$、断熱的な変化をすると考えられる場合には α を断熱指数に設定します。特に、理想気体の場合は、断熱指数は比熱比に等しいです。p が ρ によって表されれば、質量保存則と運動量保存則のみで方程式系が閉じますから、エネルギー保存則は不要になります。

8　相対論との関係

アインシュタイン方程式が計量と物質場の間の局所的方程式であるように、相対論は物質のエネルギーや運動量を場の量によって記述する理論であり、流体力学との統合は比較的簡単になされます。散逸の無い (輸送係数が全てゼロである) 完全流体のエネルギー運動量テンソルは、次のように書けます[†11]。

$$T^{\mu\nu} = (\rho c^2 + \rho e + p)\frac{u^\mu u^\nu}{c^2} + p g^{\mu\nu} \tag{28}$$

c は光速、$g_{\mu\nu}$ は一般の計量です。u^μ は 4 元流速、すなわち、固有時 τ をパラメータとした 4 元流線の媒介変数表示を $x^\mu(\tau)$ としたとき、$u^\mu = dx^\mu/d\tau$ を表します[†12]。ρ, e, p は今まで通り、流体の共動系での質量密度、単位質量当たりの内部エネルギー、圧力です。

[†9] 音速より十分に遅い流速の対流では満たされる仮定です。

[†10] この条件は状態方程式とみなすべきではありません。

[†11] ギリシャ文字の添え字は $\mu = 0, 1, 2, 3$ の値を走り、ラテン文字の添え字は $i = 1, 2, 3$ の空間成分を走るという約束の下で、アインシュタインの縮約記法を用います。ミンコフスキー計量は $(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ の符号の取り方です。

[†12] この関係と固有時の定義より、$u^\mu u_\mu = -c^2$ が恒等的に満たされることが分かります。

エネルギー運動量保存則は次のように書かれます。

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \tag{29}$$

∇_μ は共変微分です。アインシュタインテンソルに関する恒等式 $\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0$ より、アインシュタイン方程式を満たす $T^{\mu\nu}$ は、この式を満たす必要があります[†13]。この式は (4 元ベクトル) $= 0$ という形式ですが、その u^μ に垂直な成分が運動量保存則を表し、平行な成分がエネルギー保存則を表します。以下でこれらの成分を実際に計算し、非相対論的極限で前述した保存則に一致することを示します。

先に、非相対論的極限を定義しておきます。非相対論的とは、

- 静止エネルギーに比べると、どのエネルギーも無視できる (従って $|v| \ll c$)。

$$\frac{1}{2}\rho v^2, \quad \rho e, \quad p \ll \rho c^2 \tag{30}$$

- 重力ポテンシャルが $|\phi|/c^2 \ll 1$ であるので、ϕ/c^2 は空間微分の計算時を除いて 1 に対して無視する。また、ϕ の時間微分は他の全ての項に対して無視できる (定常または準定常)。

の 2 条件が満たされるレジームです。一般に、重力場が非相対論的である時空間を表す計量は、適切な座標変換を施すことで、次の形に書けることが知られています。

$$g_{00} = -1 - \frac{2\phi}{c^2}, \qquad g_{ii} = 1 - \frac{2\phi}{c^2}, \qquad \text{他の成分はゼロ} \tag{31}$$

従って、計量の逆テンソルとクリストッフェル記号は次のように書けます。

$$g^{00} = -1 + \frac{2\phi}{c^2}, \qquad g^{ii} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}, \qquad \text{他の成分はゼロ} \tag{32}$$

$$\Gamma^0{}_{00} = \Gamma^0{}_{ii} = \Gamma^i{}_{0i} = 0 \tag{33}$$

$$\Gamma^0{}_{0i} = \Gamma^i{}_{00} = -\Gamma^i{}_{ii} = \partial_i\left(\frac{\phi}{c^2}\right) \tag{34}$$

各座標は $(x^\mu) = (ct, x_1, x_2, x_3)$ と書くことにします。従って、

$$(\partial_\mu) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \tag{35}$$

です。ローレンツ因子は 1 とみなせるため、4 元流速 u^μ は、3 次元的な流速 $v_i = dx^i/dt$ を用いて、次のように表せます。

$$(u^\mu) \simeq (c, v_1, v_2, v_3), \qquad (u_\mu) \simeq (-c, v_1, v_2, v_3) \tag{36}$$

[†13] マクスウェル方程式における電荷保存則のような、外場に対する束縛条件です。

8.1 質量保存則

エネルギー運動量保存則の前に、質量保存則について述べます。質量保存則は、粒子数の保存則に相当します。相対論的現象では、一般には粒子の質量は反応によって別の粒子のエネルギーに変化する可能性がありますが、ここではそのような反応が起きず、従って静止質量密度が保存される状況を考えます。質量保存則は次のように書けます。

$$\nabla_\mu(\rho u^\mu) = 0 \tag{37}$$

非相対論的極限では、次のように近似できます。

$$\nabla_\mu(\rho u^\mu) = \partial_\mu(\rho u^\mu) + \Gamma^\mu{}_{\mu\alpha}\rho u^\alpha \tag{38}$$
$$\simeq \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0 \tag{39}$$

これは、前述した質量保存則そのものです。

8.2 運動量保存則

式 (29) の u^μ に垂直な成分を計算するために、次の射影テンソルを考えます。

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{u_\mu u_\nu}{c^2} \tag{40}$$

これは対称テンソルであり、次の性質を持ちます。

$$h_{\mu\nu}u^\mu = 0, \qquad h_\mu{}^\alpha h_{\alpha\nu} = h_{\mu\nu}, \qquad h^\mu{}_\mu = 3 \tag{41}$$

このテンソルとベクトルに作用させると、そのベクトルの u^μ に垂直な成分が出てきます。実際に式 (29) に作用させ、適宜上の性質を用いながら整理すると、次式を得ます[†14]。

$$\frac{u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu}{c^2} = -\frac{h^{\mu\alpha}\partial_\alpha p}{\rho c^2 + \rho e + p} \tag{42}$$

この式は、傾圧力が働く流体の測地線方程式です[†15]。

[†14] ∂_μ は偏微分を表します。

[†15] 4 元速度が $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ と表されることを用いると、

$$u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}$$

と書き換えられることが分かります。これは、よく見る形式の測地線方程式の左辺です。

非相対論的極限では

$$\rho c^2 + \rho e + p \simeq \rho c^2 \tag{43}$$

$$u^\alpha \nabla_\alpha u^i = u^\alpha \partial_\alpha u^i + u^\alpha \Gamma^i{}_{\alpha\beta} u^\beta \tag{44}$$

$$\simeq \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \tag{45}$$

$$= \frac{D v_i}{Dt} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \tag{46}$$

$$h^{i\alpha} \partial_\alpha p \simeq \left(\eta^{i\alpha} + \frac{u^i u^\alpha}{c^2} \right) \partial_\alpha p \tag{47}$$

$$\simeq \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{v_i}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{v_i v_j}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x_j} \tag{48}$$

$$\simeq \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{49}$$

と近似できるので、式 (42) の第 i 成分は

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi \tag{50}$$

と書け、オイラー方程式 (完全流体に対する運動量保存則) に一致します。

8.3 エネルギー保存則

式 (29) の u^μ に平行な成分は、単に両辺に u_μ を作用させる (縮約を取る) ことで計算できます。実際に計算すると、次式を得ます。

$$u^\mu \partial_\mu (\rho c^2 + \rho e) + (\rho c^2 + \rho e + p) \nabla_\mu u^\mu = 0 \tag{51}$$

非相対論的極限では、先ほどと同様にして、第 1 項がラグランジュ微分、第 2 項の 4 元発散は $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ に近似できるので、次式のようになります。

$$\frac{D}{Dt}(\rho c^2 + \rho e) + (\rho c^2 + \rho e + p) \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{52}$$

上式から質量保存則を引くことで、静止エネルギーを排除すれば、次の内部エネルギー保存則が得られます。

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \boldsymbol{v} \tag{53}$$

質量保存則より、

$$\nabla_\mu u^\mu = -\frac{1}{\rho} u^\mu \partial_\mu \rho \tag{54}$$

が成り立つことを用いると、式 (51) は次式のように書き換えられます。

$$u^\mu \partial_\mu (\rho c^2 + \rho e) - \left(c^2 + e + \frac{p}{\rho} \right) u^\mu \partial_\mu \rho = 0 \tag{55}$$

また、熱力学第一法則を用いることで、

$$
\begin{aligned}
d(\rho c^2 + \rho e) &= (c^2 + e)d\rho + \rho de \qquad (56)\\
&= \left(c^2 + e + \frac{p}{\rho}\right) d\rho + \rho T ds \qquad (57)
\end{aligned}
$$

と計算できるので、これを式 (55) に適用することで、

$$
u^\mu \partial_\mu s = 0 \qquad (58)
$$

を得ます。これは、単位体積あたりのエントロピー s が 4 元流線に沿って保存されることを表します。つまり、完全流体に対する熱輸送の式です。非相対論的極限では $Ds/Dt = 0$ になります。