

太陽物理学のための
基礎理論ノート

峰田 竜二

contact@solarphys.com

2023年8月28日

ver. 0.06

まえがき

本書は、太陽物理学に興味のある筆者が、これまでに勉強した基礎理論を忘備録としてまとめたノートである。一部、大学在籍時の授業ノートも基にしている。

本書の主題である磁気流体力学 (電磁流体力学; Magnetohydrodynamics, MHD) は、電気伝導性のある流体のダイナミクスを記述する理論である。例えば、融解した金属、地球の外核などの液体や、核融合炉、太陽などのプラズマ (電離した気体) を考えるときに使われる。宇宙に存在する普通の物質の殆どはプラズマの状態で存在しているため、MHD は様々な天体の物理を考える際の基本的な道具のひとつである。本書では、太陽物理学の文献を読む際に必要になるかもしれない、あるいはならないかもしれない理論を、MHD を軸にした文脈で雑多に説明する。高校数学 (微分積分、行列の計算、複素数の計算) と高校物理・化学 (力学、電磁場の基本法則、理想気体の熱力学、波、原子や分子の基本構造) に加え、大学初年度の数学 (広義積分、テイラー展開、線形空間の考え方) と物理 (力学と簡単な常微分方程式の解き方、電磁気学) 等の知識があれば、とりあえずのところ読み進められると思われる。

本書全体の流れは次の通りである。

- 第 1 章 高校数学習得者程度の知識量を想定して、本書で使用する数学的事項と流体力学の基本的な考え方を簡単に説明する。
- 第 2 章 電磁気学に関する事柄を説明しつつ、それを流体に適用できる形に応用する。
- 第 3 章 流体力学の諸法則について説明する。
- 第 4 章 基礎方程式から導かれる MHD 流体の性質や考え方について、よく目にするものをピックアップする。
- 第 5 章 高温のプラズマを考える際に MHD 方程式系に加えて必要な概念である、放射輸送の考え方について説明する。
- 第 6 章 プラズマを特徴づける諸パラメータについて説明した後、MHD の適用限界として、希薄なプラズマを考える場合に使われるプラズマ運動論と呼ばれる考え方について概観し、運動論からの知見を踏まえた MHD の考察や補正について説明する。
- 第 7 章 相対論について基本から説明した後、3+1 形式による相対論的 MHD の定式化を説明し、非相対論的 MHD と比較する。

第 4 章以降の各章は互いの関連性が密ではないため、どの章から読んでも全体として読み進められる。

磁気流体力学やプラズマ物理は様々な基礎物理学の分野から得られる知見を結集して構成される。よって、それらを理解するには自ずと各分野の知識が必要になる。各章の最後に付録として大学物理の基礎知識をまとめた。具体的には次の通りである。

第 2 章の付録 電磁波についての基礎知識

第3章の付録 熱力学、統計力学の基礎知識

第5章の付録 解析力学、量子力学の基礎知識

付録でまとめた知識を使う際には付録を参照している。また、所々にトピックと称した節を設け、本書で説明した知識の現実の系への応用例を紹介するつもりである。

本書は太陽物理学への応用を念頭に置いている。よって、理想気体として考えられる水素プラズマの話が多い。この分野は、入門的知識を持ち合わせていれば英語の教科書や論文などで知識を増やしていけるが、そこまで到達するのが、特に大学でこの分野の教育を受けていない方にとっては敷居が高いだろうと感じる。研究経験の乏しい筆者が書き連ねた文章を公開することが学術的にどれほど有用か、あるいは迷惑行為なのかは分からない。しかし、学べる大学も少ないと思われるこの分野に関する疑問を抱いた方にとって、検索のための糸口となる情報が少しでも（日本語で）示せればと思い公開した。この分野の研究をしたい方が本書だけで済ますのはリスクが伴うが、参考文献もなるべく示すように努めたので、学習の指針になれば幸いである。

注意書き

本書からの引用であることを明記していただければ、本書の教育、研究などの非営利目的での引用に関しては断りなくしていただいて構わない。その際、本書は校正を受けた文書ではないことに注意されたい。著作権を放棄したわけではない。本書の文章を複数のページや節に渡ってコピーしたものを何らかのコンテンツに使用することを禁じる。本書を不特定多数の人が見ることのできる状態に置くこともできない。営利目的の利用に関しては要相談である。また、本書が他所から引用している図表などの利用については引用元のルールに従って欲しい。

著者の経歴

この文書は、この程度の知識と経験の持ち主によって書かれた。本書の内容を鵜呑みにせず、他の文献も参照されたい。

- 2017年：東京大学理学部地球惑星物理学科を卒業
東京大学大学院理学系研究科地球惑星科学専攻に進学
- 2019年：同大学院を中退

更新履歴

このPDFのバージョンは『ver. 0.06』である。ウェブサイト『太陽の科学館』内のページで公開されている^{†1}。まだ執筆途中の節が多い。逐次、内容の修正や追加を行い、新たなバージョンを同ページで公開するつもりである。

ver. 0.01 2021年9月16日に公開。

ver. 0.02 2022年6月10日に公開。誤字・マイナーな間違いを修正。

ver. 0.03 2022年6月19日に公開。誤字・マイナーな間違いを修正。

ver. 0.04 2023年3月3日に公開。誤字・マイナーな間違いを修正。

ver. 0.05 2023年3月22日に公開。おすすめの教科書を追加。

ver. 0.06 2023年8月28日に公開。理想気体の状態方程式の項の説明を変更。相対論の説明を加筆。その他マイナーな修正・加筆。

^{†1} <https://solarphys.com/mhd/>

本書に関連した教科書の例

- 日本評論社のシリーズ『宇宙物理学の基礎』。1 巻：宇宙流体力学、2 巻：MHD、3 巻：放射輸送、4 巻：放射吸収の素過程、6 巻：相対論的流体力学 (MHD)。特に、2 巻は日本語で書かれた宇宙物理学的 MHD の教科書の決定版であり、太陽物理学への応用例も載っている。
- Davidson, P. (2016). *Introduction to Magnetohydrodynamics* (Cambridge Texts in Applied Mathematics). Cambridge: Cambridge University Press. (液体金属を主に想定した MHD 入門書。初学者向けで分かりやすく、対流や乱流などの動力学について詳しい。)
- Galtier, S. (2016). *Introduction to Modern Magnetohydrodynamics*. Cambridge: Cambridge University Press. (プラズマを想定した MHD の入門書。MHD 流体の性質について読みやすく書かれている。不安定性や乱流について詳しい。)
- Kulsrud, R. M. (2004). *Plasma Physics for Astrophysics*. Princeton: Princeton University Press. (プラズマを想定した MHD の入門書。基本事項から応用、運動論まで詳しい。)
- Gurnett, D., & Bhattacharjee, A. (2005). *Introduction to Plasma Physics: With Space and Laboratory Applications*. Cambridge: Cambridge University Press. (プラズマ物理の入門書。プラズマ中の粒子の動きの説明から始まり、運動論、MHD と、話を巨視化するような順番で書かれている。プラズマ中の波についての説明に詳しい。)
- Rybicki, G. B., & Lightman, A. P. (1985). *Radiative Processes in Astrophysics*. Berlin: Wiley-VCH. (放射輸送についての入門書。初学者向けで分かりやすい。)
- Kato, S., & Fukue, J. (2020). *Fundamentals of Astrophysical Fluid Dynamics: Hydrodynamics, Magnetohydrodynamics, and Radiation Hydrodynamics*. Singapore: Springer Singapore. (宇宙物理学のための流体力学の教科書。MHD や相対論的流体、放射輸送を考慮した流体について網羅されている。)
- Goedbloed, H., Keppens, R., & Poedts, S. (2019). *Magnetohydrodynamics of Laboratory and Astrophysical Plasmas*. Cambridge: Cambridge University Press. (MHD の教科書。宇宙物理や核融合炉の多種多様な系への応用を念頭に、数値計算方法も含めて幅広い解析手法の説明に充実している。)
- Priest, E. (2014). *Magnetohydrodynamics of the Sun*. Cambridge: Cambridge University Press. (太陽物理の教科書。MHD の基本についての簡潔な説明から太陽の諸現象への応用まで、網羅的に書かれている。)
- Rezzolla, L., & Zanotti, O. (2013). *Relativistic Hydrodynamics*. Oxford: Oxford University Press. (相対論的流体力学の教科書。相対論的流体力学や運動論の基礎から

数値計算法、宇宙物理への応用例まで充実している。)

目次

まえがき	1
目次	6
第 1 章 数学的準備と流体力学の考え方	15
1.1 本書で使う記法	15
1.2 場の量	17
1.2.1 連続体近似	17
1.2.2 スカラー場とベクトル場	17
1.2.3 偏微分	18
1.3 オイラー表現とラグランジュ微分	19
1.3.1 ラグランジュ表現とオイラー表現	19
1.3.2 ラグランジュ微分	21
1.4 ベクトル解析	22
1.4.1 勾配	22
1.4.2 線積分と面積分	23
1.4.3 発散	25
1.4.4 回転	27
1.4.5 ラプラシアン	29
1.4.6 様々な公式とその計算方法	29
1.4.7 ヘルムホルツの定理	31
1.5 偏微分方程式	32
1.5.1 拡散方程式とランダムウォーク	32
1.5.2 ポアソン方程式とグリーン関数	35
1.5.3 保存則とフラックス	37
1.5.4 数値的解法	38
付録 1.A 正方行列の基礎知識	41
1.A.1 逆行列	41
1.A.2 行列の正則性	42
1.A.3 行列式と余因子行列	43
1.A.4 固有値と固有ベクトル	45

1.A.5	対角化とジョルダン標準形	48
1.A.6	行列指数関数	50
1.A.7	エルミート行列とユニタリ行列	53
付録 1.B	ベクトル場とテンソル場	54
1.B.1	ベクトル場の変換性	55
1.B.2	局所直交座標	58
1.B.3	ベクトル場の微分	59
1.B.4	テンソル場の変換性	60
1.B.5	テンソル場の微分	62
1.B.6	極座標・円筒座標での空間微分 (公式集)	63
付録 1.C	関数の扱い方	65
1.C.1	簡単な微分方程式の解き方	65
1.C.2	線形空間の元としての関数	70
1.C.3	スツルム-リウヴィル問題	73
1.C.4	直交関数系の一覧	74
1.C.5	[トピック] 潮汐	95
1.C.6	フーリエ変換	99
1.C.7	デルタ関数	100
付録 1.D	波の考え方	102
1.D.1	波動方程式	102
1.D.2	波の分散	105
1.D.3	群速度	107
1.D.4	固有モード	110
1.D.5	波の減衰と不安定性	115
第 2 章	電磁気学の基礎方程式	117
2.1	マクスウェル方程式	117
2.1.1	近接作用の考え方	117
2.1.2	真空でのマクスウェル方程式	118
2.1.3	静止物体中のマクスウェル方程式	119
2.2	ローレンツ力	120
2.3	電磁場のローレンツ変換	121
2.4	オームの法則	123
2.5	MHD 流体への適用	124
2.5.1	スケーリング	124

2.5.2	誘導方程式	126
付録 2.A	電磁波	127
2.A.1	電磁ポテンシャル	127
2.A.2	自由電磁波	130
2.A.3	偏光	131
2.A.4	ポインティングベクトル	133
2.A.5	リエナール-ヴィーヘルトポテンシャル	134
2.A.6	制動放射	137
2.A.7	散乱	138
2.A.8	クーロン相互作用と放射場の分離	141
第 3 章	流体の基礎方程式	144
3.1	質量保存則 (連続の式)	145
3.1.1	移流項	145
3.2	運動量保存則 (運動方程式)	146
3.2.1	一般形	146
3.2.2	電磁場の運動量とマクスウェルの応力	147
3.2.3	ニュートン流体	148
3.2.4	重力	151
3.2.5	コリオリの力	152
3.2.6	渦度方程式	154
3.3	エネルギー保存則	155
3.3.1	運動エネルギー保存則	156
3.3.2	電磁場のエネルギー保存則	156
3.3.3	内部エネルギー保存則	157
3.3.4	全エネルギー保存則	158
3.3.5	エントロピーについての方程式 (熱輸送の式)	160
3.3.6	重力エネルギー	160
3.3.7	ベルヌーイの定理	162
3.4	状態方程式	163
3.4.1	理想気体	163
3.4.2	サハの式：部分電離プラズマ	165
3.4.3	H と He からなるプラズマ	167
3.4.4	[トピック] 太陽中心の圧力電離	170
3.4.5	放射	171

3.4.6	ポリトロープ	172
3.4.7	一般的な状態方程式の線形化	172
3.4.8	2成分からなる混合液体	173
付録 3.A	熱力学の基礎知識	177
3.A.1	準静的過程	177
3.A.2	熱力学第1法則・第2法則	177
3.A.3	ルジャンドル変換	178
3.A.4	マクスウェルの関係式	179
3.A.5	諸微分量の定義と求め方	180
3.A.6	化学ポテンシャル	183
付録 3.B	統計力学の基礎知識	184
3.B.1	統計力学の原理	184
3.B.2	カノニカル分布と分配関数	185
3.B.3	単原子分子理想気体	187
3.B.4	二原子分子理想気体	189
3.B.5	サハの式	193
3.B.6	大分配関数	195
3.B.7	ボース-アインシュタイン分布	197
3.B.8	黒体放射と光子	198
第4章	MHD 流体の性質	202
4.1	無次元数	202
4.2	磁場	205
4.2.1	磁気拡散	205
4.2.2	磁力線凍結定理	206
4.2.3	磁気圧と磁気張力	208
4.2.4	磁束管	208
4.2.5	ポテンシャル磁場	211
4.2.6	[トピック] 地球の双極子磁場	213
4.2.7	磁気ヘリシティ	216
4.3	平衡	221
4.3.1	静水圧平衡	222
4.3.2	フォースフリー磁場	224
4.3.3	テイラー-プラウドマンの定理と温度風平衡	228
4.4	波	229

4.5	不安定性	229
4.6	熱対流	229
4.6.1	断熱温度勾配	230
4.6.2	混合距離理論	231
4.6.3	[トピック] 太陽対流層の熱対流	236
4.6.4	ブシネスク近似	242
4.6.5	非弾性近似	244
4.6.6	一般化されたブシネスク近似	247
4.6.7	[トピック] 地球外核の対流	248
4.7	乱流	259
4.7.1	統計的性質の記述方法	260
4.7.2	フーリエ解析	263
4.7.3	非圧縮一様乱流	266
4.7.4	コルモゴロフの現象論	269
4.7.5	[トピック] 太陽対流層の差動回転	272
4.8	MHD 乱流	274
4.9	ダイナモ理論	274
4.10	不連続面	274
4.11	磁気リコネクション	274
第 5 章	放射輸送	275
5.1	放射輸送の記述方法	276
5.1.1	巨視的な放射場	276
5.1.2	放射輸送方程式	279
5.1.3	モーメント方程式とエディントン因子	281
5.1.4	スケーリング	282
5.1.5	共動系での記述：ドップラー効果	284
5.1.6	流体への作用	287
5.2	定常放射輸送方程式の性質	288
5.2.1	光学的厚さ	288
5.2.2	キルヒホッフの法則	290
5.2.3	[トピック] 太陽表面の意味と周縁減光	290
5.2.4	散乱の効果	296
5.3	原子過程	301
5.3.1	束縛-束縛遷移 1：アインシュタイン係数	301

5.3.2	束縛-束縛遷移 2: 放射率と吸収係数	305
5.3.3	[トピック] スペクトル線で太陽大気を見る	307
5.3.4	線輪郭	314
5.3.5	散乱	317
5.3.6	光電離と再結合	324
5.3.7	制動放射	328
5.3.8	不透明度の計算	330
5.4	流体への応用	331
5.4.1	拡散近似	332
5.4.2	放射損失関数	333
5.4.3	[トピック] コロナ輝線で見えるもの	336
5.5	偏光	336
5.5.1	偏光状態の記述方法	337
5.5.2	ゼーマン効果	343
5.5.3	原子の偏極	346
5.5.4	偏光を考慮した放射輸送	347
5.5.5	[トピック] 太陽の磁場を知る	353
付録 5.A	解析力学の基礎知識	359
5.A.1	最小作用の原理	359
5.A.2	ハミルトニアンと正準方程式	361
5.A.3	荷電粒子のハミルトニアン	361
5.A.4	電磁場の正準形式	363
5.A.5	荷電粒子と放射場の共存系	368
5.A.6	断熱不変量	371
付録 5.B	量子力学の基礎知識	374
5.B.1	量子力学の基本法則	374
5.B.2	シュレディンガー方程式	377
5.B.3	座標表示による正準量子化	379
5.B.4	調和振動子: 生成消滅演算子	383
5.B.5	角運動量	385
5.B.6	水素原子	389
5.B.7	角運動量固有状態の性質	395
5.B.8	ゼーマン分裂	400
5.B.9	粒子の識別不能性	405
5.B.10	量子力学的放射場: 光子	407

5.B.11	フェルミの黄金律	410
5.B.12	自由粒子と確率密度保存則	413
5.B.13	散乱理論	417
第 6 章	MHD の限界と運動論	428
6.1	プラズマ中の微視的現象	429
6.1.1	分布関数と熱運動	429
6.1.2	デバイ遮蔽	431
6.1.3	プラズマ振動	434
6.1.4	衝突	435
6.1.5	磁場中の粒子の基本運動	441
6.1.6	ランダムウォークと磁化	446
6.1.7	量子力学的効果	447
6.1.8	プラズマ中のパラメータのまとめ	447
6.2	運動論から MHD 方程式へ	449
6.2.1	運動論的方程式	450
6.2.2	フォッカー-プランクの衝突項	452
6.2.3	H 定理とマクスウェル-ボルツマン分布	458
6.2.4	モーメント積分と保存則	462
6.2.5	1 流体方程式	467
6.3	衝突過程	470
6.3.1	電子-イオン間の衝突項	471
6.3.2	マクスウェル-ボルツマン分布との衝突項	472
6.3.3	イオン-電子間の衝突項	476
6.3.4	衝突項の線形化	477
6.4	古典輸送理論	478
6.4.1	ブラギンスキーの輸送係数	479
6.4.2	スピッツァーの輸送係数	488
6.5	部分電離プラズマ	489
6.5.1	各輸送係数について	490
6.5.2	一般化されたオームの法則	493
6.6	非マクスウェル-ボルツマン分布	500
6.7	プラズマ中の波	500
付録 6.A	非理想気体の状態方程式	500
6.A.1	クーロン力による効果	500

6.A.2	電子の縮退	503
付録 6.B	中性粒子の衝突	510
6.B.1	ボルツマンの衝突項	510
6.B.2	マクスウェル-ボルツマン分布との衝突	512
6.B.3	中性粒子との間の摩擦力	512
第 7 章	相対論	515
7.1	相対論の基本的な考え方	516
7.1.1	4次元時空の座標表示	516
7.1.2	座標変換	518
7.1.3	共変微分	519
7.1.4	曲率テンソル	522
7.1.5	ローレンツ系	524
7.1.6	局所ローレンツ系への移り方	525
7.2	運動方程式	527
7.2.1	測地線方程式	528
7.2.2	変分法	528
7.2.3	ニュートンの運動方程式との対応	529
7.3	重力場の方程式	530
7.3.1	アインシュタイン方程式	531
7.3.2	エネルギー運動量テンソル	532
7.3.3	ポアソン方程式との対応	534
7.4	完全流体の保存則	535
7.4.1	質量保存則	536
7.4.2	運動量保存則	537
7.4.3	エネルギー保存則	539
7.5	シュバルツシルト計量 (応用例)	540
7.5.1	[トピック] 水星の近日点移動	541
7.6	電磁場の方程式	550
7.6.1	完全反対称テンソル	550
7.6.2	電磁場テンソル	551
7.6.3	マクスウェル方程式	552
7.6.4	ローレンツ力	554
7.6.5	電磁場のエネルギー運動量テンソル	554
7.7	ローレンツ系での運動と対称性	555

7.7.1	質点系のエネルギー運動量保存則	555
7.7.2	ローレンツ変換	557
7.7.3	時空間の対称性と保存量	560
7.8	理想磁気流体	562
7.8.1	3+1 形式	563
7.8.2	理想 MHD 条件と誘導方程式	566
7.8.3	保存則	567
7.8.4	弱い重力下での保存則	571
7.9	放射輸送	572
7.9.1	光子の 4 元運動量	573
7.9.2	[トピック] 太陽スペクトルの重力赤方偏移	574
7.9.3	放射輸送方程式 (ボルツマン方程式)	577
7.9.4	放射モーメント方程式	578
	参考文献	581
	索引 (日本語-英語対応表)	596

1

数学的準備と流体力学の考え方

MHD を扱うにはどうしても大学 1,2 年生レベルの数学が必要になってしまう上に、流体力学独特の概念も登場するので、高校卒業レベルの知識 (微積分またはベクトルや行列の掛け算に関する基礎知識) を持ち合わせた方を想定して、本書で使う数学的知識と流体力学の基本的な考え方を説明する。数学があやふやな方は辞書的に本章に戻るような使い方もできるかもしれない。また、理系大学生、院生の方でも専攻分野によっては本書の記法が見慣れない方もいると思われるので、それについての説明も記す。数学屋の方には不満な内容だと思われるが、悪しからず。

この章は私が東京大学理学部で受けた講義のノートを参考にしてしているので、出版された参考文献を示すことはできないが、高度な内容ではないので、調べればいくらでも出てくる情報だと思う。

1.1 本書で使う記法

本書では、仮に「ベクトル表記」と「添え字表記」と呼ぶ 2 系統の表記方法で数式を記述する。

ベクトル表記は、デカルト座標 (x, y, z) 、円筒座標 (r, ϕ, z) 、球座標 (r, θ, ϕ) のどの座標系で考えていても共通して使える書き方である。ベクトルは \mathbf{v} , \mathbf{B} などの太字を使い、ベクトルの内積や外積は $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ のように表す。ベクトル \mathbf{v} の絶対値 (大きさ、強さ) $|\mathbf{v}|$ を細字で v と書くこともある。特に、デカルト座標において、ベクトル \mathbf{a} を x, y, z 成分に展開して表した場合、

$$\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{x}} + a_y \hat{\mathbf{y}} + a_z \hat{\mathbf{z}} \quad (1.1.1)$$

$$= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (1.1.2)$$

というように、数ベクトルを用いて書き下すことがある。

添え字表記は、考えている座標系ごとに特化した記法である。例えば円筒座標で考えるときは、ベクトル \mathbf{v} を v_r, v_ϕ, v_z のように、添え字を使って成分ごとに書き下す。特にデカルト座標で考えているときは、 x, y, z をそれぞれ x_1, x_2, x_3 として、ベクトル \mathbf{v} を v_1, v_2, v_3 のように表す。この記法を使って、等式が

$$A_i = B_i \quad (1.1.3)$$

のように書かれているときは、 $i = 1, 2, 3$ のそれぞれについて成り立つという意味である。また、

$$A_k B_k, \quad \frac{\partial A_k}{\partial x_k} \quad (1.1.4)$$

のように、同じ添え字を使った掛け算や微分は、それぞれ

$$\sum_{k=1}^3 A_k B_k, \quad \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_k}{\partial x_k} \quad (1.1.5)$$

の Σ を省略したものとする。これは、アインシュタインの縮約記法と呼ばれるものの簡易版である。つまり、ベクトルの内積は

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{k=1}^3 a_k b_k = a_k b_k \quad (1.1.6)$$

と表される。更に、 τ_{ij} のように添え字が 2 つ以上付いた、テンソルと呼ばれる量も登場する。添え字が 2 つ付いたものを 2 階のテンソルと言う。ベクトルは 1 階のテンソルである。テンソルについては、付録 1.B で詳しく説明してある。

クロネッカーのデルタ、レヴィ-チヴィタの記号と呼ばれる記号をそれぞれ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases} \quad (1.1.7)$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \text{ のとき} \\ -1 & (i, j, k) = (3, 2, 1), (2, 1, 3), (1, 3, 2) \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \text{ のとき} \end{cases} \quad (1.1.8)$$

と定義する。すると、ベクトルの外積の i 成分は、

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_i = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_j b_k = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \quad (1.1.9)$$

と簡潔に書ける。

まとめると、仮に

$$\frac{\partial a_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} (p \delta_{ij} + q_{ij}) + \varepsilon_{ijk} b_j c_k \quad (1.1.10)$$

のような式があった場合、

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q_{11}}{\partial x} + \frac{\partial q_{12}}{\partial y} + \frac{\partial q_{13}}{\partial z} + b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q_{21}}{\partial x} + \frac{\partial q_{22}}{\partial y} + \frac{\partial q_{23}}{\partial z} + b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ \frac{\partial a_3}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial q_{31}}{\partial x} + \frac{\partial q_{32}}{\partial y} + \frac{\partial q_{33}}{\partial z} + b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{cases} \quad (1.1.11)$$

という意味である。

1.2 場の量

流体力学では、場の量と呼ばれる空間座標と時刻の関数を基本変数として扱うことになる。場の量の概念を紹介する。

1.2.1 連続体近似

MHD は流体力学の考え方が土台となっているが、流体力学では、扱う液体やらガスを連続体として考える。液体やガスは、本来沢山の原子や分子が集まってできているが、そのことを忘れ、物質をどこまで区切っても滑らかで連続的なものと捉えるのが連続体の考え方である。我々がいま知りたい温度や圧力などの量は、各分子の微視的な振る舞いがある程度の時空間で平均すると現れる、巨視的な性質である。我々がある物質の性質の時間・空間的变化を調べたい場合、その変化のスケールより十分微小な領域を考えることができ、尚且つその微小領域で巨視的な量を定義することができるときに、その物質を連続体として考えることができる。

本書では、MHD を巨視的な立場での基礎方程式から始まる理論体系として説明する。その後第 6 章で、それまでの章で扱ってきた巨視的な量の微視的な立場での意味合いを説明し、特に理想気体プラズマの場合を想定して、各粒子の運動を統計的に扱う方程式に平均操作を施すことで、MHD の方程式を導く。

1.2.2 スカラー場とベクトル場

流体力学は流体の状態を数学的に記述してそのダイナミクスを計算できるようにする理論である。例えば身の回りの空気を考えてみる。部屋の空気は連続体近似のもとで、各点において温度 T というものを定義することができる。暖房の近くの空気は暖かくて、冷たい空気は部屋の下側に溜まる。また、暖房を止めると徐々に冷たくなる。このような温度の空間分布やその時間変化を表すために $T(x, y, z, t) = T(\mathbf{x}, t)$ という関数を考える。もし \mathbf{x}_1 という点の時刻 t_1 での温度 T_1 を知りたければ、この関数にその値を入力すれば

$$T_1 = T(\mathbf{x}_1, t_1) \quad (1.2.1)$$

と出力してくれる。この温度のように、空間と時間の関数として定義された物理量を場の量と言う。本当は温度場と呼ぶのが正確だが、多くの場合は略して温度と呼んでしまう。この場の量、つまり関数 $T(\mathbf{x}, t)$ の形さえ分かれば、部屋の温度の状況について理解したと言えるわけである。他には空気の質量密度 (単位体積あたりの質量) $\rho(\mathbf{x}, t)$ や圧力 $p(\mathbf{x}, t)$ もいま我々が知りたい場の量である。これらの量は特にスカラー場と呼ばれる。

一方で、エアコンの近くの点ではエアコンから離れる方向に風が吹いていて、その風はエアコンを止めると止まる、といった、空気の各点での速度の分布とその時間変化も数学的に記述する

必要がある。そのために、速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ というものを導入する。これはベクトル場と呼ばれるもので、スカラー場と違うところは、方向の情報も持っているところである。方向の情報を持たせるには 3 つの関数が必要である。この場合、 $v_x(\mathbf{x}, t), v_y(\mathbf{x}, t), v_z(\mathbf{x}, t)$ という 3 つの関数の形が分かれば、我々はある点 \mathbf{x}_1 で時刻 t_1 に吹く風のベクトル \mathbf{v}_1 の 3 成分を

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(\mathbf{x}_1, t_1) = \begin{pmatrix} v_x(\mathbf{x}_1, t_1) \\ v_y(\mathbf{x}_1, t_1) \\ v_z(\mathbf{x}_1, t_1) \end{pmatrix} \quad (1.2.2)$$

というように、自由に知ることができる。他には、磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ も知りたいベクトル場である^{†1}。

従って、場の量の関数形を、後に述べる偏微分方程式というものを使って求めることによって、流体现象を再現・予想することが、流体力学のとりあえずの使い方となる。

1.2.3 偏微分

流体力学では場の量と呼ばれる、空間と時間の関数を使って物事を考えると前節で述べた。従って多変数関数の微分が必要になる。

前節と同じように部屋の温度について考える。夏にエアコンを止めると、部屋の各点の温度は徐々に高くなっていく。この時の各点における温度変化率は、関数 $T(\mathbf{x}, t)$ が分かっているならば、それを時間について微分する、すなわち、変数 \mathbf{x} は固定して、 T を t のみの関数とみて微分することで、

$$\frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \quad (1.2.3)$$

と求まる。この操作、または出てきた導関数のことを、 t についての偏微分と呼ぶ。略して時間微分と呼ぶこともある。普通は引数の表示 (\mathbf{x}, t) は省略する。後は変化率を知りたい点の座標と時刻をこの導関数に入力すれば、知りたい変化率が出力される。^{†2}

暖かい空気が上に溜まって下側は寒いという経験もある。この時、部屋の上 (z 軸方向とする) に行く程どういう割合で暖かくなるのか、その温度増加率 (z 方向の勾配、勾配の z 成分) を知りたい場合もある。この場合は、関数 $T(\mathbf{x}, t)$ を今度は z について微分することで、

$$\frac{\partial T}{\partial z}(\mathbf{x}, t) \quad (1.2.4)$$

と求まる。先ほどの時間微分に対して、空間微分と呼ぶこともある。後は、知りたい (\mathbf{x}, t) を入力すれば、知りたい増加率が分かる。

偏微分に関する一般的なルールを説明する。例えば、ある関数 f が x と t の関数 $f(x, t)$ だったとして、更に x, t のそれぞれが s, u の関数 $x(s, u), t(s, u)$ だったとする。このとき、関数 f

^{†1} 第 7 章以外では、空間回転に対して一定の変換性を持つ量をベクトル場と呼ぶ。詳しくは付録 1.B を参照のこと。

^{†2} ∂ のことは、「デル」「ラウンドディー」「パーシャル」などと呼ぶが、統一的な呼び方はない気がする。

は x, t を介して s, u の関数であるが、 f の s についての微分は

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial s} \quad (1.2.5)$$

となる。これは連鎖律と呼ばれる。部屋の温度場 $T(x, t)$ が分かっている、自分は x 軸の方向に $x(t) = Vt$ というように一定速度 V で歩いているとする。このとき、感じられる温度の時間変化は連鎖律を用いて、

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{dx(t)}{dt} \quad (1.2.6)$$

$$= \frac{\partial T}{\partial t} + V \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.2.7)$$

と求まる。

また、2階微分について一般に、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (1.2.8)$$

などが成り立つ。この性質を「可換である」と表現する。つまり、上記の両辺に違いはないので、まとめて

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (1.2.9)$$

と書く。積の微分に関しては、

$$\frac{\partial}{\partial x} (fg) = \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x} \quad (1.2.10)$$

などが成り立つ。これをライプニッツ則と言う。

1.3 オイラー表現とラグランジュ微分

流体力学における物理量の表現方法として、2つの方法を紹介する。それに伴い、異なる2つの時間微分が登場する。

1.3.1 ラグランジュ表現とオイラー表現

流体力学での物理量の表現の仕方には、オイラー表現とラグランジュ表現という2つの流儀がある。今まで説明してきたのは、実はオイラー表現にあたる。

ラグランジュ表現は物質表示とも呼ばれる。流体を沢山の微小区間に区切り、それぞれの微小区間 (流体粒子と呼ばれる) を、 $t = 0$ の時にその流体粒子があった位置 \mathbf{x}_0 によってラベル付けて区別し、各流体粒子ごとに物理量を定義する (図 1.1 A 参照)。つまり、各物理量は流体

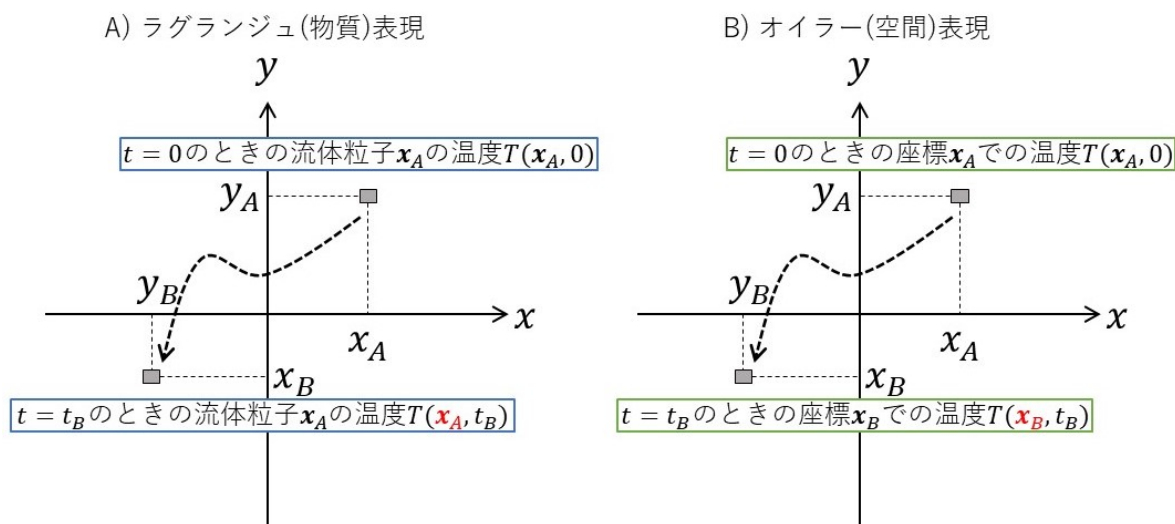


図 1.1 ラグランジュ表現とオイラー表現の違い

粒子のラベル x_0 と時刻 t の関数になる。各流体粒子は時間の経過とともに流れて移動するが、注目している流体粒子ごとの温度の時間変化が $\partial T/\partial t$ となる。

それに対して、オイラー表現は空間表示とも呼ばれ、空間に固定した座標系の各点ごとに物理量を定義して考える。つまり、各物理量は空間座標 x と時刻 t の関数 (場の量) になる (図 1.1 B 参照)。各流体粒子は時間経過とともに移動するが、流体粒子の区別は気にせずに、とにかく時刻 t_1 に点 x_1 にある流体粒子の温度を $T(x_1, t)$ と記述する。空間のある点に固定してある温度計が記した温度変化が $\partial T/\partial t$ にあたる。

この各表現方法における $\partial/\partial t$ の違いについては、少しややこしいが、一度じっくり整理すべきである。例えば、暑い部屋でエアコンを ON にしたとする。このとき、エアコンから排出された冷たい空気塊の一部に注目する。熱伝導によって元から部屋にあった周りの暑い空気塊から熱をもらうので、注目している空気塊の温度は高くなっていくはずである。これが端的にはラグランジュ表現における $\partial T/\partial t$ のイメージである。一方で、自分の座っている位置の空気は、エアコンの風にあてられて冷たくなっていく。これがオイラー表現における $\partial T/\partial t$ のイメージである。

ラグランジュ的な、流体粒子を追った考え方は今後度々用いるが、ラグランジュ表現はややこしい問題が付きまとうので、表現方法としてはオイラー表現を使うのが普通である。本書もオイラー表現で記述する。

1.3.2 ラグランジュ微分

前節でラグランジュ表現とオイラー表現における時間微分の違いを説明した。ラグランジュ表現における時間微分をラグランジュ微分と言う。今後はオイラー表現を使うので、 $\partial/\partial t$ はオイラー的な意味での時間微分を表す。オイラー表現においてラグランジュ微分は、代わりに D/Dt または d/dt という記号を使って表す。

オイラー表現におけるラグランジュ微分を時間微分によって表すことを考える。とある座標 \mathbf{x} にいる温度 $T(\mathbf{x}, t)$ の流体粒子が、微小時間 δt 経過後に $\delta \mathbf{x}$ だけ移動したとする。この時、 δt 経過後のこの流体粒子の温度は $T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, t + \delta t)$ と表されるので、この流体粒子に沿った、ラグランジュ微分に相当する差分は

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, t + \delta t) - T(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \quad (1.3.1)$$

$$= \frac{T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, t + \delta t) - T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, t)}{\delta t} + \frac{T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, t) - T(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \quad (1.3.2)$$

と書け、特に第 2 項は

$$\begin{aligned} & \frac{T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, t + \delta t) - T(\mathbf{x}, t + \delta t)}{\delta t} \\ &= \frac{T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, t + \delta t) - T(\mathbf{x}, y + \delta y, z + \delta z, t)}{\delta t} \\ & \quad + \frac{T(\mathbf{x}, y + \delta y, z + \delta z, t) - T(\mathbf{x}, y, z + \delta z, t)}{\delta t} \\ & \quad + \frac{T(\mathbf{x}, y, z + \delta z, t) - T(\mathbf{x}, y, z, t)}{\delta t} \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\delta x}{\delta t} \cdot \frac{T(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, t + \delta t) - T(\mathbf{x}, y + \delta y, z + \delta z, t)}{\delta x} \\ & \quad + \frac{\delta y}{\delta t} \cdot \frac{T(\mathbf{x}, y + \delta y, z + \delta z, t) - T(\mathbf{x}, y, z + \delta z, t)}{\delta y} \\ & \quad + \frac{\delta z}{\delta t} \cdot \frac{T(\mathbf{x}, y, z + \delta z, t) - T(\mathbf{x}, y, z, t)}{\delta z} \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

と書ける。ここで、例えば $\delta x/\delta t$ は流体粒子の x 方向の速度に他ならない。そのため、 $\delta t \rightarrow 0$ の極限を考えると、速度場 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ も使って、

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1.3.5)$$

となる。特に右辺第 2,3,4 項は、

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} T \quad (1.3.6)$$

というように、形式的にまるで速度場 \boldsymbol{v} と

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \quad (1.3.7)$$

の内積のように見えるため、簡略化のためにまとめて

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)T \quad (1.3.8)$$

と書かれる。記号 ∇ はナブラと呼ばれる。つまり、ラグランジュ微分は

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \quad (1.3.9)$$

となる。右辺第 2 項の具体的な説明は節 3.1 です。

1.4 ベクトル解析

前節では場の量の時間微分について説明した。 ∇ を形式的に定義して、微分演算子をまるでベクトルの成分のように見立てて記述を簡略化する手法は今後多用する。この節では、場の量の空間微分や積分について、その意味や扱い方を説明する。

1.4.1 勾配

スカラー場 f に対して、

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{pmatrix} \quad (1.4.1)$$

というベクトル場を勾配 (gradient; grad) と言う。例えば、ある点ある時刻で、温度場 $T(\boldsymbol{x}, t)$ の勾配が

$$\nabla T = \begin{pmatrix} 2.0 \text{ K/m} \\ 1.0 \text{ K/m} \\ 1.0 \text{ K/m} \end{pmatrix} \quad (1.4.2)$$

と求まったとする。この時、この点では、

$$\frac{\nabla T}{|\nabla T|} = \begin{pmatrix} 0.82 \\ 0.41 \\ 0.41 \end{pmatrix} \quad (1.4.3)$$

という単位ベクトルが向く方向に、

$$|\nabla T| = 2.4 \text{ K/m} \quad (1.4.4)$$

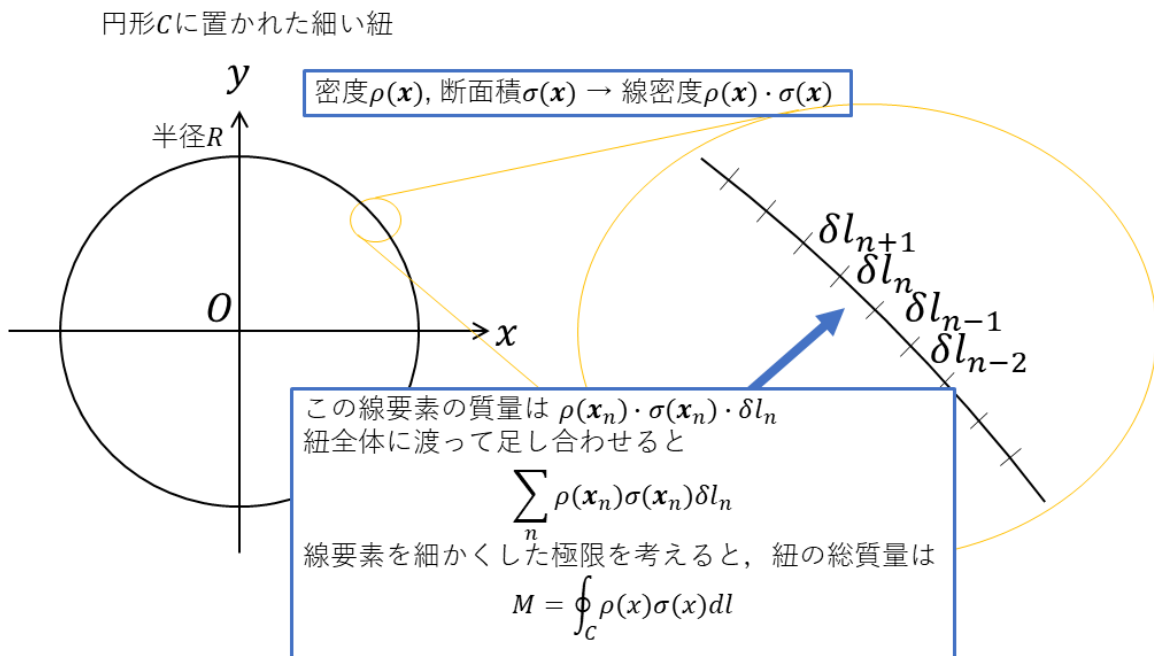


図 1.2 線積分の考え方

という割合で温度が増加している。一方で、 z 軸の方向に進むとどういう割合で増加しているかを調べたい場合は、 z 方向の単位ベクトル $\hat{z} = (0, 0, 1)$ との内積をとって、

$$\nabla T \cdot \hat{z} = 1.0 \text{ K/m} \tag{1.4.5}$$

と求めることができる。 ∇T と垂直な方向に進む場合は、内積がゼロなので、温度変化はない。つまり、温度場の値が等しい点を結んだ面を考えた場合、 ∇T はこの等値面に垂直な方向を向く。

1.4.2 線積分と面積分

線積分や面積分という概念は流体の物理を考えるときに役に立つ。これらの積分の数学的にきちんとした導入を説明できる自信はないので、興味のある方は入門書を漁っていただきたい。この節では、これらの積分の物理的イメージが掴めるよう、簡単な思考実験をするに留まる。積分の基礎概念を知っている方にとっては直観に反しない内容だと思われるので、イメージさえ掴めれば、とりあえず流体力学を扱う上で困らないはずである。

まずは線積分について。図 1.2 のような、半径 R の円形 (この円に C という名前を付ける) に置かれた細い紐を考える。紐の密度は $\rho(\mathbf{x})$ 、紐を各点で輪切りにした時の断面積は $\sigma(\mathbf{x})$ とする。さて、この紐の総質量 M を求めることにする。紐を線要素と呼ばれる、長さ δl_n の細かい区間に区切って、各区間の質量を求め、それを紐全体に渡って足し合わせる、という操作を図 1.2 のように行う。線要素の長さを細かくしていった時の極限が線積分と呼ばれるもので、紐の

よく分からない形 Ω をした薄い紙

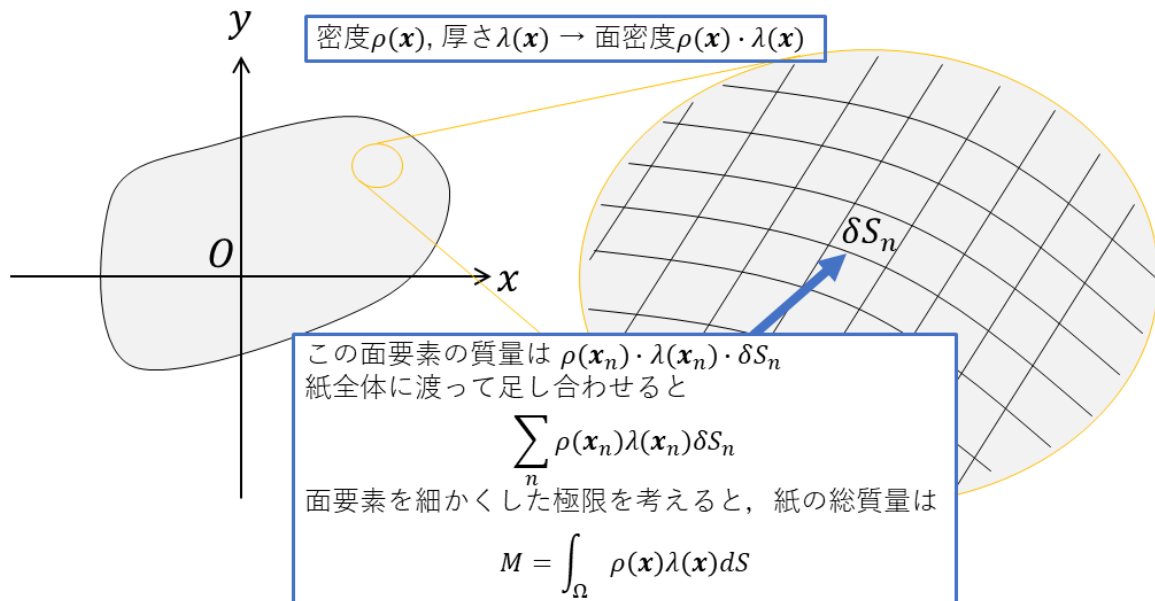


図 1.3 面積分の考え方

総質量は

$$M = \oint_C \rho(\mathbf{x})\sigma(\mathbf{x})dl \tag{1.4.6}$$

と求まる。閉じている、つまり端のない曲線で積分したとき、このように、インテグラルに丸を付けることがある。密度と断面積が一様で、それぞれ定数 ρ_0, σ_0 の場合にこれを実際に計算してみる。極座標 (r, θ) で考えると、線要素 δl_n の長さは、円弧の長さ

$$\delta l_n = R \cdot \delta \theta_n \tag{1.4.7}$$

なので、

$$M = \int_0^{2\pi} \rho_0 \sigma_0 \cdot R d\theta \tag{1.4.8}$$

$$= 2\pi R \rho_0 \sigma_0 \tag{1.4.9}$$

となる。円周の長さと紐の線密度をかけたものとなるのは直観に反しない。紐の長さは単に

$$\oint_C dl = \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R \tag{1.4.10}$$

と求められる。

次は面積分について考えるため、図 1.3 のような形 Ω をした薄い紙を考える。紙の密度を $\rho(\mathbf{x})$ 、各点での厚さを $\lambda(\mathbf{x})$ とする。紙を面要素と呼ばれる面積 δS の微小領域に区切り、各面

要素の質量を図 1.3 のように考えて求め、紙全体に渡って足し合わせ、面要素を細かくしたときの極限を考える。すると、紙の総質量は

$$M = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \lambda(\mathbf{x}) dS \quad (1.4.11)$$

と書ける。これを面積分と呼ぶ。例えば、紙の密度と厚さが一様で定数 ρ_0, λ_0 の場合、この式は

$$\int_{\Omega} dS = \frac{M}{\rho_0 \lambda_0} \quad (1.4.12)$$

となるが、この式の左辺はこの紙の面積のことであり、この紙の面積を知りたいければ、紙の総質量を量って面密度で割れば良いと分かる。

これらの例では、平面上の紐や紙を考えたが、一般に曲面や曲面上の曲線でも同じようにして線積分や面積分を考えることができる。

最後に、体積分の概念も紹介する。体積 δV の微小領域 (体積要素) を考えてそれを考えている領域について足し合わせ、体積要素を細かくしたときの極限を考える。例えば、

$$\int_V dV, \quad \int_V \rho(\mathbf{x}) dV \quad (1.4.13)$$

はそれぞれ、積分した領域の体積と総質量を表す。

1 変数での積分の場合、 $s = f(x)$ と積分変数を変換する場合、 $ds = f'(x)dx$ という関係を用いた。多変数での積分において、例えば

$$\begin{cases} s_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ s_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ s_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (1.4.14)$$

というように 3 変数を変換する場合、次の関係を用いる。 J はヤコビアンと呼ばれる。

$$ds_1 ds_2 ds_3 = J dx_1 dx_2 dx_3 \quad (1.4.15)$$

$$\text{ただし, } J = \begin{vmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 & \partial f_1 / \partial x_3 \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 & \partial f_2 / \partial x_3 \\ \partial f_3 / \partial x_1 & \partial f_3 / \partial x_2 & \partial f_3 / \partial x_3 \end{vmatrix} \quad (1.4.16)$$

1.4.3 発散

あるベクトル場 $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = (Q_x(\mathbf{x}, t), Q_y(\mathbf{x}, t), Q_z(\mathbf{x}, t))$ に対して、

$$\nabla \cdot \mathbf{Q} = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \quad (1.4.17)$$

というスカラー場を、発散 (divergence; div) と言う。これを空間における任意の領域 V で積分すると、次の式が成り立つ。

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{Q}) dV = \int_{\partial V} \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.4.18)$$

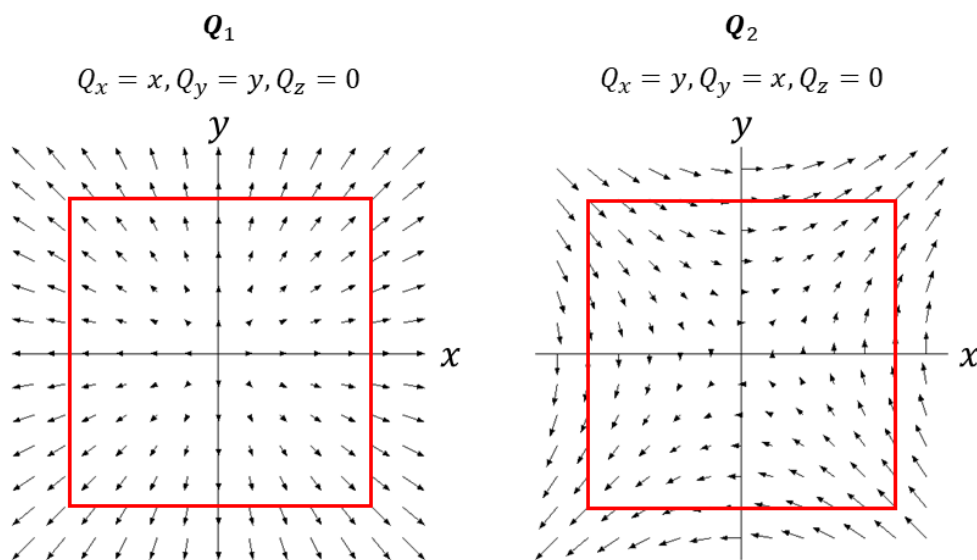


図 1.4 ベクトル場の例： Q_1 はあらゆる点で発散が正の値、 Q_2 はあらゆる点で発散がゼロ

これは、ガウスの発散定理と呼ばれる。 ∂V は考えている領域 V の表面 (境界) を指す。 dS は、面要素の外向き法線ベクトルの方向、つまり V の境界面に垂直で V の外側を向いていて、面要素の面積の大きさを持つベクトルを表す。それと Q の内積をとっているので、 $Q \cdot dS$ は、その面要素の位置における Q の、境界面に垂直外向きな成分の大きさと、面要素の面積をかけた量ということになる。

発散のイメージを深めるための例として、図 1.4 に 2 種類のベクトル場を図示した。この分布が z 方向にずっと続いていると考えて欲しい。

$$Q_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \cdot Q_1 = 2 \tag{1.4.19}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \cdot Q_2 = 0 \tag{1.4.20}$$

である。図の赤い線で描かれた面を考える。 z 方向に適当な長さだけ伸びている四角筒の領域で $\nabla \cdot Q_1$ を積分すると、 $2 \cdot (\text{筒の体積})$ という正の値になる。式 (1.4.18) の左辺が正なので、右辺も正、つまり、ベクトル場は全体としてこの領域から流出しているように見えるはずである。実際、赤い線と重なったベクトル場の矢印を目で追ってみると、全体として外向きになっていることが分かる。

一方で、 $\nabla \cdot Q_2$ はあらゆる点でゼロなので、積分してもゼロである。 Q_2 の方の赤い線と重なった矢印を目で追ってみると、対称性から、領域に流入する矢印の量と流出する矢印の量が相殺して、全体としては流出がゼロに見える。この場合、他の曲線を描いた場合も、 Q_1 では流出

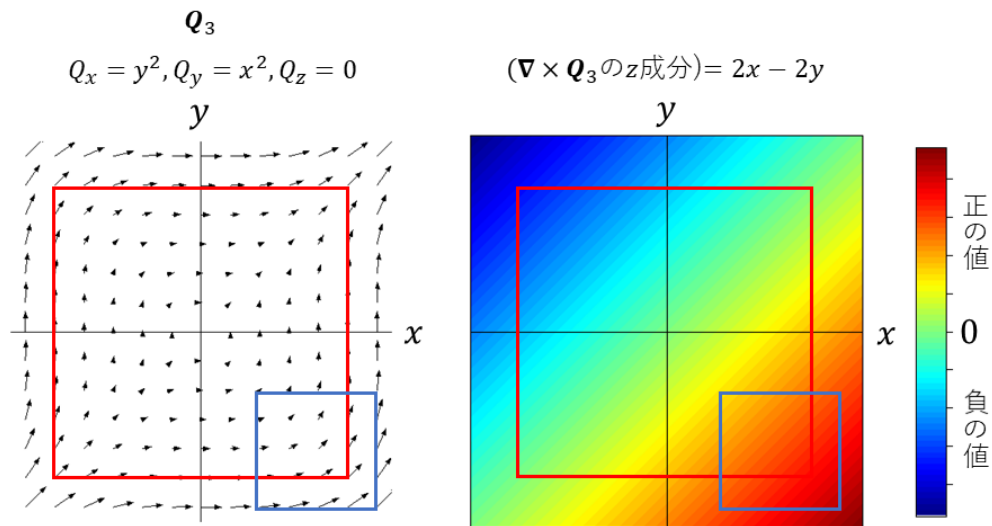


図 1.5 ベクトル場の例：ベクトル場 Q_3 とその回転の z 成分

する矢印の量の方が多く、 Q_2 では相殺されてゼロのように見えるはずである。

「発散は、体積分するとその領域から流出するように見える矢印の総量の割合になる」というなんとなくのイメージを掴んでいただきたい。

1.4.4 回転

引き続きベクトル場を考える。

$$\nabla \times \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \partial Q_z / \partial y - \partial Q_y / \partial z \\ \partial Q_x / \partial z - \partial Q_z / \partial x \\ \partial Q_y / \partial x - \partial Q_x / \partial y \end{pmatrix} \quad (1.4.21)$$

というベクトル場を、回転 (rotation; rot) と言う。これを空間における任意の曲面 S で積分すると、次の式が成り立つ。

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{Q}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.4.22)$$

これは、ストークスの定理と呼ばれる。左辺は、 $\nabla \times \mathbf{Q}$ の面に垂直な成分と面要素の面積をかけたものの総和を意味する。右辺の C は考えている曲面の境界 (端) の曲線を指す。 $d\mathbf{l}$ は曲線の線要素の向きをして、その長さの大きさを持ったベクトルを表す。 $d\mathbf{l}$ と $d\mathbf{S}$ は右ねじの関係になるような向きにとらなければならない。右辺は、曲線上の \mathbf{Q} の、接線と同じ向きの成分と線要素の長さをかけたものの総和となる。

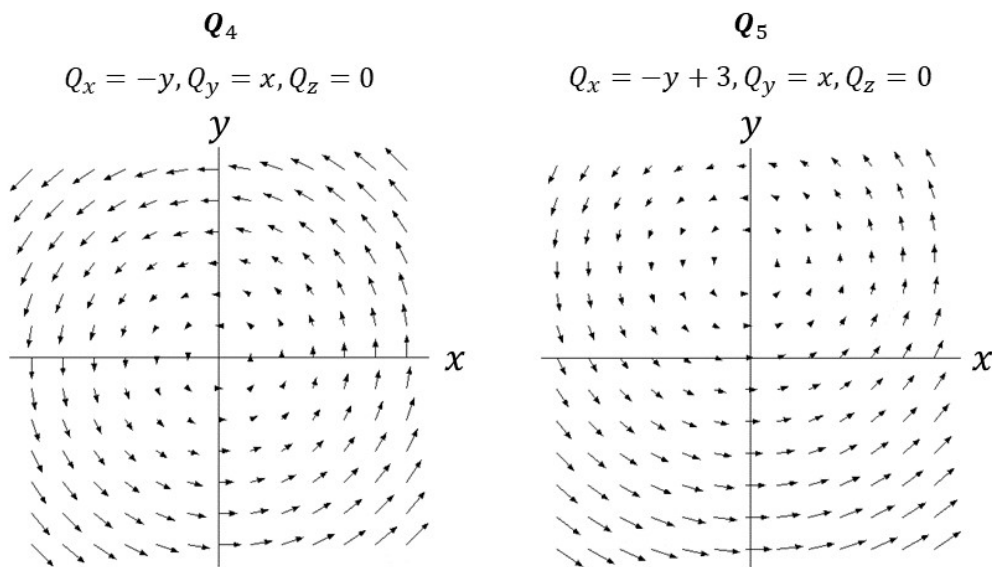


図 1.6 ベクトル場の例：回転が一様の場合

回転のイメージを深めるために、図 1.5 にベクトル場 \mathbf{Q}_3 と、その回転の z 成分を図示した。

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \times \mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x - 2y \end{pmatrix} \tag{1.4.23}$$

である。図の赤い線で張られた面を考える。回転の z 成分は、右下では正、左上では負なので、この面で積分すると、対称性から相殺されてゼロになる。つまり、式 (1.4.22) の左辺がゼロである。右辺を考えるために、赤い線を反時計回りに目で追い、重なっている矢印の、線に平行な成分を頭の中で足していく。右側の辺ではプラスになるが、上と左側の辺でマイナスになり、下側の辺でまたプラスされるので、対称性から相殺してゼロになることが分かる。

一方で、今度は図の青い線で張られた面を考える。この面内では、あらゆる点で回転は正の値をとるので、式 (1.4.22) の左辺も正の値になる。青い線と重なった矢印を反時計回りに目で追い、線に平行な成分を足していくと、上と左側の辺でマイナスになるが、下と右側の辺でのプラスの方が大きいので、全体としては正の値になるように見えるはずである。

「回転は、面積分するとその境界線で右ねじの向きに回転しているように見える矢印の総量の度合になる」というなんとなくのイメージを掴んでいただきたい。因みに、図 1.4 の $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ はどちらも回転があらゆる点でゼロの場合である。

ベクトル場の例をもう 2 つ図 1.6 に示す。

$$\mathbf{Q}_4 = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \times \mathbf{Q}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1.4.24}$$

である。これは回転が一様 (定数 2) な場だが、このベクトル場が流体の速度場を表す場合、図

を見て分かるようにこの流体は剛体回転をしている。角速度は 1、すなわち回転の z 成分の半分
の値である。このことから $\nabla \times \mathbf{Q}$ が回転と呼ばれる所以が分かる。 \mathbf{Q}_4 を速度場と見た場合、
点 $P(x, y) = (0, 3)$ での速度場は、 x 軸の負の向きに流速 3 である。この点の流体が静止してい
るように見える系で観測した場合、速度場を

$$Q'_x = Q_x + 3, \quad Q'_y = Q_y, \quad Q'_z = Q_z \quad (1.4.25)$$

と変換すると図 1.6 の \mathbf{Q}_5 のようになる。今度は原点ではなく点 P を中心に同じ剛体回転をし
ていることが分かる。つまり、流体の剛体回転の中心は観測系によって異なる。別の言い方を
すれば、あらゆる場所が剛体回転の中心であり得る。この対称性は、 $\mathbf{Q}_4, \mathbf{Q}_5$ ともに回転の値が
同じで一様なことから分かる。

1.4.5 ラプラシアン

スカラー場 f に対して、

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.4.26)$$

をラプラシアンと言う。 ∇^2 は Δ と書くこともある。この物理的イメージは節 1.5.1 で説明す
る。ベクトル場 \mathbf{Q} に対しても、

$$\nabla^2 \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \partial^2 Q_x / \partial x^2 + \partial^2 Q_x / \partial y^2 + \partial^2 Q_x / \partial z^2 \\ \partial^2 Q_y / \partial x^2 + \partial^2 Q_y / \partial y^2 + \partial^2 Q_y / \partial z^2 \\ \partial^2 Q_z / \partial x^2 + \partial^2 Q_z / \partial y^2 + \partial^2 Q_z / \partial z^2 \end{pmatrix} \quad (1.4.27)$$

という意味でこの記号を用いる。

1.4.6 様々な公式とその計算方法

前節までで、場の量の空間微分について全て紹介した。この節では、これらの微分の簡単な式
変形の仕方を紹介して、よく使う変形を公式集としてまとめる。

節 1.1 で説明した添え字表記を使って、空間微分をデカルト座標で書き下すと、

$$[\nabla f]_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (1.4.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{Q} = \frac{\partial Q_k}{\partial x_k} \quad (1.4.29)$$

$$[\nabla \times \mathbf{Q}]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial Q_k}{\partial x_j} \quad (1.4.30)$$

$$[\nabla^2 \mathbf{Q}]_i = \frac{\partial^2 Q_i}{\partial x_k^2} \quad (1.4.31)$$

と書ける。また、レヴィ-チヴィタの記号の性質

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = \varepsilon_{jki} = \dots \quad (\text{添え字を 1 組入れ替えるとマイナスが付く}) \quad (1.4.32)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \quad (1.4.33)$$

も覚えておく。すると、例えば、 $\nabla \cdot (\mathbf{Q}^{(1)} \times \mathbf{Q}^{(2)})$ や $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{Q})$ のような複雑な式が出てきたときは、

$$\nabla \cdot (\mathbf{Q}^{(1)} \times \mathbf{Q}^{(2)}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varepsilon_{ijk} Q_j^{(1)} Q_k^{(2)} \right) \quad (1.4.34)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial Q_j^{(1)}}{\partial x_i} Q_k^{(2)} + \varepsilon_{ijk} Q_j^{(1)} \frac{\partial Q_k^{(2)}}{\partial x_i} \quad (1.4.35)$$

$$= Q_k^{(2)} \varepsilon_{kij} \frac{\partial Q_j^{(1)}}{\partial x_i} - Q_j^{(1)} \varepsilon_{jik} \frac{\partial Q_k^{(2)}}{\partial x_i} \quad (1.4.36)$$

$$= \mathbf{Q}^{(2)} \cdot (\nabla \times \mathbf{Q}^{(1)}) - \mathbf{Q}^{(1)} \cdot (\nabla \times \mathbf{Q}^{(2)}) \quad (1.4.37)$$

$$[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{Q})]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varepsilon_{klm} \frac{\partial Q_m}{\partial x_l} \right) \quad (1.4.38)$$

$$= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \frac{\partial^2 Q_m}{\partial x_j \partial x_l} \quad (1.4.39)$$

$$= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \frac{\partial^2 Q_m}{\partial x_j \partial x_l} \quad (1.4.40)$$

$$= \frac{\partial^2 Q_j}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 Q_i}{\partial x_j^2} \quad (1.4.41)$$

$$= [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{Q}) - \nabla^2 \mathbf{Q}]_i \quad (1.4.42)$$

というように、少しの慣れは要するが、全成分を書き下すよりは楽に式変形できる。

よく使う式変形を公式集の形でまとめる。辞書的に使って欲しい。 f はスカラー場、 \mathbf{Q} はベクトル場を指す。

$$\nabla \cdot (f\mathbf{Q}) = f\nabla \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \cdot \nabla f \quad (1.4.43)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{Q}) = f\nabla \times \mathbf{Q} + \nabla f \times \mathbf{Q} \quad (1.4.44)$$

$$\nabla(\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2) = \mathbf{Q}_1 \times (\nabla \times \mathbf{Q}_2) + \mathbf{Q}_2 \times (\nabla \times \mathbf{Q}_1) + (\mathbf{Q}_1 \cdot \nabla)\mathbf{Q}_2 + (\mathbf{Q}_2 \cdot \nabla)\mathbf{Q}_1 \quad (1.4.45)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2) = \mathbf{Q}_2 \cdot (\nabla \times \mathbf{Q}_1) - \mathbf{Q}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{Q}_2) \quad (1.4.46)$$

$$\nabla \times (\mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2) = (\nabla \cdot \mathbf{Q}_2)\mathbf{Q}_1 - (\nabla \cdot \mathbf{Q}_1)\mathbf{Q}_2 + (\mathbf{Q}_2 \cdot \nabla)\mathbf{Q}_1 - (\mathbf{Q}_1 \cdot \nabla)\mathbf{Q}_2 \quad (1.4.47)$$

$$(\nabla \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{Q} = -\frac{1}{2}\nabla|\mathbf{Q}|^2 + (\mathbf{Q} \cdot \nabla)\mathbf{Q} \quad (1.4.48)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{Q}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{Q}) - \nabla^2\mathbf{Q} \quad (1.4.49)$$

$$\nabla \times \nabla f = 0 \quad (1.4.50)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{Q}) = 0 \quad (1.4.51)$$

特に最後の 2 式は、場の量の基本的性質として覚えておくべきである。今後、この公式集は「ベクトル解析の公式」として参照する。

これらの公式は、ベクトル表記で書かれている限り円筒座標や極座標でも成り立つ性質だが、成分で書き下すと異なる形になってくる。円筒座標や極座標での空間微分の考え方については、付録 1.B で説明する。

1.4.7 ヘルムホルツの定理

ベクトル場に関する有用な定理を紹介する。任意のベクトル場 $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ に対して、

$$\mathbf{Q} = \nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.4.52)$$

という関係を満たすようなスカラー場 $\phi(\mathbf{x}, t)$ とベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ が存在する。これをヘルムホルツの定理と言う。つまり、任意のベクトル場はスカラー場と別のベクトル場を用いて上式のように分解することができる (ヘルムホルツ分解)。このように表したときの $\phi(\mathbf{x}, t)$ は \mathbf{Q} のスカラーポテンシャル、 $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ はベクトルポテンシャルと呼ばれる。 $\phi(\mathbf{x}, t)$ は符号を逆にして、つまり上式の第 1 項に負号がつくように導入されることもしばしばあるので注意が必要である。前節で説明したように、勾配の回転は恒等的にゼロなので、 $\nabla\phi$ は \mathbf{Q} のうちの非回転成分を表していると解釈できる。一方で、回転の発散はゼロなので、 $\nabla \times \mathbf{A}$ は \mathbf{Q} の非発散成分を表していると解釈できる。特に、 \mathbf{Q} が非回転 (あらゆる点と時刻で $\nabla \times \mathbf{Q} = 0$) の場であった場合はスカラーポテンシャルのみで、 \mathbf{Q} が非発散 (あらゆる点と時刻で $\nabla \cdot \mathbf{Q} = 0$) の場であった場合はベクトルポテンシャルのみで表すことができる。

場の量が平面波の重ね合わせで表せる場合^{†3}を想定して、

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{Q}}(t) \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z)] \quad (1.4.53)$$

$$= \tilde{\mathbf{Q}}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (1.4.54)$$

の形の場を考える。このとき、 $\nabla \times \mathbf{Q} = 0$ より、

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{Q}} = 0 \quad (1.4.55)$$

という関係が得られる。つまり、非回転の場は伝搬方向 \mathbf{k} に平行な向きの振幅 $\tilde{\mathbf{Q}}$ を持った波 (縦波) の重ね合わせとして表すことができる。このことから場の量の非回転成分は縦成分 (longitudinal part) と呼ばれることがある。一方で、 $\nabla \cdot \mathbf{Q} = 0$ より、

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{Q}} = 0 \quad (1.4.56)$$

という関係が得られる。つまり、非発散の場は伝搬方向 \mathbf{k} に垂直な向きの振幅 $\tilde{\mathbf{Q}}$ を持つ波 (横波) の重ね合わせで表すことができる。このことから、場の量の非発散成分は横成分 (transverse part) と呼ばれることがある。伝搬方向に垂直な向きには 2 つの基底を張れるため、横成分は 2 つの自由度がある (付録 2.A.3 参照)。それに対して縦成分の自由度は 1 である。

1.5 偏微分方程式

場の量が従う法則を記述するために、偏微分方程式と呼ばれるものが用いられる。頻出の形式の偏微分方程式の解の性質を説明した後、コンピュータによる数値的解法について簡単に述べる。他に流体力学において関数を扱う上で知っておくと便利な知識は付録 1.C にまとめた。

1.5.1 拡散方程式とランダムウォーク

例えば、 x 軸の方向に伸びた細長い金属棒の中を、熱伝導によって熱が伝わる時、この棒の 1 次元温度分布 $T(x, t)$ は、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1.5.1)$$

という偏微分方程式に従う。 D は拡散係数または拡散率と呼ばれ、今は定数として考えている。この形の方程式は、色々なシチュエーションの物理で度々登場するので、(一次元で拡散係数が定数の場合の) 拡散方程式という名前が付いている。初期条件 ($t = 0$ の時の分布 $T(x, 0)$) と境界条件 (考えている領域の端において $T(x, t)$ が従う条件) を指定し、考えている領域のあらゆる点や時刻においてこの方程式を満たす関数形 $T(x, t)$ を求めることを、「この微分方程式を解く」と言う。

^{†3} 波の考え方については付録 1.D を参照のこと。

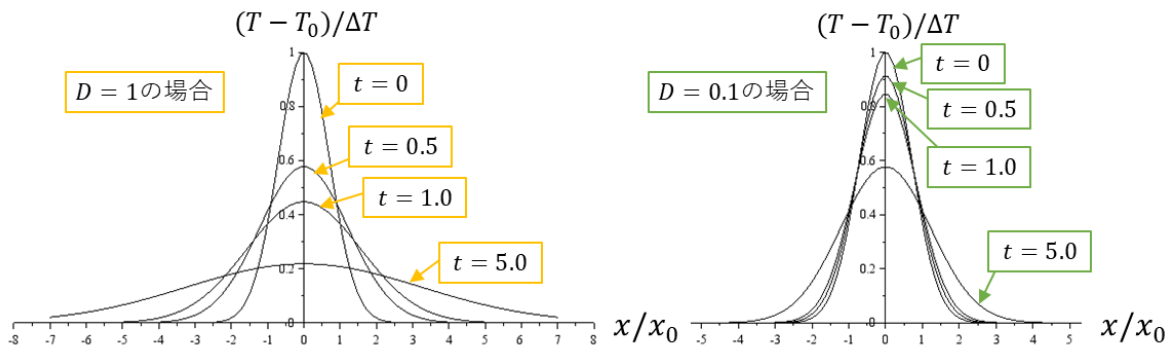


図 1.7 拡散方程式にガウス関数の初期条件を与えた場合の解

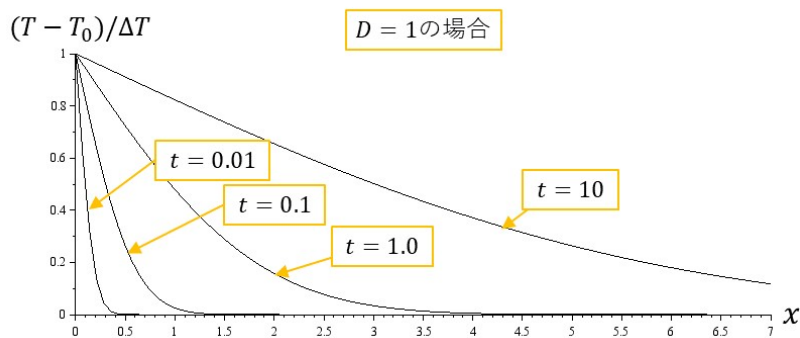


図 1.8 拡散方程式の誤差関数解

温度一様 T_0 の細長い金属棒の一点 $x = 0$ を、 $t = 0$ の時に一瞬だけ熱した (ΔT だけ温度が上昇した) 場合の、その後の棒の温度分布の変化を調べたい場合、無限遠で $T(\pm\infty, t) = T_0$ という境界条件のもとで、

$$T(x, 0) = T_0 + \Delta T \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right) \tag{1.5.2}$$

という初期条件^{†4}を考える。この条件で式 (1.5.1) を解くと、

$$T(x, t) = T_0 + \frac{\Delta T x_0}{\sqrt{4Dt + x_0^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt + x_0^2}\right) \tag{1.5.3}$$

という解を持つことが知られている。解き方の説明は省くが、この解を実際に式 (1.5.1) に入れて計算してみると、確かに満たす。初期条件と空間分布の時間変化を図 1.7 に示す。初期条件で与えたガウス関数の山が、時間の経過とともになだらかに、低くなっていく様子が分かる。また、拡散係数の値が大きいほどその変化のスピードは速くなる。

^{†4} $\exp(x)$ とは指数関数 e^x のことである。 $\exp(-x^2)$ の形の関数をガウス関数と呼ぶ。

一方で、温度一様 T_0 な金属棒があったとして、 $t = 0$ でその棒の片方の端をいきなり温度 $T_0 + \Delta T$ に熱し、その後も $T_0 + \Delta T$ に保ち続けた、というシチュエーションでの棒の温度分布の変化を調べたい。この場合、

$$\text{初期条件} \quad f(x, 0) = T_0 \quad (1.5.4)$$

$$(t > 0 \text{ における}) \text{境界条件} \quad T(0, t) = T_0 + \Delta T, \quad T(\infty, t) = T_0 \quad (1.5.5)$$

を与える。すると、式 (1.5.1) は、

$$T(x, t) = T_0 + \Delta T - \Delta T \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) \quad (1.5.6)$$

という解^{†5}を持つことが知られている。図 1.8 にこの解を示した。温度分布の曲線が滑らかになるように、熱が棒を伝わっていく様子が分かる。

これらの例のように、拡散方程式は場の量に、その空間分布の尖った部分を均して、広げるような方向の時間変化をもたらす性質がある。この性質を拡散と言う。一般に、空間スケール L を拡散するのにかかる時間スケール τ_d は拡散時間と呼ばれ、拡散係数 D を用いて

$$\tau_d = \frac{L^2}{D} \quad (1.5.7)$$

と見積もれる。

拡散方程式を考える際に併せて有用な概念である、ランダムウォークについて説明する。1次元空間において仮想的な粒子を考える。時刻 $t = 0$ に点 $x = 0$ にいた粒子は、決まった時間 δt だけ経つと $x = \delta x$ か $x = -\delta x$ に移動する。ただし、どちらの位置にいるかは等確率である。点 $x = \delta x$ にいる粒子は、更に時間 δt だけ経過すると、 $x = 2\delta x$ か $x = 0$ に移動する。1度の時間ステップで必ず $\pm\delta x$ だけ移動する。つまり、ある時刻に $x = 0$ にいた粒子は、時間 $2\delta t$ 後にはそれぞれ $1/4$ の確率で $x = -2\delta x$ か $x = 2\delta x$ に、 $1/2$ の確率で $x = 0$ にいる。このような粒子の動き方のルールをランダムウォークと言う。同じ $\delta t, \delta x$ についてのランダムウォークに従う多数の粒子から成る集団を考える。時刻 t に位置 x にいる粒子の数を $f(x, t)$ と書く。時刻 $(t + \delta t)$ に位置 x にいる粒子は時刻 t には位置 $(x - \delta x)$ か $(x + \delta x)$ にいた粒子なので、

$$f(x, t + \delta t) = \frac{1}{2}f(x - \delta x, t) + \frac{1}{2}f(x + \delta x, t) \quad (1.5.8)$$

^{†5} $\operatorname{erf}(x)$ は誤差関数と呼ばれる関数で、

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds$$

である。

が成り立つ。両辺に $-f(x, t)$ を加えて δt で割ると、

$$\frac{f(x, t + \delta t) - f(x, t)}{\delta t} = \frac{\delta x^2}{2\delta t} \frac{f(x + \delta x, t) - 2f(x, t) + f(x - \delta x, t)}{\delta x^2} \quad (1.5.9)$$

$$= \frac{\delta x^2}{2\delta t} \left(\frac{f(x + \delta x, t) - f(x, t)}{\delta x} - \frac{f(x, t) - f(x - \delta x, t)}{\delta x} \right) \frac{1}{\delta x} \quad (1.5.10)$$

となる。 $\delta x, \delta t$ が十分に小さい場合、この式は

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.5.11)$$

に相当するので、ランダムウォークに従う粒子集団の分布関数 $f(x, t)$ の時間発展は拡散方程式に従う、すなわち拡散的な挙動を示すことが分かる。拡散係数 D は、粒子の速度 $c = \delta x / \delta t$ を導入すると、

$$D = \frac{\delta x^2}{2\delta t} = \frac{c\delta x}{2} \quad (1.5.12)$$

と書ける^{†6}。

拡散方程式の 3 次元への自然な拡張が

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\nabla^2 T \quad (1.5.13)$$

である。よって、ラプラシアンが流体の支配方程式に現れたら、その項は場を拡散させる性質を持つ項だとイメージできる。

1.5.2 ポアソン方程式とグリーン関数

各点 \mathbf{x} での重力加速度を $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ という時間によらない関数を用いて考えることで、重力もニュートン力学の範囲においてベクトル場として考えることができる。このとき、

$$\mathbf{g} = -\nabla\phi_g \quad (1.5.14)$$

というように重力ポテンシャル $\phi_g(\mathbf{x})$ を導入すると、この $\phi_g(\mathbf{x})$ は

$$\nabla^2\phi_g = 4\pi G\rho \quad (1.5.15)$$

という偏微分方程式に従う。 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ は重力定数である。この形の方程式はポアソン方程式と呼ばれる。前節の拡散方程式は場の量の時間発展を求める式だったのに対し、この方程式は重力場の空間分布を求める式である。右辺の質量密度分布 $\rho(\mathbf{x})$ と考えてい

^{†6} ここでは 1 次元での考察だったが、3 次元の場合にも、粒子が進路を変えるまでに進む空間ステップ (平均自由行程) を l 、粒子の速度を c とし、拡散係数は $D = cl$ のオーダーと見積もられる。

る領域の境界での重力場の条件が与えられると、左辺の重力ポテンシャル、すなわち重力場がこの式に従って決定される。

特に、無限遠で $\phi_g = 0$ となるという境界条件のときには、グリーン関数法という手法が有力である。一般に空間微分を含む演算子 $\mathcal{D}(\partial/\partial x_i, x_i)$ に対して、

$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, x_i\right) G(\mathbf{x}) = \delta^3(\mathbf{x}) \quad (1.5.16)$$

という微分方程式の解 $G(\mathbf{x})$ を、この微分演算子 $\mathcal{D}(\partial/\partial x_i, x_i)$ に対するグリーン関数と言う。ただし、 $\delta(x)$ はデルタ関数である。デルタ関数については付録 1.C.7 を参照されたい。3つのデルタ関数の積 $\delta(x)\delta(y)\delta(z)$ を $\delta^3(\mathbf{x})$ と書いている。グリーン関数が求めれば、与えられた $\rho(\mathbf{x})$ に対する非斉次の方程式

$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, x_i\right) \phi(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) \quad (1.5.17)$$

の解 $\phi(\mathbf{x})$ は

$$\phi(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' \quad (1.5.18)$$

と求まる。座標 \mathbf{x} ではなく \mathbf{x}' で体積分していることを明示するために $d^3 \mathbf{x}'$ という記号を用いた。ポアソン方程式 (1.5.15) に対する、無限遠で ϕ_g がゼロになるという境界条件の下でのグリーン関数は

$$G(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \quad (1.5.19)$$

であることが知られている^{†7}。つまり、同境界条件の下でのポアソン方程式 (1.5.15) の解は

$$\phi_g(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}' \quad (1.5.20)$$

と書ける。更に、 \mathbf{x} についての偏微分と \mathbf{x}' についての体積分は可換なことに注意して重力加速度を計算すると、

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = - \int \frac{G\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}' \quad (1.5.21)$$

となり、ポアソン方程式が「点 \mathbf{x} での重力は逆 2 乗則に従って点 \mathbf{x}' から受ける力の重ね合わせである」という法則を表現していることが分かる。

^{†7} 一方で、2次元ポアソン方程式に対するグリーン関数は

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \log \left[\sqrt{x^2 + y^2} \right]$$

である。

1.5.3 保存則とフラックス

あるスカラー場 $f(\mathbf{x}, t)$ と速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ が、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\mathbf{v}) = 0 \quad (1.5.22)$$

という偏微分方程式で記述される法則に従っているとき、この法則をスカラー場 f の保存則と呼ぶ。この式を観測系に固定された適当な領域 V で積分すると、ガウスの発散定理を使って、

$$\frac{d}{dt} \int_V f dV + \int_{\partial V} (f\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.5.23)$$

となる。第 1 項は、領域 V 内の f の総量の時間変化と解釈できる。 $f\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ は、流れ場 \mathbf{v} に乗って領域 V の表面から単位時間・面積要素あたりに流出する量と解釈できるので、第 2 項は、領域 V の表面から流れに乗って流出する f の正味量と考えられる。 $f\mathbf{v}$ を f の (移流による) フラックスと言う。つまり、この式は、任意の領域から流出した分だけその領域内の f の総量が減るという性質を表したものであり、 f は領域内で湧き出すことも消滅することもないことを表している。

保存則の基本形は式 (1.5.22) の形だが、考える場の量の特徴によって更に項が加えられることになる。その際の付加項はフラックスと源泉に分類できる。上で $f\mathbf{v}$ が移流によるフラックス、すなわち流体の流れに乗って流出する分のフラックスであると説明したが、流れが無くとも f の流出が起きる場合は、そのフラックスを表す項が加わる。具体的には、そのフラックスを \mathbf{q} とし、左辺に $+\nabla \cdot \mathbf{q}$ (右辺に $-\nabla \cdot \mathbf{q}$) が付加される。一方で、外力のように、隣の流体粒子とのやりとりが無くとも f が湧き出す性質を表現するために、フラックスとは異なる形式の項が付加される。

保存則に関連して、次の定理がある。式 (1.5.23) で観測系 (座標系) に固定された領域での積分を考えた。対して、流体に固定され、流体と共に速度場 \mathbf{v} で動くような領域 $\hat{V}(t)$ での積分を考える。このとき、恒等的に次式が成り立つ。

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}(t)} f dV = \int_{\hat{V}(t)} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\mathbf{v}) \right] dV \quad (1.5.24)$$

これをレイノルズの輸送定理という。詳しい導出は後から述べる。上式を見ると、保存則 (1.5.22) は流体に固定された領域内での総量に変化しないことを表していると分かる。領域が流体と共に移動すれば、移流による領域内への流入や流出は当然起きない。

特に、保存量 f が質量密度 ρ と単位質量あたりの量 ϕ の積で表されているとき、保存則 (1.5.22) の左辺、あるいは式 (1.5.24) の右辺の被積分関数は、節 3.1 で説明する質量保存則を用いて、常に次式のように書き換えられる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho\phi\mathbf{v}) = \rho \frac{D\phi}{Dt} \quad (1.5.25)$$

以下、レイノルズの輸送定理の具体的な説明をする。式 (1.5.24) の左辺は次の意味である。

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}(t)} f d^3x = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{\hat{V}(t+\delta t)} f(\mathbf{x}, t + \delta t) d^3x - \int_{\hat{V}(t)} f(\mathbf{x}, t) d^3x \right] \quad (1.5.26)$$

上式の第 1 項は、座標系 x_i を積分変数として時刻 $(t + \delta t)$ における領域 $\hat{V}(t + \delta t)$ で積分したものである。時刻 $(t + \delta t)$ に座標 x_i にいる流体粒子が時刻 t のときにいた位置を x'_i としたとき、この x_i と x'_i を結ぶ座標変換を考える。第 1 項の積分変数をそのように変換すれば、積分領域は第 2 項と同じ $\hat{V}(t)$ になる。 x_i と x'_i は次の関係にある。

$$x_i = x'_i + v_i \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2) \quad (1.5.27)$$

また、積分の体積要素は変数変換によってヤコビアン倍されるという定理がある。

$$d^3x = J d^3x' \quad (1.5.28)$$

$$J = \begin{vmatrix} \partial x / \partial x' & \partial x / \partial y' & \partial x / \partial z' \\ \partial y / \partial x' & \partial y / \partial y' & \partial y / \partial z' \\ \partial z / \partial x' & \partial z / \partial y' & \partial z / \partial z' \end{vmatrix} \quad (1.5.29)$$

$$= 1 + \frac{\partial v_j}{\partial x'_j} \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2) \quad (1.5.30)$$

よって、式 (1.5.26) の第 1 項は、 δt について 2 次以上の項を無視すると、次のように書ける。

$$\int_{\hat{V}(t+\delta t)} f(\mathbf{x}, t + \delta t) d^3x = \int_{\hat{V}(t)} f(\mathbf{x}' + \mathbf{v} \delta t, t + \delta t) J d^3x' \quad (1.5.31)$$

$$= \int_{\hat{V}(t)} \left[f(\mathbf{x}', t) + \frac{\partial f}{\partial x'_i} v_i \delta t + \frac{\partial f}{\partial t} \delta t \right] \left(1 + \frac{\partial v_j}{\partial x'_j} \delta t \right) d^3x' \quad (1.5.32)$$

$$= \int_{\hat{V}(t)} \left[f(\mathbf{x}', t) + \frac{\partial f}{\partial x'_i} v_i \delta t + \frac{\partial f}{\partial t} \delta t + f \frac{\partial v_j}{\partial x'_j} \delta t \right] d^3x' \quad (1.5.33)$$

上式の積分変数 x'_i を x_i と書き換え、式 (1.5.26) に代入すると、最終的に式 (1.5.24) を得る。

1.5.4 数値的解法

MHD ではいくつかの保存則を連立させて考えることになるが、単純なシチュエーションでない限り解析的に解くことは難しいので、実際には漸近的 (asymptotic)、すなわち都合の良い極限を考えて寄与の小さい項を無視することで方程式を評価するか、或いは数値的 (numerical) に解くことで現象をコンピューター上で再現し、その計算結果を解析することで本質にある物理を理解するという問題解決の手法がとられる。本書では実用的な数値計算方法の説明はしないが、どんなことを行っているかある程度知っておくと、計算結果を見る目も変わり、偏微分方程式の意味も深く理解できると思われるので、この節で数値計算の基本的な考え方だけ述べておく。

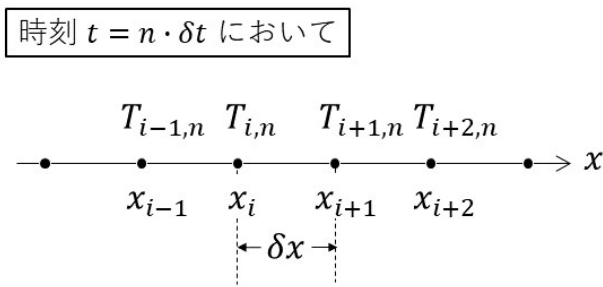


図 1.9 離散グリッドの定義の仕方の例

時間発展式

例えば、拡散方程式 (1.5.1) を解く場合を考える。コンピューターは離散的なデータしか扱えないので、離散化と呼ばれる操作をする。具体的には、まず考える領域を N_x 個のグリッドに分割する。簡単な方法としては、図 1.9 のように、考えている領域で x 軸を N_x 個のグリッドに等分割する。また、時間軸も微小時間 δt 毎に分割し、各時間ステップに $t_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ と名前を付ける。すなわち、時間ステップ t_0 は $t = 0$ のことで、 t_1, t_2 , はそれぞれ $t = \delta t, 2\delta t$ のことである。それぞれのグリッド x_i 、時間ステップ t_n で温度 $T_{i,n}$ を定義する。次に、 x_i での空間微分の計算の仕方を考える。簡単な方法としては、隣のグリッドでの値を使って、

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,n} \simeq \frac{T_{i+1,n} - 2T_{i,n} + T_{i-1,n}}{\delta x^2} \tag{1.5.34}$$

と近似する方法がある。いちばん端のグリッド $i = 1, N_x$ での計算方法は、境界条件を適当に組み込んでケースバイケースで考える。

さて、 $t = 0$ のときの $T(x, 0)$ は、初期条件を離散化することによって、 $T_{i,0} (i = 1, N_x)$ として表せる。すると、前述した方法で計算することで、各グリッドでの式 (1.5.1) の右辺の値が求まる。すると例えば、

$$T_{i,1} = T_{i,0} + \int_0^{\delta t} \frac{\partial T}{\partial t}(x_i, t) dt \tag{1.5.35}$$

$$\simeq T_{i,0} + \delta t \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{i,0} \tag{1.5.36}$$

$$= T_{i,0} + \delta t \cdot (\text{右辺の値})_{i,0} \tag{1.5.37}$$

というように時間積分を近似することで、次の時間ステップでの $T(x, t)$ の値が $T_{i,1} (i = 1, N_x)$ として求まる。後はこの計算を繰り返し行うことで、 $T(x, t)$ の時間発展を計算することができる。

グリッド数 N_x を増やし、時間ステップの幅 δt を小さくすると、より「リアルな」計算結果になるはずだが、やりすぎると、計算に途方もない時間がかかってしまう。実際のシミュレーショ

と書ける。よって \underline{D} の逆行列 \underline{D}^{-1} が求めれば、

$$\vec{\phi} = 4\pi G \underline{D}^{-1} \vec{\rho} \quad (1.5.41)$$

というようにして重力ポテンシャルの分布が計算できる。

付録 1.A 正方行列の基礎知識

$n \times n$ の行列のことを n 次正方行列と言う。このときの n は次数と呼ばれる。正方行列についての基礎知識は度々必要になるので、ここでまとめる。本付録は 齋藤正彦 (1966), 池辺八洲彦 et al. (2009) を参考にした。

1.A.1 逆行列

x, y, z についての次のような連立方程式を解きたい。

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -2 \\ 3x + 2y - z = -1 \end{cases} \quad (1.A.1)$$

この連立方程式は

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1.A.2)$$

という行列と数ベクトルを用いて書くと

$$\underline{A}\vec{x} = \vec{b} \quad (1.A.3)$$

となる。この連立方程式を解いて

$$\begin{cases} x = -4/5 \\ y = 4/5 \\ z = 1/5 \end{cases} \quad (1.A.4)$$

を求めることは、

$$\underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{A}\underline{A}^{-1} = \underline{I} \quad (1.A.5)$$

$$\text{ただし, } \underline{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{は単位行列} \quad (1.A.6)$$

を満たす \underline{A} の逆行列

$$\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3/20 & 1/5 & 1/4 \\ 2/5 & -1/5 & 0 \\ 7/20 & 1/5 & -1/4 \end{pmatrix} \quad (1.A.7)$$

を式 (1.A.3) の両辺に左から掛けて、

$$\vec{x} = \underline{A}^{-1}\vec{b} \quad (1.A.8)$$

$$= \begin{pmatrix} -4/5 \\ 4/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} \quad (1.A.9)$$

を計算することに対応している。

逆行列の性質には次のものがある。

- \underline{A} の逆行列が \underline{A}^{-1} で \underline{B} の逆行列が \underline{B}^{-1} のとき、 \underline{AB} の逆行列は $\underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$

1.A.2 行列の正則性

次のような連立方程式を考える。

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -2 \\ 2x + 4y + 2z = 2 \end{cases} \quad (1.A.10)$$

この連立方程式の 3 段目の式は、1 段目の式を 2 倍したものなので、実質同じ意味の (非独立な) 式である。つまり、変数が 3 つあるのに対して独立した式が 2 つしかないので、この連立方程式を満たす (x, y, z) の組をひとつに決定することはできない。このように、独立した式が 2 つであることは、行列

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.A.11)$$

の階数が 2 であることに対応する。そして、連立方程式の解をひとつに決定できないことは、 \underline{A} の逆行列が存在しないことに対応する。前節の \underline{A} は階数が 3 だったので逆行列が存在した。

一般に、階数が次数に等しい正方行列を正則行列と言う。行列 \underline{A} が正則であることは、次の条件のそれぞれと同値である。

- 逆行列 \underline{A}^{-1} が存在する
- $|\underline{A}| \neq 0$
- \underline{A} の全ての固有値がゼロではない

$|\underline{A}|$ は \underline{A} の行列式と呼ばれるもので、次節で説明する。 \underline{A} の固有値については節 1.A.4 で説明する。

1.A.3 行列式と余因子行列

行列式 (determinant, det) を説明するためにいくつかの概念を導入する。行列の横の並びを行、縦の並びを列と呼ぶ。つまり、行列 \underline{A} の i 行 j 列目の要素を a_{ij} と書くと、行列式は

$$|\underline{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.A.12)$$

と書ける。行列式から、 k 番目の行と m 番目の列を取り去った行列式を小行列式 D_{km} と言う。例えば、上記の行列式 $|\underline{A}|$ の小行列式 D_{21} は

$$D_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad (1.A.13)$$

である。更に、

$$A_{km} = (-1)^{k+m} D_{km} \quad (1.A.14)$$

を余因子と言う。

行列式について説明する。まず、2 次正方行列の行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.A.15)$$

である。3 次の行列式は余因子展開という操作をして計算される。余因子展開を行うときは、まづどの行 (あるいはどの列) で展開するかを任意に決める。例えば 2 行目で展開すると、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \quad (1.A.16)$$

$$= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (1.A.17)$$

となり、3 つの 2 次行列式の計算に帰着する。もっと高次の行列式の場合も、余因子展開を繰り返し行うことで、2 次行列式の計算に帰着できる。

行列式の性質には次のものがある^{†9}。

^{†9} \underline{A}^T は \underline{A} の転置行列を指す。 a^* は a の複素共役という意味で用いる。 \underline{A}^\dagger は \underline{A} の随伴行列、すなわち \underline{A}^T の各要素を複素共役にした行列である。 $\underline{A}^T \underline{A} = \underline{I}$ を満たす実行列を直交行列と言い、 $\underline{U}^\dagger \underline{U} = \underline{U} \underline{U}^\dagger = \underline{I}$ を満たす行列をユニタリ行列と言う。

- 任意の 2 つの行 (列) を入れ替えると行列式の符号が変わる。
- ある行 (またはある列) の要素を全て c 倍すると行列式が c 倍になる。
- 従って行列の要素全てを c 倍すると行列式は c^n 倍になる。
- ある行 (列) を c 倍したものを他の行 (列) に加えても行列式の値は変わらない。
- 行列 \underline{A} が正則でない場合は $|\underline{A}| = 0$
- $|\underline{A}||\underline{B}| = |\underline{AB}|$
- $|\underline{A}^{-1}| = 1/|\underline{A}|$
- 行列式は固有値の積 $|\underline{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$
- $|\underline{A}^T| = |\underline{A}|$
- 実行列 \underline{A} が $\underline{A}^T \underline{A} = \underline{I}$ ならば $|\underline{A}| = \pm 1$
- $|\underline{A}^\dagger| = |\underline{A}|^*$
- $\underline{U}^\dagger \underline{U} = \underline{U} \underline{U}^\dagger = \underline{I}$ ならば $|\underline{U}|$ の絶対値は 1
- 正方行列 \underline{P} が正方行列 $\underline{A}, \underline{D}$ を用いて

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{pmatrix} \quad (1.A.18)$$

と表されている。このとき、 \underline{A} が正則ならば

$$|\underline{P}| = |\underline{A}||\underline{D} - \underline{CA}^{-1}\underline{B}| \quad (1.A.19)$$

であり、 \underline{D} が正則ならば

$$|\underline{P}| = |\underline{D}||\underline{A} - \underline{BD}^{-1}\underline{C}| \quad (1.A.20)$$

である。

余因子に関係ある概念として、余因子行列について説明する。行列 \underline{A} の k 行 m 列目を取り去って得られた余因子を A_{km} と書くとき、 i 行 j 列目の成分が A_{ji} となるような行列 $\tilde{\underline{A}}$ を \underline{A} の余因子行列と言う。添え字の順番に注意して欲しい^{†10}。例えば \underline{A} が 2 次正方行列

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (1.A.21)$$

の場合、 $\tilde{\underline{A}}$ は

$$\tilde{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \quad (1.A.22)$$

となる。余因子行列には次のような性質がある。

^{†10} 日本語の「余因子行列」はこのように、余因子を並べて転置をとった行列として定義されるのが普通である。これは英語の「adjugate matrix」に相当する。一方で英語の「cofactor matrix」は、転置をとらずに (i, j) 成分が i, j 余因子であるとして) 定義された行列を指す。

- 余因子行列 \tilde{A} を A の行列式 $|A| (\neq 0)$ で割ったものは、 A の逆行列である。

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = |A|I \quad (1.A.23)$$

- A が n 次正則行列 ($|A| \neq 0$) の場合、余因子行列 \tilde{A} の行列式は

$$|\tilde{A}| = |A|^{n-1} \quad (1.A.24)$$

である。

- A が対称行列の場合、余因子行列 \tilde{A} も対称行列である。
- A の行列式 $|A|$ を A の n^2 個の成分の関数として見たとき、 $|A|$ を A の i 行 j 列成分 a_{ij} で偏微分したものを並べた行列は、余因子行列 \tilde{A} を転置した行列に一致する。

$$\frac{\partial |A|}{\partial a_{ij}} = (\tilde{A})_{ji} \quad (1.A.25)$$

1.A.4 固有値と固有ベクトル

一般に、 n 次正方行列は固有値というものを n 個持つ。行列の階数が m の場合は、固有値のうち $(n - m)$ 個はゼロである。以下では正則行列に限って話を進める。正則行列の場合、固有値はゼロでない。とある n 次正則行列 A の固有値が $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ だった場合、それぞれの固有値 λ_i に対して、

$$A\vec{x}_i = \lambda_i\vec{x}_i \quad (1.A.26)$$

を満たすゼロでない数ベクトル \vec{x}_i が存在する。これを固有値 λ_i に対する固有ベクトルと言う。逆に固有値以外の複素数に対してはこのような関係を満たす数ベクトルは存在しない。例えば、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.A.27)$$

という行列の固有値は、

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{41} + 1}{2}, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -\frac{\sqrt{41} - 1}{2} \quad (1.A.28)$$

の 3 つである^{†11}。値の大きい順に並べた。この場合は固有値が全部実数だが、一般には複素数となる。それぞれの固有値 λ_i に対する固有ベクトルは

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ (\sqrt{41}-3)/4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -(\sqrt{41}+3)/4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.A.29)$$

である。実際に計算してみると式 (1.A.26) の関係を満たすことが分かる。上記の固有ベクトルの定数倍のベクトルもまた、同じ固有値に対する固有ベクトルである。

次のような行列 B を考える。

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (1.A.30)$$

この行列の固有値は次の通りである。

$$\lambda_1 = 8, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -1 \quad (1.A.31)$$

λ_2, λ_3 は同じ値になっている。このように、複数の固有値が同じ値になることを縮退と言う。上記の場合、「固有値 -1 は縮退していて、その縮退度 (重複度) は 2 である」と表現される。固有値 8 に対する固有ベクトルは

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (1.A.32)$$

とその定数倍のベクトルである。一方で、固有値 -1 の固有ベクトルは、例えば

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.A.33)$$

という 2 つの線形独立^{†12}なベクトルが見つかる。すると、この 2 つのベクトルの任意の線形結合

$$\alpha\vec{x}_2 + \beta\vec{x}_3 \quad (1.A.34)$$

^{†11} 一般に n 次正方行列 A の固有値は、特性方程式

$$|A - \lambda I| = 0$$

の解になる。前節で説明した方法でこの式を計算すると、 λ についての n 次方程式に帰着するので、重解もその重複度を数えることにすると、固有値 λ が n 個求まる。例えば付録 1.D.4 でも固有値の概念を用いることになるが、実用の場合は 1000 次やもっと高次の行列の固有値や固有ベクトルを、コンピューターを使って数値的に求めることになる。

^{†12} 一般にベクトルの組 $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k\}$ を考えたとき、組の中のどのベクトルも他のベクトルの線形結合で

$$\vec{x}_1 = \alpha\vec{x}_2 + \beta\vec{x}_3 + \dots$$

というように表せない場合、このベクトルの組は互いに線形独立であると言う。

も、固有値 -1 に対する固有ベクトルとなる。

次に、

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.A.35)$$

という行列 \underline{C} を考える。この行列の固有値は 1 と 2 (縮退度 2) である。固有値 1 に対する固有ベクトルは

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1.A.36)$$

とその定数倍のベクトルである。固有値 2 に対する固有ベクトルは、

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.A.37)$$

とその定数倍のベクトルだけである。

まとめると、ある固有値が縮退している場合、その固有値に対する固有ベクトルは最大で縮退度の数だけの線形独立な組が見つかる (\underline{B} の場合) が、縮退度より小さい数の組しか存在しないこと (\underline{C} の場合) もある。線形独立な組が見つかった場合は、それらの任意の線形結合もまた、その固有値に対する固有ベクトルである。異なる値の固有値に対する固有ベクトルは互いに線形独立である。

固有値や固有ベクトルの性質には次のようなものがある。

- (既に述べたが) 行列式は固有値の積である。 $|\underline{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$
- トレース (行列の対角成分の和) は固有値の総和に等しい。
- \underline{A} の逆行列 \underline{A}^{-1} が存在する場合、 \underline{A} の固有値のひとつ λ に対する固有ベクトル \vec{x} は、 \underline{A}^{-1} の固有ベクトルでもあり、この固有ベクトルに対応する \underline{A}^{-1} の固有値は $1/\lambda$ である。
- 転置行列 (\underline{A}^T) の固有値はもとの行列 \underline{A} の固有値でもある。
- 実対称行列 ($\underline{A}^T = \underline{A}$ で各成分が全て実数の行列 \underline{A}) の固有値は実数であり、異なる値の固有値に対する固有ベクトルは直交する。
- 実対称行列の場合、固有値に縮退があった場合でも必ず縮退度の数だけの線形独立な組の固有ベクトルが見つかるので、任意の実対称行列の固有ベクトルによって n 次元ベクトル空間の正規直交基底を構成することができる。
- 直交行列 ($\underline{A}^T \underline{A} = \underline{I}$ を満たす実行列 \underline{A}) の固有値は ± 1 である。
- 随伴行列 \underline{A}^\dagger の固有値は \underline{A} の固有値の複素共役である。
- 正規行列 ($\underline{A}^\dagger \underline{A} = \underline{A} \underline{A}^\dagger$ を満たす行列 \underline{A}) の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する。

- エルミート行列 ($\underline{H}^\dagger = \underline{H}$ を満たす行列 \underline{H}) の固有値は実数である。
- ユニタリ行列 ($\underline{U}^\dagger \underline{U} = \underline{U} \underline{U}^\dagger = \underline{I}$ を満たす行列 \underline{U}) の固有値は絶対値が 1 の複素数である。
- 実対称行列 \underline{A} 、またはエルミート行列 \underline{H} について、全ての固有値が正であるものを正定値行列、全ての固有値が非負であるものを半正定値行列と言う。正定値の実対称行列は、ゼロでない任意の実縦数ベクトル \underline{v} に対する二次形式 $\underline{v}^T \underline{A} \underline{v}$ が正になる。半正定値の場合は非負になる。正定値または半正定値のエルミート行列の場合は、複素縦数ベクトル \underline{v} に対する二次形式 $\underline{v}^\dagger \underline{H} \underline{v}$ が同じ性質を満たす。

1.A.5 対角化とジョルダン標準形

対角化

正則行列 \underline{A} の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とする。前節の $\underline{A}, \underline{B}$ のような場合において、各固有値に対する固有ベクトル $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ を横に並べた行列

$$\underline{P} = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n) \quad (1.A.38)$$

を考える。例えば λ_2 と λ_3 が縮退している場合は、線形独立な任意の 2 つの固有ベクトルを $\underline{x}_2, \underline{x}_3$ とする。このとき、

$$\underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (1.A.39)$$

となる。この操作のことを対角化と言う。前節の \underline{C} のような場合は対角化ができない。逆に表すと

$$\underline{A} = \underline{P} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \underline{P}^{-1} \quad (1.A.40)$$

となる。

行列 \underline{A} を対角化したときの対角行列を \underline{D} と書くことにすると、行列 \underline{A} の階乗は

$$\underline{A}^k = \underline{A}\underline{A}\dots\underline{A} \quad (1.A.41)$$

$$= \underline{P}\underline{D}\underline{P}^{-1}\underline{P}\underline{D}\underline{P}^{-1}\underline{P}\dots\underline{P}^{-1}\underline{P}\underline{D}\underline{P}^{-1} \quad (1.A.42)$$

$$= \underline{P}\underline{D}^k\underline{P}^{-1} \quad (1.A.43)$$

$$= \underline{P} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \underline{P}^{-1} \quad (1.A.44)$$

と書ける。

ジョルダン標準形

一般に、ある正則行列 \underline{P} が存在して、正方行列 \underline{A} を

$$\underline{P}^{-1}\underline{A}\underline{P} = \underline{B} \quad (1.A.45)$$

と変換できるとき、 \underline{A} と \underline{B} は相似であると言い、この変換を相似変換と言う。

前節の \underline{C} のように、固有値の縮退数の数だけ固有ベクトルを持たない行列は、対角行列と相似ではない (対角化できない)。しかし、任意の正方行列に対し、対角行列を一般化したジョルダン標準形というものを考えることができる。

まず、次の形の k 次正方行列を考える。

$$\underline{J}(\lambda, k) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (1.A.46)$$

特に、

$$\underline{J}(\lambda, 1) = (\lambda), \quad \underline{J}(\lambda, 2) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \underline{J}(\lambda, 3) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (1.A.47)$$

である。これを固有値 λ に対する k 次のジョルダン細胞と言う。様々な固有値に対するジョルダン細胞を対角に並べた次の n 次正方行列をジョルダン行列と言う。

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} \underline{J}(\lambda_1, k_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \underline{J}(\lambda_2, k_2) & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \underline{J}(\lambda_s, k_s) \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=1}^s k_i = n \quad (1.A.48)$$

各々の λ_i の中には、互いに等しいものもあるかもしれない。このとき、次の定理が言える。

- 任意の正方行列 \underline{A} に対して、それに相似なジョルダン行列 \underline{J} が (ジョルダン細胞の並べ方の任意性を除いて) 唯一つ存在する。

このときの \underline{J} を \underline{A} のジョルダン標準形と言う。同じジョルダン標準形を持つ行列は、互いに相似である。特に、対角化可能な行列のジョルダン標準形は、上で述べた対角行列である。

変換行列について

ある n 次正方行列 \underline{A} が、正則行列 \underline{P} によって、ジョルダン細胞に相似変換されたとする。

$$\underline{P}^{-1}\underline{A}\underline{P} = \underline{J}(\lambda, n) \iff \underline{A}\underline{P} = \underline{P}\underline{J}(\lambda, n) \quad (1.A.49)$$

変換行列 \underline{P} の k 番目の列ベクトルを \vec{x}_k と書く。

$$\underline{P} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) \quad (1.A.50)$$

このとき、式 (1.A.49) を具体的に書き下すことで、次の関係が言える。

$$\underline{A}\vec{x}_1 = \lambda\vec{x}_1 \quad (1.A.51)$$

$$\underline{A}\vec{x}_k = \vec{x}_{k-1} + \lambda\vec{x}_k \quad (k = 2, 3, \dots, n) \quad (1.A.52)$$

つまり、 \vec{x}_1 は \underline{A} の固有値 λ に対する固有ベクトルである。ジョルダン標準形が複数のジョルダン細胞から成る場合は、それぞれの細胞に対してこのことが成り立つ。逆に言うと、 \underline{A} の固有ベクトルが縮退度の数だけ求まらなかった場合、それぞれの固有ベクトルに対して式 (1.A.52) の関係を満たすベクトルを逐次探索し、見つかったものを並べることで、変換行列 \underline{P} が求まる。

\underline{A} が与えられたときに、そのジョルダン標準形がいくつの細胞から成るのかを考察する際には、次の定理が役に立つ。

- 固有時 λ に対する次数 k 以上のジョルダン細胞の個数は

$$\text{rank}[(\underline{A} - \lambda\underline{I})^{k-1}] - \text{rank}[(\underline{A} - \lambda\underline{I})^k] \quad (1.A.53)$$

である。

ここで、 rank はその行列の階数を指し、 $\text{rank}[(\underline{A} - \lambda\underline{I})^0]$ は \underline{A} の次数に等しい。

1.A.6 行列指数関数

n 次正方行列 \underline{A} の指数関数 $\exp(\underline{A})$ は、普通の指数関数のテイラー展開に倣って次のように定義される。

$$\exp(\underline{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underline{A}^k \quad (1.A.54)$$

つまり、 $\exp(\underline{A})$ もまた n 次正方行列である。単位行列を \underline{I} 、ゼロ行列を $\underline{0}$ と書くと、次のような性質がある。

- $\exp(\underline{0}) = \underline{I}$
- $\exp(a\underline{X}) \exp(b\underline{X}) = \exp[(a + b)\underline{X}]$
- $\exp(\underline{X}) \exp(-\underline{X}) = \underline{I}$
- $\underline{XY} = \underline{YX}$ ならば $\exp(\underline{X}) \exp(\underline{Y}) = \exp(\underline{Y}) \exp(\underline{X}) = \exp(\underline{X} + \underline{Y})$
- \underline{Y} が正則ならば $\exp(\underline{YXY}^{-1}) = \underline{Y} \exp(\underline{X}) \underline{Y}^{-1}$
- $\exp(\underline{X}^T) = [\exp(\underline{X})]^T$
- $\exp(\underline{X}^\dagger) = [\exp(\underline{X})]^\dagger$
- $|\exp(\underline{X})| = \exp(\text{Tr}[\underline{X}])$ (Tr はトレースの意)
- \underline{X} が定数行列のとき、 $[\exp(t\underline{X})]' = \underline{X} \exp(t\underline{X})$

対角化可能な行列の場合

t を任意の実数とする。5 番目の性質より、 $\underline{D} = \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P}$ と対角化可能な行列 \underline{A} に対しては

$$\exp(t\underline{A}) = \underline{P} \underline{P}^{-1} \exp(t\underline{A}) \underline{P} \underline{P}^{-1} \tag{1.A.55}$$

$$= \underline{P} \exp(t\underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P}) \underline{P}^{-1} \tag{1.A.56}$$

$$= \underline{P} \exp(t\underline{D}) \underline{P}^{-1} \tag{1.A.57}$$

$$= \underline{P} \left(\underline{I} + t\underline{D} + \frac{t^2}{2!} \underline{D}^2 + \dots \right) \underline{P}^{-1} \tag{1.A.58}$$

$$= \underline{P} \begin{pmatrix} 1 + t\lambda_1 + \frac{t^2}{2!} \lambda_1^2 + \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 1 + t\lambda_2 + \frac{t^2}{2!} \lambda_2^2 + \dots & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix} \underline{P}^{-1} \tag{1.A.59}$$

$$= \underline{P} \begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \exp(t\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \exp(t\lambda_n) \end{pmatrix} \underline{P}^{-1} \tag{1.A.60}$$

となることが分かる。また \underline{A} と $\exp(\underline{A})$ が同じ行列 \underline{P} によって対角化されていることから、次のことも言える。

- \underline{A} の固有値 λ_i に対する固有ベクトルは $\exp(\underline{A})$ の固有ベクトルでもあり、それに対する $\exp(\underline{A})$ の固有値は $\exp(\lambda_i)$ である。

対角化不可能な行列の場合

対角化不可能な行列 \underline{A} に対する $\exp(t\underline{A})$ は、ジョルダン標準形を利用することで、次のように計算できる。

$\underline{P}^{-1}\underline{A}\underline{P} = \underline{J}$ とジョルダン標準形に変換できる場合、

$$\exp(t\underline{A}) = \underline{P} \exp(t\underline{J}) \underline{P}^{-1} \tag{1.A.61}$$

$$= \underline{P} \begin{pmatrix} \exp[t\underline{J}(\lambda_1, k_1)] & & & & \\ & \exp[t\underline{J}(\lambda_2, k_2)] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \exp[t\underline{J}(\lambda_s, k_s)] \end{pmatrix} \underline{P}^{-1} \tag{1.A.62}$$

となるので、各々のジョルダン細胞の指数関数を計算する問題に帰着する。ジョルダン細胞は次のように分解できる^{†13}。

$$\underline{J}(\lambda, k) = \lambda \underline{I} + \underline{N}, \quad \underline{N}^k = \underline{0} \tag{1.A.63}$$

単位行列は全ての行列と可換なことに注意すると、上述した指数関数の 4 番目の性質が使える。また、 \underline{N} の指数関数は有限和で表される。よって、次のように計算できる。

$$\exp[t\underline{J}(\lambda, k)] = \exp(t\lambda \underline{I}) \exp(t\underline{N}) \tag{1.A.64}$$

$$= \exp(t\lambda) \sum_{m=0}^{k-1} \frac{t^m}{m!} \underline{N}^m \tag{1.A.65}$$

$$= \exp(t\lambda) \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! & t^3/3! & \cdots & t^{k-1}/(k-1)! \\ 0 & 1 & t & t^2/2! & \ddots & t^{k-2}/(k-2)! \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & t^2/2! \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.A.66}$$

エルミート行列について

上述した指数関数の 4 番目と 7 番目の性質より、 \underline{H} がエルミート行列 ($\underline{H} = \underline{H}^\dagger$) ならば

$$\exp(i\underline{H})[\exp(i\underline{H})]^\dagger = \exp(i\underline{H}) \exp(-i\underline{H}^\dagger) \tag{1.A.67}$$

$$= \exp[i(\underline{H} - \underline{H}^\dagger)] \tag{1.A.68}$$

$$= \underline{I} \tag{1.A.69}$$

^{†13} この式の \underline{N} のように、 $\underline{A}^k = \underline{0}$ となる有限の k が存在する行列をべき零行列と言う。ある行列がべき零行列である必要十分条件は、固有値が全てゼロであること。

となり^{†14}、 $\exp(iH)$ はユニタリ行列であることが分かる。逆に任意のユニタリ行列 ($U^\dagger U = UU^\dagger = I$) は、その U に対して

$$U = \exp(iH) \quad (1.A.70)$$

となるようなエルミート行列を持つことが少しの考察から分かる。このことは付録 5.B で説明する量子力学において重要になるので、次節で詳しく説明する。

1.A.7 エルミート行列とユニタリ行列

先ほどから度々出てきているが、エルミート行列 H とは

$$H = H^\dagger \quad (1.A.71)$$

を満たす行列である。ただし、 H^\dagger は H の成分の複素共役をとって転置した行列で、 H の随伴行列と呼ばれる。一方で、ユニタリ行列とは

$$U^\dagger U = I \quad (1.A.72)$$

を満たす行列である。例えば

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \quad (1.A.73)$$

はそれぞれエルミート行列、ユニタリ行列である。エルミート行列 H とユニタリ行列 U はそれぞれ次のような性質を持つ。

- $H^\dagger H = HH^\dagger$
- 任意の縦数ベクトル \vec{x}, \vec{y} に対して $(H\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, H\vec{y})$ ^{†15}
- H の固有値は全て実数である。
- H の異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交する。
- 2つのエルミート行列 A, B が可換 ($AB = BA$) ならば、 A の固有ベクトルは B の固有ベクトルでもある。
- 任意の縦数ベクトルに対して $(U\vec{x}, U\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$
- 従って任意の縦数ベクトル \vec{x} に対して $|U\vec{x}| = |\vec{x}|$ ^{†16}
- U の列ベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ は正規直交基底をなす^{†17}。

^{†14} 任意のエルミート行列は正規行列 ($HH^\dagger = H^\dagger H$) なので、4 番目の性質が適用できる。

^{†15} 縦数ベクトル \vec{x}, \vec{y} に対して、 \vec{x} の成分の複素共役をとって横向きにしたものを \vec{y} の左から乗じた複素数を \vec{x} と \vec{y} の内積と言ひ、 (\vec{x}, \vec{y}) と書く。一般には正方行列 A に対して $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A^\dagger \vec{y})$ となる。

^{†16} 縦数ベクトル \vec{x} のノルムは $|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$ と定義される。

^{†17} つまり、 \vec{u}_i は互いに直交し、そのノルムは全て 1 で、 n 次元の任意の縦数ベクトルは \vec{u}_i の 1 次結合で表すことができる。

$\underline{A}\underline{A}^\dagger = \underline{A}^\dagger\underline{A}$ を満たす行列を正規行列と言うが、既に述べたように、エルミート行列もユニタリ行列も正規行列である。正規行列には次のような性質がある。

- 正規行列 \underline{A} はユニタリ行列 \underline{U} によって対角化できる。つまり $\underline{U}^{-1}\underline{A}\underline{U}$ が対角行列となるようなユニタリ行列 \underline{U} が存在する。

つまり、あるユニタリ行列 \underline{U} を考えると、別のユニタリ行列 \underline{V} を使って $\underline{D} = \underline{V}^{-1}\underline{U}\underline{V}$ と対角化できる。このときの対角行列 \underline{D} もまたユニタリ行列であることは少しの計算から分かる。つまり

$$\underline{D}^\dagger\underline{D} = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\lambda_2|^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} = \underline{I} \quad (1.A.74)$$

なので、実数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ を使って

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \exp(i\theta_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp(i\theta_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \exp(i\theta_n) \end{pmatrix} = \exp(i\underline{\Theta}) \quad (1.A.75)$$

と表せる。よって

$$\underline{U} = \underline{V}\underline{D}\underline{V}^{-1} \quad (1.A.76)$$

$$= \underline{V}\exp(i\underline{\Theta})\underline{V}^{-1} \quad (1.A.77)$$

$$= \exp(i\underline{V}\underline{\Theta}\underline{V}^{-1}) \quad (1.A.78)$$

$$= \exp(i\underline{H}) \quad (1.A.79)$$

となる。ここで新たに導入した行列 $\underline{H} = \underline{V}\underline{\Theta}\underline{V}^{-1}$ は

$$\underline{H}^\dagger = (\underline{V}\underline{\Theta}\underline{V}^{-1})^\dagger \quad (1.A.80)$$

$$= (\underline{V}^{-1})^\dagger\underline{\Theta}^\dagger\underline{V}^\dagger \quad (1.A.81)$$

$$= \underline{V}\underline{\Theta}\underline{V}^{-1} \quad (1.A.82)$$

$$= \underline{H} \quad (1.A.83)$$

を満たすのでエルミート行列だと分かる。

付録 1.B ベクトル場とテンソル場

デカルト座標や極座標、円筒座標で定義されるベクトル場やテンソル場とは、どのような量であるのかについて説明する。ただし、この付録では、基底の回転変換に対する変換性によって定

義されるベクトルやテンソルについて説明する。非相対論的な議論においてそう呼ばれる量は普通、この付録で説明している量のことを指す。対して、一般座標変換に対する変換性によって定義される相対論的な意味でのテンソルについては節 7.1 で説明する。第 2 章以降様々な偏微分方程式が出てくるが、それらの方程式を円筒座標や極座標で書き下すときには、空間微分の形がデカルト座標とは異なる。これらの座標系でのベクトルやテンソルの微分をどのようにして考えれば良いのかについても説明する。最後に実際の空間微分の形を公式集としてまとめる。行列の基礎知識については適宜付録 1.A も参考にして欲しい。

1.B.1 ベクトル場の変換性

円筒座標 (r, ϕ, z) 、極座標 (r, θ, ϕ) とは、デカルト座標 (x, y, z) とそれぞれ次のような関係にある座標系である。

$$\text{円筒座標} \quad \begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad (1.B.1)$$

$$\text{極座標} \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1.B.2)$$

これらの座標系での基底^{†18}とデカルト座標の基底の間には、

$$\text{円筒座標} \quad \begin{cases} \hat{r} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} \\ \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases} \quad (1.B.3)$$

$$\text{極座標} \quad \begin{cases} \hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \\ \hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \\ \hat{\phi} = -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y} \end{cases} \quad (1.B.4)$$

という関係がある。円筒座標や極座標の基底は考える点によって向きが異なるが、各点において各基本ベクトルは互いに直交する。このような座標系を直交曲線座標と言う。直交曲線座標の基底は各点において、デカルト座標の基底を適切な向きに回転させることで得られる。つまり、式 (1.B.4) は

$$\underline{R}^{-1} = \underline{R}^T, \quad |\underline{R}| = 1 \quad (1.B.5)$$

^{†18} ここで基底の定義を求めると話がややこしくなる。第 7 章以外では次のようなベクトルの組を基底と呼ぶ。例えば極座標のある点で θ が増える方向を向いた単位ベクトルを θ 方向の基本ベクトル $\hat{\theta}$ と呼んだ場合、各座標 r, θ, ϕ 方向を向いた基本ベクトルの組 $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$ が基底である。これは極座標や円筒座標においては、第 7 章で考える基底とは異なる概念であることに注意が必要である (518 ページの脚注も参照)。

を満たすような回転行列 \underline{R} と横配列を用いて

$$(\hat{r} \quad \hat{\theta} \quad \hat{\phi}) = (\hat{x} \quad \hat{y} \quad \hat{z}) \underline{R} \quad (1.B.6)$$

と表される。 \underline{R} は考える点によって異なる成分を持つ。以後デカルト座標から極座標への変換を例に話を進めるが、円筒座標への変換や、座標軸の向きが異なるデカルト座標への変換などでも同様のことが言える。

ベクトル場 \mathbf{Q} を成分表示するとは、各点において

$$\mathbf{Q} = (\hat{x} \quad \hat{y} \quad \hat{z}) \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \quad (1.B.7)$$

というように、基底で展開することを意味する。式 (1.B.6) より

$$\mathbf{Q} = (\hat{r} \quad \hat{\theta} \quad \hat{\phi}) \begin{pmatrix} Q_r \\ Q_\theta \\ Q_\phi \end{pmatrix} = (\hat{x} \quad \hat{y} \quad \hat{z}) \underline{R} \begin{pmatrix} Q_r \\ Q_\theta \\ Q_\phi \end{pmatrix} \quad (1.B.8)$$

と書け、右辺はデカルト座標での成分表示に他ならないので、 \mathbf{Q} の成分は各点において

$$\begin{pmatrix} Q_r \\ Q_\theta \\ Q_\phi \end{pmatrix} = \underline{R}^T \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \quad (1.B.9)$$

と変換することが分かる。逆に、基底の回転変換に対してこのような変換性を持つ量がベクトル場であるということもできる。

2つのベクトル場 \mathbf{U}, \mathbf{V} の内積とは、同じ点で2つのベクトル場を成分表示したときに、

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = U_i V_j \hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}_j \quad (1.B.10)$$

$$= U_i V_j \delta_{ij} \quad (1.B.11)$$

$$= (U_x \quad U_y \quad U_z) \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \quad (1.B.12)$$

と計算される量である。

$$(U_r \quad U_\theta \quad U_\phi) \begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\phi \end{pmatrix} = (U_x \quad U_y \quad U_z) \underline{R} \underline{R}^T \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = (U_x \quad U_y \quad U_z) \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \quad (1.B.13)$$

という関係より、内積は上述の回転変換において不変であることが分かる。このことから、2つのベクトル場の内積は、同じ点を考える限り値が座標系に依らない量 (スカラー場) であることが保証される。

極性と軸性

上述したように、基底 (座標系) の回転に対して成分が式 (1.B.9) のように変換される量をベクトルと呼ぶ。ベクトルは更に、基底の反転に対する変換性によって極性ベクトルと軸性ベクトルに分類される。ある点 P での速度場 $\mathbf{v}(P)$ をデカルト座標で

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}} \quad (1.B.14)$$

と成分表示する。基底を反転 ($\hat{\mathbf{x}}' = -\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}' = -\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}' = -\hat{\mathbf{z}}$) させるような変換^{†19}を施したとき、速度場の成分は

$$v'_x = -v_x, \quad v'_y = -v_y, \quad v'_z = -v_z \quad (1.B.15)$$

と変換される。そのような変換によって、ベクトルとしての速度場は不変である^{†20}。

$$\mathbf{v}' = v'_x \hat{\mathbf{x}}' + v'_y \hat{\mathbf{y}}' + v'_z \hat{\mathbf{z}}' \quad (1.B.16)$$

$$= -v_x(-\hat{\mathbf{x}}) - v_y(-\hat{\mathbf{y}}) - v_z(-\hat{\mathbf{z}}) \quad (1.B.17)$$

$$= \mathbf{v} \quad (1.B.18)$$

空間反転に対してこのような変換性を持つベクトルを極性ベクトル (polar vector) という。他には、位置ベクトルや電流密度、電場も極性ベクトルである^{†21}。

対して、磁場 \mathbf{B} は基底の反転に対して成分が不変である。

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = B_y, \quad B'_z = B_z \quad (1.B.19)$$

つまり、ベクトルとしての磁場は変換に伴って反転する。

$$\mathbf{B}' = B'_x \hat{\mathbf{x}}' + B'_y \hat{\mathbf{y}}' + B'_z \hat{\mathbf{z}}' \quad (1.B.20)$$

$$= B_x(-\hat{\mathbf{x}}) + B_y(-\hat{\mathbf{y}}) + B_z(-\hat{\mathbf{z}}) \quad (1.B.21)$$

$$= -\mathbf{B} \quad (1.B.22)$$

このような変換性を持つベクトルを軸性ベクトル (axial vector) あるいは擬ベクトル (pseudo vector) という。このことは次のように考えるとある程度納得できる。変換前の座標系 (x, y, z) を右手系にとっていた場合、反転後の座標系 (x', y', z') は左手系になる。つまり、外積の向きを調べる際に用いられる右ねじの法則 (フレミングの左手の法則) は左ねじの法則 (右手の法則) に変化する。ここで、ローレンツ力 (2.5.11) を考える。

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (1.B.23)$$

^{†19} 今の場合 $x' = -x, y' = -y, z' = -z$ という変換がこれに該当する。

^{†20} 座標変換によって点 P を表す座標値は変化する。同じ座標値ではなく、同じ点 P での速度場を比較していることに注意を要する。

^{†21} 電流は各粒子の速度にその粒子の電荷を乗じて単位体積あたりで合計した量 $\sum_a q_a \mathbf{v}_a$ である。速度が極性ベクトルであることと、電荷が空間反転に対して不変である (スカラーである) ことを認めれば、電流も極性ベクトルであることが分かる。電場については、以下で述べるローレンツ力の考察を同様に行うことで、極性ベクトルと考えればつじつまが合うことが分かる。

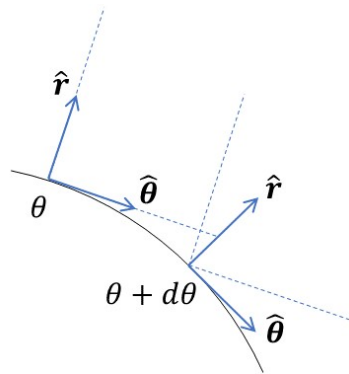


図 1.10 極座標の基底と局所直交座標系

力 (加速度) は速度と同様に極性ベクトルであり、電流も極性ベクトルである。しかし、外積の向きが反転するため、上式を不変にするためには磁場が反転しなければならない。他には、角運動量 (角速度) も軸性ベクトルである。

座標系には常に右手系の直交曲線座標を選ぶという約束の下で、極性ベクトルと軸性ベクトルは空間座標の変換に対して同様に振舞う。ただし、ガリレイ変換に対する変換性は各々の場によって異なる。

1.B.2 局所直交座標

直交曲線座標では、 $r = 0$ の点や極座標の $\theta = 0, \pi$ の点以外の任意の点においてその点の近傍のみに注目すると、その点での直交曲線座標の基底と同じ基底を持つ直交座標を考えることができる。このような、注目する点の周りだけで考える直交座標を局所直交座標と言う。ある点での局所直交座標に沿った空間微分を考える。例えば、極座標でベクトル場

$$\mathbf{Q}(r, \theta, \phi) = Q_r(r, \theta, \phi)\hat{r} + Q_\theta(r, \theta, \phi)\hat{\theta} + Q_\phi(r, \theta, \phi)\hat{\phi} \tag{1.B.24}$$

を考えているとする。ある点でのベクトル場の θ 成分 Q_θ に対し、この点での局所直交座標の $\hat{\theta}$ 方向への微分を求めたいとき、単に

$$\lim_{d\theta \rightarrow 0} \frac{Q_\theta(r, \theta + d\theta, \phi) - Q_\theta(r, \theta, \phi)}{rd\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \tag{1.B.25}$$

というように偏微分を計算してはならない。なぜなら、図 1.10 のように、 $d\theta$ だけずれた先では、極座標の基底が最初の点での局所直交座標の基底と違う向きになっているからである。この基底の変化分を補正する必要がある。この場合、

$$Q_{\theta|\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \mathbf{Q} \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} \right) \tag{1.B.26}$$

というように、 $\hat{\theta}$ の偏微分と \mathbf{Q} の内積を使って補正することができる。成分 Q_i の \hat{j} 方向への局所直交座標に沿った微分という意味で $Q_{i|j}$ という表式を用いることにする。式 (1.B.4) より、

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = -\sin \theta \cos \phi \hat{x} - \sin \theta \sin \phi \hat{y} - \cos \theta \hat{z} \tag{1.B.27}$$

$$= -\hat{r} \tag{1.B.28}$$

となることが分かるので、

$$Q_{\theta|\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \mathbf{Q} \cdot \left(-\frac{\hat{r}}{r} \right) \tag{1.B.29}$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{Q_r}{r} \tag{1.B.30}$$

となる。各座標系の基本ベクトルの偏微分のリストを載せる。

$$\text{円筒座標} \quad \begin{cases} \partial \hat{r} / \partial \phi = \hat{\phi}, & \partial \hat{\phi} / \partial \phi = -\hat{r}, \\ \text{他の組み合わせについてはゼロ} \end{cases} \tag{1.B.31}$$

$$\text{極座標} \quad \begin{cases} \partial \hat{r} / \partial r = 0, & \partial \hat{r} / \partial \theta = \hat{\theta}, & \partial \hat{r} / \partial \phi = \sin \theta \hat{\phi} \\ \partial \hat{\theta} / \partial r = 0, & \partial \hat{\theta} / \partial \theta = -\hat{r}, & \partial \hat{\theta} / \partial \phi = \cos \theta \hat{\phi} \\ \partial \hat{\phi} / \partial r = 0, & \partial \hat{\phi} / \partial \theta = 0, & \partial \hat{\phi} / \partial \phi = -\sin \theta \hat{r} - \cos \theta \hat{\theta} \end{cases} \tag{1.B.32}$$

このリストを使うと、例えば極座標での Q_θ の $\hat{\phi}$ 方向への局所直交座標に沿った微分は

$$Q_{\theta|\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \phi} - \mathbf{Q} \cdot \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} \right) \tag{1.B.33}$$

$$= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \phi} - \mathbf{Q} \cdot \left(\frac{\cos \theta \hat{\phi}}{r \sin \theta} \right) \tag{1.B.34}$$

$$= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \phi} - \frac{Q_\phi \cos \theta}{r \sin \theta} \tag{1.B.35}$$

というように計算できる。このような微分を考えるとどのような利点があるのかは次節で説明する。

1.B.3 ベクトル場の微分

前節で局所直交座標での微分を新たに考えた。この微分を使えば、ベクトル場の空間微分をデカルト座標と同じようにして、各座標の成分で書き下すことができる。例えば、極座標での発

散や、回転の r 成分は、

$$\nabla \cdot \mathbf{Q} = Q_{r|r} + Q_{\theta|\theta} + Q_{\phi|\phi} \quad (1.B.36)$$

$$= \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{Q_r}{r} \right) + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} + \frac{Q_r}{r} + \frac{Q_\theta \cos \theta}{r \sin \theta} \right) \quad (1.B.37)$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 Q_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta Q_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} \quad (1.B.38)$$

$$(\nabla \times \mathbf{Q}) \cdot \hat{\mathbf{r}} = Q_{\phi|\theta} - Q_{\theta|\phi} \quad (1.B.39)$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \theta} - \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \phi} - \frac{Q_\phi \cos \theta}{r \sin \theta} \right) \quad (1.B.40)$$

$$= \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (Q_\phi \sin \theta) - \frac{\partial Q_\theta}{\partial \phi} \right\} \quad (1.B.41)$$

というように、デカルト座標での形式において、偏微分を局所直交座標に沿った微分で置き換えるようにして求まる。

1.B.4 テンソル場の変換性

まず、テンソル積を説明する。ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} に対して、

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (1.B.42)$$

という 2 階テンソルを \mathbf{a}, \mathbf{b} のテンソル積と呼ぶ。右辺はデカルト座標で成分表示したものである。テンソル積は一般に可換ではない。座標系に依存しない導入の仕方をする、

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \quad (1.B.43)$$

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} \quad (1.B.44)$$

を満たすような 2 階テンソル、という説明になる。テンソル積のことを外積と呼ぶ文献もあるが、本書では外積はクロス積の意味で用いる。2 階テンソルとベクトルのドット積 (縮約) はベクトルを返す演算だが、上式のように一般には可換ではないことに注意が必要である。

2 階テンソル場 \mathbf{T} を成分表示するとは、各点において

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T_{11} \hat{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{x}} + T_{12} \hat{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{y}} + T_{13} \hat{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{z}} \\ &\quad + T_{21} \hat{\mathbf{y}} \otimes \hat{\mathbf{x}} + T_{22} \hat{\mathbf{y}} \otimes \hat{\mathbf{y}} + T_{23} \hat{\mathbf{y}} \otimes \hat{\mathbf{z}} \\ &\quad + T_{31} \hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\mathbf{x}} + T_{32} \hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\mathbf{y}} + T_{33} \hat{\mathbf{z}} \otimes \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (1.B.45)$$

$$= T_{ij} \hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j \quad (1.B.46)$$

というように、基底のテンソル積で展開することを意味する。節 1.B.1 で導入した基底の回転変換行列 \underline{R} の i 行 j 列成分を R_{ij} と書き、極座標の基底を $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}) = (\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2, \hat{\mathbf{r}}_3)$ と書くことに

する。基底のテンソル積は各点において次のように変換する。

$$\hat{\mathbf{r}}_i \otimes \hat{\mathbf{r}}_j = R_{ki} R_{lj} \hat{\mathbf{x}}_k \otimes \hat{\mathbf{x}}_l \quad (1.B.47)$$

テンソル \mathbf{T} の極座標での成分を \tilde{T}_{ij} と書くことにすると、

$$\mathbf{T} = \tilde{T}_{ij} \hat{\mathbf{r}}_i \otimes \hat{\mathbf{r}}_j = \tilde{T}_{ij} R_{ki} R_{lj} \hat{\mathbf{x}}_k \otimes \hat{\mathbf{x}}_l \quad (1.B.48)$$

と書け、右辺がデカルト座標での成分表示に他ならない。つまり、テンソルの成分は

$$\tilde{T}_{ij} = R_{ki} R_{lj} T_{kl} \quad (1.B.49)$$

と変換することが分かる^{†22}。この関係は行列を用いると、

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}_{rr} & \tilde{T}_{r\theta} & \tilde{T}_{r\phi} \\ \tilde{T}_{\theta r} & \tilde{T}_{\theta\theta} & \tilde{T}_{\theta\phi} \\ \tilde{T}_{\phi r} & \tilde{T}_{\phi\theta} & \tilde{T}_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \underline{R}^T \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \underline{R} \quad (1.B.50)$$

と書ける。逆に、基底の回転変換に対してこのような変換性を持つ量が 2 階テンソル場であるということもできる。

任意の正則行列 \underline{P} を用いて、正方行列 \underline{A} を

$$\underline{A} \longrightarrow \underline{A}' = \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P} \quad (1.B.51)$$

と変換することを相似変換と言う。行列の行列式、固有値、トレースはこの相似変換において不変であるという定理がある。トレースとは、行列の対角成分の和のことである。このことと式 (1.B.50) を考慮すると、行列式、固有値、トレースは、テンソル場が各点において固有に持つ座標系に依らない量であることが言える^{†23}。また、2 階テンソル場 \mathbf{T} とベクトル場 \mathbf{Q} のドット積 (縮約) は、それぞれの成分を用いて次のように計算できる。

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} = T_{ij} Q_k (\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j) \cdot \hat{\mathbf{x}}_k \quad (1.B.52)$$

$$= T_{ij} Q_k (\hat{\mathbf{x}}_j \cdot \hat{\mathbf{x}}_k) \hat{\mathbf{x}}_i \quad (1.B.53)$$

$$= T_{ij} Q_k \delta_{jk} \hat{\mathbf{x}}_i \quad (1.B.54)$$

$$= T_{ij} Q_j \hat{\mathbf{x}}_i \quad (1.B.55)$$

$$\text{(同様にして)} \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} = Q_i T_{ij} \hat{\mathbf{x}}_j \quad (1.B.56)$$

^{†22} 式 (1.B.48) より

$$\tilde{T}_{mn} R_{km} R_{ln} = T_{kl}$$

という関係が分かるが、この式の両辺に $R_{ki} R_{lj}$ を乗じ、回転行列 (直交行列) の性質 $R_{ki} R_{km} = \delta_{im}$ を用いれば計算できる。

^{†23} 対称行列を回転行列によって相似変換した行列は対称行列であるという性質もあるため、対称性もテンソル場が持つ座標系に依らない性質である。

また、ベクトルのテンソル積同士の縮約を

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) \quad (1.B.57)$$

と導入することで、2 階テンソル場 \mathbf{T} と \mathbf{S} の縮約を次のように計算することもできる。

$$\mathbf{T} : \mathbf{S} = T_{ij} S_{kl} (\hat{\mathbf{x}}_i \otimes \hat{\mathbf{x}}_j) : (\hat{\mathbf{x}}_k \otimes \hat{\mathbf{x}}_l) \quad (1.B.58)$$

$$= T_{ij} S_{kl} (\hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}_k) (\hat{\mathbf{x}}_j \cdot \hat{\mathbf{x}}_l) \quad (1.B.59)$$

$$= T_{ij} S_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (1.B.60)$$

$$= T_{ij} S_{ij} \quad (1.B.61)$$

1.B.5 テンソル場の微分

例えば極座標において、テンソル場 \mathbf{T} の (r, θ) 成分の、局所直交座標に沿った θ 方向への微分は、以下のようにして計算できる。

$$T_{r\theta|\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} - \mathbf{T} : \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right] \quad (1.B.62)$$

ベクトルの時には基本ベクトルの偏微分だったが、テンソルの場合には基本ベクトルのテンソル積の偏微分に置き換わる。この偏微分に関しては、式 (1.B.4) を用いてデカルト座標で成分表示して計算すると、

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta} \quad (1.B.63)$$

$$= \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \quad (1.B.64)$$

というライプニッツ則に従って計算できることが分かる。よって、

$$T_{r\theta|\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} - \mathbf{T} : \left[\frac{\hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}}{r} \right] \quad (1.B.65)$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \quad (1.B.66)$$

となる。

このようにしてテンソル場の局所直交座標に沿った微分を導入すると、例えばデカルト座標で書き下した微分方程式に

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.B.67)$$

のような項が出てきた場合、この項は他の座標系では、

$$(\tau_{rr|r} + \tau_{r\theta|\theta} + \tau_{r\phi|\phi}) \hat{\mathbf{r}} + (\tau_{\theta r|r} + \tau_{\theta\theta|\theta} + \tau_{\theta\phi|\phi}) \hat{\boldsymbol{\theta}} + (\tau_{\phi r|r} + \tau_{\phi\theta|\theta} + \tau_{\phi\phi|\phi}) \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (1.B.68)$$

というように、偏微分を局所直交座標に沿った微分に置き換えることによって書き下せる。

1.B.6 極座標・円筒座標での空間微分 (公式集)

f はスカラー場、 \mathbf{Q} 、 \mathbf{v} はベクトル場、 \mathbf{T} は対称テンソル場とする。

円筒座標 (r, ϕ, z)

$$Q_{r|r} = \frac{\partial Q_r}{\partial r}, \quad Q_{r|\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial Q_r}{\partial \phi} - \frac{Q_\phi}{r}, \quad Q_{r|z} = \frac{\partial Q_r}{\partial z} \quad (1.B.69)$$

$$Q_{\phi|r} = \frac{\partial Q_\phi}{\partial r}, \quad Q_{\phi|\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} + \frac{Q_r}{r}, \quad Q_{\phi|z} = \frac{\partial Q_\phi}{\partial z} \quad (1.B.70)$$

$$Q_{z|r} = \frac{\partial Q_z}{\partial r}, \quad Q_{z|\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial Q_z}{\partial \phi}, \quad Q_{z|z} = \frac{\partial Q_z}{\partial z} \quad (1.B.71)$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (1.B.72)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{Q} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r Q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \quad (1.B.73)$$

$$\nabla \times \mathbf{Q} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial Q_z}{\partial \phi} - \frac{\partial Q_\phi}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{r}} + \left[\frac{\partial Q_r}{\partial z} - \frac{\partial Q_z}{\partial r} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r Q_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial Q_r}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{z}} \quad (1.B.74)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.B.75)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{Q} = & \left[v_r \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial Q_r}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial Q_r}{\partial z} - \frac{v_\phi Q_\phi}{r} \right] \hat{\mathbf{r}} \\ & + \left[v_r \frac{\partial Q_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial Q_\phi}{\partial z} + \frac{v_\phi Q_r}{r} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ & + \left[v_r \frac{\partial Q_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial Q_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial Q_z}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (1.B.76)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} = & \left[\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\phi\phi}}{r} \right] \hat{\mathbf{r}} \\ & + \left[\frac{\partial T_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{\phi z}}{\partial z} + \frac{2T_{r\phi}}{r} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ & + \left[\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi z}}{\partial \phi} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{rz}}{r} \right] \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (1.B.77)$$

極座標 (r, θ, ϕ)

$$Q_{r|r} = \frac{\partial Q_r}{\partial r}, \quad Q_{r|\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial Q_r}{\partial \theta} - \frac{Q_\theta}{r}, \quad Q_{r|\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial Q_r}{\partial \phi} - \frac{Q_\phi}{r} \quad (1.B.78)$$

$$Q_{\theta|r} = \frac{\partial Q_\theta}{\partial r}, \quad Q_{\theta|\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{Q_r}{r}, \quad Q_{\theta|\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \phi} - \frac{Q_\phi \cot \theta}{r} \quad (1.B.79)$$

$$Q_{\phi|r} = \frac{\partial Q_\phi}{\partial r}, \quad Q_{\phi|\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \theta}, \quad Q_{\phi|\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} + \frac{Q_r + Q_\theta \cot \theta}{r} \quad (1.B.80)$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (1.B.81)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{Q} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 Q_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (Q_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} \quad (1.B.82)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{Q} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (Q_\phi \sin \theta) - \frac{\partial Q_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{r}} \\ &\quad + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial Q_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r Q_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &\quad + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r Q_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial Q_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (1.B.83)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (1.B.84)$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (1.B.85)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{Q} &= \left[v_r \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial Q_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial Q_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta Q_\theta + v_\phi Q_\phi}{r} \right] \hat{\mathbf{r}} \\ &\quad + \left[v_r \frac{\partial Q_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_\theta Q_r - v_\phi Q_\phi \cot \theta}{r} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &\quad + \left[v_r \frac{\partial Q_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial Q_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi (Q_r + Q_\theta \cot \theta)}{r} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (1.B.86)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} &= \left[\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\phi\phi} + T_{r\theta} \cot \theta}{r} \right] \hat{\mathbf{r}} \\ &\quad + \left[\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{3T_{r\theta} + (T_{\theta\theta} - T_{\phi\phi}) \cot \theta}{r} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &\quad + \left[\frac{\partial T_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{3T_{r\phi} + 2T_{\theta\phi} \cot \theta}{r} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (1.B.87)$$

付録 1.C 関数の扱い方

流体力学を扱う上で出会うであろう関数の性質や考え方をなるべく実用的な形でまとめた。流体力学では場の量、すなわち時刻と座標の関数を扱う。物理法則は微分方程式として表現される。場の量を適切な基底関数の級数として表し、場の量に関する微分方程式を級数の係数についての問題にすり替えることで、問題の見通しが良くなることがある。また、数値計算でもこの手法が用いられることがある。節 1.C.2 から 1.C.4 では、そのための基本的な考え方に加え、基底関数として用いられる各直交関数系の性質をまとめた。節 1.C.6 では波の解析の基本となるフーリエ変換について、節 1.C.7 では各所に現れるデルタ関数についてまとめた。

本付録は塚田捷 (2003), 福山秀敏 & 小形正男 (2003) を参考にした。常微分方程式についての網羅的な教科書として、坂井秀隆 (2015) を薦める。

1.C.1 簡単な微分方程式の解き方

与えられた微分方程式を定義域内の全ての点 x において満たすような関数 $\varphi(x)$ を見つけることを、微分方程式を解くという。微分方程式の一般論を述べた後に、簡単に手で解ける形式の常微分方程式とその解き方をまとめる。

方程式の分類

常 vs 偏 1 変数関数 $\varphi(x)$ についての微分方程式を常微分方程式、複数の独立変数の関数 $\varphi(x, y)$ についての微分方程式を偏微分方程式という。

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi = 0 \quad : \text{常微分方程式} \quad (1.C.1)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \quad : \text{偏微分方程式} \quad (1.C.2)$$

階数 含まれる微分の階数の最大値をその微分方程式の階数という。

$$\frac{d\varphi}{dx} + \varphi = 0 \quad : 1 \text{ 階} \quad (1.C.3)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} + \varphi = 0 \quad : 2 \text{ 階} \quad (1.C.4)$$

線形 $\varphi_1(x)$ と $\varphi_2(x)$ が解のとき、 $a\varphi_1(x) + b\varphi_2(x)$ も解になるような方程式を線形という。

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} + \varphi = 0 \quad : \text{線形} \quad (1.C.5)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \underbrace{\varphi \frac{d\varphi}{dx}}_{\text{非線形項}} + \varphi = 0 \quad : \text{非線形} \quad (1.C.6)$$

齊次 $\varphi, \varphi', \varphi'', \dots$ を含む項しか持たない方程式を齊次という。

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} + \varphi = 0 \quad : \text{齊次} \quad (1.C.7)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} + \varphi = \underbrace{x^2}_{\text{非齊次項}} \quad : \text{非齊次} \quad (1.C.8)$$

一般的な性質

- 境界条件 (初期条件) を与えずに、その微分方程式を満たすほとんど全ての関数を表現するような解を一般解という^{†24}。1 階常微分方程式の一般解は任意定数を 1 個含み、2 階常微分方程式の一般解は任意定数を 2 個含む。例えば、2 階常微分方程式

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \quad (1.C.9)$$

の一般解は、 a, b を任意定数として

$$\varphi(x) = ax + b \quad (1.C.10)$$

である。2 つの初期条件、例えば $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 2$ が与えられれば a, b の値が定まり、 $\varphi(x) = 2x$ となる。このときの解を特解という。

- 1 階偏微分方程式の一般解は任意関数を 1 個含み、2 階偏微分方程式は任意関数を 2 個含む。例えば、 $\varphi(x, y)$ についての 1 階偏微分方程式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} - 3\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad (1.C.11)$$

の一般解は、 $f(x)$ を任意関数として

$$\varphi(x, y) = f(y + 3x) \quad (1.C.12)$$

^{†24} 一般解では表せない解を特異解という。方程式を解く途中で両辺を未知変数で割った場合などに発生する可能性がある。初期値問題に対する解の一意性が保証されている方程式の場合、全ての初期値に対応できる一般解が求まれば、その一般解で表せない解は無いことになる。このため、線形問題で特異解の存在を気にすることは無いだろう。

である。初期条件として、例えば $y = 0$ のとき $\varphi = \exp(x)$ と与えられれば任意関数が定まり、

$$\varphi(x, y) = \exp(x + y/3) \quad (1.C.13)$$

と特解が求まる。

別の例として、 $\varphi(t, x)$ についての 2 階偏微分方程式

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad (1.C.14)$$

の一般解は、 $f(x), g(x)$ を任意関数として、

$$\varphi(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (1.C.15)$$

である。2 つの初期条件

$$\varphi(0, x) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x) = \varphi_1(x) \quad (1.C.16)$$

が与えられれば任意関数が定まり、

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{2}[\varphi_0(x - ct) + \varphi_0(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \varphi_1(s) ds \quad (1.C.17)$$

と特解が求まる。

1 階常微分方程式

変数分離形

$$\frac{d\varphi}{dx} = f(x)g(\varphi) \quad (1.C.18)$$

両辺を $g(\varphi)$ で割って dx で積分することにより、 C を任意定数として次の一般解を得る。

$$\int \frac{d\varphi}{g(\varphi)} = \int f(x) dx + C \quad (1.C.19)$$

ただし、ある定数 a に対して $g(a) = 0$ となる場合、定数関数 $\varphi(x) = a$ も解になることに注意を要する。

変数分離形に帰着するもの 1

$$\frac{d\varphi}{dx} = f(a\varphi + bx + c) \quad (1.C.20)$$

$u = a\varphi + bx + c$ と置けば、変数分離形

$$\frac{du}{dx} = af(u) + b \quad (1.C.21)$$

となる。

変数分離形に帰着するもの 2

$$\frac{d\varphi}{dx} = f\left(\frac{\varphi}{x}\right) \quad (1.C.22)$$

$u = \varphi/x$ と置けば、変数分離形

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}[f(u) - u] \quad (1.C.23)$$

となる。

斉次 & 線形

$$\frac{d\varphi}{dx} + p(x)\varphi = 0 \quad (1.C.24)$$

一般解は、 C を任意定数として

$$\varphi_g(x) = C \exp\left[-\int^x p(t)dt\right] \quad (1.C.25)$$

と書ける。

非斉次 & 線形

$$\frac{d\varphi}{dx} + p(x)\varphi + q(x) = 0 \quad (1.C.26)$$

方程式を満たす特解 $\varphi_p(x)$ を何か 1 つ見つければ、それに上で述べた斉次方程式の一般解 $\varphi_g(x)$ を加えた

$$\varphi(x) = \varphi_g(x) + \varphi_p(x) \quad (1.C.27)$$

が非斉次方程式の一般解になる。特解の見つけ方について、例えば $q(x) = \sin(2x)$ ならば $\varphi_p(x) = A \sin(2x) + B \cos(2x)$ 、あるいは $q(x) = x^2$ ならば $\varphi_p(x) = Ax^2 + Bx + C$ というように、関連する関数系を適当に仮定して代入し、定数を決定することで求まるかもしれない (代入法)。別の方法として、斉次方程式の一般解 $\varphi_g(x)$ の定数 C を関数 $C(x)$ に置き換えたものを代入すると、決定できるかもしれない (定数変化法)。

2 階常微分方程式

斉次 & 線形 & 定数係数

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2p\frac{d\varphi}{dx} + q\varphi = 0 \quad (1.C.28)$$

λ を複素数として、 $\varphi(x) = \exp(\lambda x)$ の形を仮定することで求められる。これを代入すると、次の特性方程式を得る。

$$\lambda^2 + 2p\lambda + q = 0 \quad (1.C.29)$$

この解は

$$\lambda_{\pm} = -p \pm \sqrt{p^2 - q} \quad (1.C.30)$$

であるが、微分方程式の解は特性方程式の判別式の符号によって場合分けされ、次のようになる。

$$\varphi(x) = \begin{cases} A \exp(\lambda_+ x) + B \exp(\lambda_- x) & (p^2 > q) \\ A \exp(-px) + Bx \exp(-px) & (p^2 = q) \\ [A \cos(\sqrt{q - p^2}x) + B \sin(\sqrt{q - p^2}x)] \exp(-px) & (p^2 < q) \end{cases} \quad (1.C.31)$$

非斉次 & 線形 & 定数係数

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2p\frac{d\varphi}{dx} + q\varphi + r(x) = 0 \quad (1.C.32)$$

この方程式を満たす特解が何か 1 つ見つければ、その解に上で述べた斉次方程式の一般解を加えたものが、非斉次方程式の一般解になる。特解の見つけ方については、1 階常微分方程式の項で述べたように、代入法と定数変化法がある。

連立微分方程式

斉次 & 線形 & 定数係数

$$\frac{d}{dx} \vec{\varphi} = \underline{A} \vec{\varphi} \quad (1.C.33)$$

$$\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}, \quad \underline{A} = \text{定数の } n \text{ 次正方行列} \quad (1.C.34)$$

任意の n 階 & 斉次 & 線形 & 定数係数の微分方程式は、新たな変数を導入することで、この形の n 元連立方程式に帰着する。一般解は任意定数を n 個持つ。形式的に積分すると、 $\vec{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n)^T$ を任意定数として、

$$\vec{\varphi}(x) = \exp(x\underline{A})\vec{C} \quad (1.C.35)$$

となる。よって、付録 1.A.6 の方法によって指数関数行列 $\exp(x\underline{A})$ が計算できれば、一般解が求まる。

非斉次 & 線形 & 定数係数

$$\frac{d}{dx} \vec{\varphi} = \underline{A} \vec{\varphi} + \vec{f}(x) \quad (1.C.36)$$

斉次方程式の解の任意定数 \vec{C} に x 依存性を付加 ($\vec{C}(x)$; 定数変化法) して方程式に代入し、積分することで、次の解を得る。

$$\vec{\varphi}(x) = \exp(x\underline{A})\vec{\varphi}(0) + \exp(x\underline{A}) \int_0^x \exp(-s\underline{A})\vec{f}(s)ds \quad (1.C.37)$$

1.C.2 線形空間の元としての関数

ある集合 \mathcal{H} が次の性質を持つとき、 \mathcal{H} をヒルベルト空間 (内積付きの完備な線形空間) という。ヒルベルト空間は線形空間の一種である。線形空間の元 (要素) をベクトルと呼ぶことがある。

1. \mathcal{H} の 2 つの元 \mathbf{x}, \mathbf{y} に対して「和」と呼ばれる第 3 の元 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ が存在し、次の法則を満たす。
 - (a) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (交換則)
 - (b) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (結合則)
 - (c) ゼロベクトルと呼ばれる特別な元 \mathbf{o} がただ 1 つ存在し、 \mathcal{H} の全ての元 \mathbf{x} に対し $\mathbf{o} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ が成り立つ。
 - (d) \mathcal{H} の任意の元 \mathbf{x} に対し、 $\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{o}$ を満たす元 \mathbf{x}' がただ 1 つ存在する。これを $-\mathbf{x}$ と表す。
2. \mathcal{H} の任意の元 \mathbf{x} と任意の複素数 a に対して「 \mathbf{x} の a 倍」と呼ばれる元 $a\mathbf{x}$ が存在し、次の法則を満たす。
 - (a) $(a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$
 - (b) $a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$
 - (c) $(ab)\mathbf{x} = a(b\mathbf{x})$
 - (d) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$
 - (e) $0\mathbf{x} = \mathbf{o}$
3. \mathcal{H} の 2 つの元 \mathbf{x}, \mathbf{y} に対して内積と呼ばれる複素数 (\mathbf{x}, \mathbf{y}) が定まり、次の性質を持つ。ただし、 a^* は a の複素共役という意味で用いる。
 - (a) $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}); \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)$
 - (b) $(a\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}); \quad (\mathbf{x}, a\mathbf{y}) = a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$
 - (c) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})^*$
 - (d) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ であり、 $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ となるのは $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ のときに限る。 $\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ を \mathbf{x} のノルムと言ひ、 $\|\mathbf{x}\|$ と書く。
4. 完備性： \mathcal{H} 中の点列 (元を並べたもの) $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$ を考える。ただし、この点列は次の条件を満たす。
 - どんなに小さな $\varepsilon > 0$ が与えられても、その ε に対してある自然数 N が存在し、 $m, n \geq N$ である任意の m, n について $\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n\| < \varepsilon$ となる。
 このような点列をコーシー列という。コーシー列は収束する。つまり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| = 0 \quad (1.C.38)$$

となる \mathbf{x} が \mathcal{H} の中に存在する。

例えば N 個の複素数を縦に並べた数ベクトル全体の集合は上の性質を満たすため、ヒルベルト空間である。また、付録 5.B で説明している量子力学では、系の状態がヒルベルト空間の元であることが基本法則のひとつである。後に説明するように、特定の条件を満たす関数全体の集合 (関数空間) も、適切に内積を定義すればヒルベルト空間をなす。数ベクトル空間が持つ性質の中で上の公理のみから言うことのできる数学的構造は、量子力学の状態空間や関数空間にも共通する。流体力学が扱う場の量は座標の関数である。上述のことを頭の隅に置いておくことで、関数空間を数ベクトル空間になぞらえ、直観的かつ体系的に整理して関数を扱える^{†25}。

区間 (a, b) で定義された区分的に連続な関数 $f(x)$ を考える。区分的連続とは、高々有限個の不連続点以外の点では連続であり、その不連続点 $x = a$ での極限 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ と $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ が有限の値を取る (発散していない) ということである。例えば階段関数は区分的に連続である。そのような関数 $f(x), g(x)$ に対して、内積を次のように定義することで、関数全体の集合をヒルベルト空間と捉えることができる。

$$(f, g) = \int_a^b f^*(x)g(x)\rho(x)dx \quad (1.C.39)$$

$f^*(x)$ は $f(x)$ の複素共役という意味である。 $\rho(x)$ は区間 (a, b) で正の値を取る定まった関数であり、重み関数と呼ばれる。ノルムも $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ と導入される。

いま考えている関数空間が数ベクトル空間と違うところは、無限次元であるということである。 N 個の複素数を並べた数ベクトル空間の場合、任意のベクトル \vec{x} は互いに直交する N 個のベクトルの組 (基底) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_N\}$ によって

$$\vec{x} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \dots + a_N\vec{e}_N \quad (1.C.40)$$

と表すことができる。これはこの数ベクトル空間の次元が N だからである。対して、今考えている関数空間の場合は、有限個の関数の組によって任意の元 $f(x)$ を表すことはできない。しかし、無限個の関数の組 $\{\varphi_n; n = 1, 2, \dots\}$ を用いて

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (1.C.41)$$

と展開することができる。ただし、上式におけるイコールは次の意味で用いている。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n(x) \right|^2 dx = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n \right\|^2 = 0 \quad (1.C.42)$$

^{†25} ただし、後に述べるように、関数空間は数ベクトル空間とは違って無限次元であることに注意が必要である。この話題について詳しくは関数解析の本で論じられている。数値解析や偏微分方程式のための関数解析の教科書には 岡本久 & 中村周 (2006) がある。

このことを平均収束という。これと関連して、 $\|f - g\| = 0$ の場合は $f = g$ とみなす^{†26}。このような規則の下で、無限次元のヒルベルト空間を考えることができる^{†27}。

関数の組 $\{\varphi_n; n = 1, 2, \dots\}$ があり、この中から任意の 2 つの関数を選ぶと

$$(\varphi_m, \varphi_n) = 0 \quad (m \neq n) \quad (1.C.43)$$

となる場合、この組を直交関数系という。更に、

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn} \quad (1.C.44)$$

が満たされる場合は正規直交関数系 (規格化直交関数系) という。ある直交関数系 $\{\varphi_n; n = 1, 2, \dots\}$ によって、対象とする関数空間内の任意の関数 $f(x)$ が式 (1.C.41) のように展開できるとき、この関数系は完全であるという。完全な直交関数系は基底関数系とも呼ばれる。

一般に、正規直交関数系 $\{\varphi_n\}$ に対して

$$c_n = (\varphi_n, f) = \int_a^b \varphi_n^*(x) f(x) \rho(x) dx \quad (1.C.45)$$

を f のフーリエ係数という。与えられた関数 $f(x)$ を正規直交関数系の有限個の級数で

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n(x) \quad (1.C.46)$$

と近似したい。このとき、展開係数 c_n をフーリエ係数とした場合に $\|f - f_N\|$ が最小になる。また、フーリエ係数に関して次の不等式が成り立つ。

$$\sum_{n=1}^N |(\varphi_n, f)|^2 \leq \|f\|^2 \quad (1.C.47)$$

これをベッセルの不等式という。 $\{\varphi_n\}$ が完全である場合、 N が無限大の極限で上式の等号が成り立つ。このとき、式 (1.C.46) は $f(x)$ に平均収束する。つまり、フーリエ係数を展開係数として $f(x)$ を式 (1.C.41) のように展開できる。このときの展開式を (広義の) フーリエ級数という。

^{†26} 例えば、区間 $[-1, 1]$ で定義される次の関数 $f(x)$ と $g(x)$ を区別しない。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

^{†27} ヒルベルト空間の完備性を満たすためには、正確には 2 乗可積分 ($\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$) な関数の集合を考える必要がある。ここでの積分は、短冊を横に並べて幅を狭くしたときの極限として定義される積分 (リーマン積分) ではなく、病的な関数にも対応でき、極限操作に対して良い性質を持つように定義された積分 (ルベーグ積分) を指す。整備された定理を利用するに限るならば、対象とする関数を区分的連続な関数に限定しても十分に有用と思われるので、この付録ではそのように記述する。

表 1.1 スツルム-リウヴィル問題の具体例：表中の m は整数である。 m の取りうる範囲はそれぞれ異なる。 α, β は実数で $\alpha, \beta > -1$ を満たす。 γ も実数とする。

解の名前	区間	$p(x)$	$q(x)$	$\rho(x)$
三角関数	$[-1, 1]$	1	0	1
ヤコビ多項式	$[-1, 1]$	$(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}$	0	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$
超球多項式	$[-1, 1]$	$(1-x^2)^{m+1}$	0	$(1-x^2)^m$
チェビシェフ多項式	$[-1, 1]$	$\sqrt{1-x^2}$	0	$1/\sqrt{1-x^2}$
ルジャンドル多項式	$[-1, 1]$	$1-x^2$	0	1
ルジャンドル陪関数	$[-1, 1]$	$1-x^2$	$m^2/(1-x^2)$	1
(第 1 種) ベッセル関数	$[0, 1]$	x	γ^2/x	x
ラゲール多項式	$[0, \infty)$	$x \exp(-x)$	0	$\exp(-x)$
ラゲール陪多項式	$[0, \infty)$	$x^{m+1} \exp(-x)$	0	$x^m \exp(-x)$
エルミート多項式	$(-\infty, \infty)$	$\exp(-x^2)$	0	$\exp(-x^2)$

1.C.3 スツルム-リウヴィル問題

区間 $[a, b]$ で定義された関数 $\varphi(x)$ に対して、次の微分方程式を考える。

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d\varphi}{dx} \right) - q(x)\varphi + \lambda\rho(x)\varphi = 0 \tag{1.C.48}$$

ただし、 $p(x), q(x), \rho(x)$ は連続関数であり、区間内で $p(x) > 0, \rho(x) > 0$ とする。 λ は一般には複素数である。 $\varphi(x)$ の境界条件として、次式を課す。

$$p(a)\varphi'(a) \sin \alpha - \varphi(a) \cos \alpha = 0 \tag{1.C.49}$$

$$p(b)\varphi'(b) \sin \beta - \varphi(b) \cos \beta = 0 \tag{1.C.50}$$

$d\varphi/dx$ を φ' と書いた。 α, β は定数である。この問題はスツルム-リウヴィルの固有値問題と呼ばれる。これが数ベクトル空間を考えたときの行列の固有値問題に対応する問題であることは、以降の説明や付録 1.D.4 を読まれば納得していただけるかもしれない。

この問題は物理学の様々な場面で登場する。例えば、付録 1.D.4 では浅水波方程式に従う波の固有モードを求めるために $p(x) = \rho(x) = 1, q(x) = 0$ の場合の式を 2 次元に拡張したもの考えている。 α または β をゼロとしたときの境界条件は固定端、 $\pi/2$ としたときの境界条件は自由端と呼ばれる。また、付録 5.B.1 ではエルミート多項式、ラゲール陪多項式、ルジャンドルの陪関数が登場するが、それらは (特異) スツルム-リウヴィル問題を解いた結果として出てくる。それぞれの係数や適用区間を表 1.1 にまとめた。これらの中には端点で $p(x)$ か $\rho(x)$ がゼロになっているものがあるが、その場合はその端点で値が有限であるという境界条件に変更する。この境界条件のもとで解くことを特異スツルム-リウヴィル固有値問題という。

スツルム-リウヴィルの固有値問題は次の性質を持つ。

- λ が特定の値を取る場合以外は自明な解 $\varphi(x) = 0$ しか持たない。
- 非自明な解を持つときの λ の値を固有値と言うが、固有値は実数である。
- 固有値は $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ となるように番号 $n = 0, 1, 2, \dots$ をつけることができる。最小値 λ_0 は存在するが、最大値は存在しない (収束しない)。
- 各々の λ_n に対応する解 (固有関数) $\varphi_n(x)$ が、定数倍の任意性を除いて一意に存在する^{†28}。 $\varphi_n(x)$ は実関数になるようにとれる。
- 固有関数 $\varphi_n(x)$ は n が増えるほど多くのゼロ点 ($\varphi_n(x) = 0$ となる x) を持つ。
- 固有関数の組 $\{\varphi_n(x); n = 0, 1, 2, \dots\}$ は、内積を

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \int_a^b \varphi_m^*(x) \varphi_n(x) \rho(x) dx \quad (1.C.51)$$

と定めれば直交関数系をなす。

- 完全性：区間 (a, b) で定義された区分的に連続な任意の関数は、正規化された固有関数の組 $\{\varphi_n(x); n = 0, 1, 2, \dots\}$ とフーリエ係数によって平均収束の意味で展開できる。
- 固有値問題の微分方程式 (1.C.48) に非斉次項 $f(x)$ を加えた微分方程式を考える。 $f(x)$ は区分的に連続とする。

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d\varphi}{dx} \right) - q(x)\varphi + \lambda\rho(x)\varphi + f(x) = 0 \quad (1.C.52)$$

境界条件は上で述べたのと同じものを課す。このとき、 λ が上で考えた斉次の問題の固有値でないときに限り、一意的な解を持つ。 λ が固有値であった場合、それに対応する固有関数と $f(x)$ が直交するときのみ解を持つ。その解には斉次の問題の任意の解を付加できる。

特に、固有関数系は完全性を持つのでフーリエ級数展開の基底として用いられる。適切な基底関数を選ぶことで問題の見通しが良くなることがある。

1.C.4 直交関数系の一覧

三角関数 (75 ページ)、ルジャンドル多項式、ルジャンドル陪関数 (77 ページ)、球面調和関数 (79 ページ)、ベッセル関数 (85 ページ)、球ベッセル関数 (91 ページ)、ラゲール陪多項式 (93 ページ)、エルミート多項式 (94 ページ) について、各直交関数系の性質に加え、物理の問題に

^{†28} $p(a) = p(b)$ であるような問題において周期的境界条件 $\varphi(a) = \varphi(b), \varphi'(a) = \varphi'(b)$ を与えた場合はこの限りではない。つまり、ある固有値に対応する固有関数が 1 つに定まらない可能性がある。また、問題の区間が $(-\infty, \infty)$ である場合も一般にはこの限りではないが、エルミート多項式の場合は適切な境界条件を課すことで、解が一意に定まる。詳しくは節 1.C.4 で述べる。

おける使いどころも紹介する。例えば、Lowrie (2011) は地球物理学への応用のための数学の知識がまとまった本であるが、特殊関数についての記述もある。

各直交関数系によって内積の重み関数は定まっていることに注意を要する。一般に、直交関係が $(\varphi_m, \varphi_n) = A_n \delta_{mn}$ であった場合は、 $\bar{\varphi}_n(x) = \varphi_n(x)/\sqrt{A_n}$ と規格化することで正規直交関数化できる。

三角関数 $\cos x, \sin x$

定義

区間 $[0, 2\pi]$ 上で定義された直交関数系としての三角関数系は、例えば次の並びのことを言う。

$$\begin{cases} \cos(mx), & m = 0, 1, 2, \dots \\ \sin(mx), & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (1.C.53)$$

$m = 0$ のとき、 $\sin(mx) = 0$ であるため、直交関数系には含まれないことに留意されたい。

直交関係

上のような関数系を考えたときの直交関係は次のようになる。

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n \neq 0) \\ 2\pi & (m = n = 0) \end{cases} \quad (1.C.54)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases} \quad (1.C.55)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx = 0 \quad (1.C.56)$$

微分方程式

区間 $[0, 2\pi]$ で定義された関数 $\varphi(x)$ に関する微分方程式

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\varphi = 0 \quad (1.C.57)$$

の一般解は次のように書ける。

$$\varphi(x) = \begin{cases} a \sin(\sqrt{\lambda}x) + b \cos(\sqrt{\lambda}x) & (\lambda > 0) \\ ax + b & (\lambda = 0) \\ a \exp(\sqrt{-\lambda}x) + b \exp(-\sqrt{-\lambda}x) & (\lambda < 0) \end{cases} \quad (1.C.58)$$

ここに次の境界条件を課すとスツルム-リウヴィル固有値問題になり、境界条件に応じて三角関数の異なる並びが固有関数になる。

- 境界条件が固定端 $\varphi(0) = 0, \varphi(2\pi) = 0$ の場合、固有値は $m = 1, 2, 3, \dots$ として $\lambda = (m/2)^2$ であり、各 m に対応する固有関数は $\sin(mx/2)$ である。
- 境界条件が自由端 $\varphi'(0) = 0, \varphi'(2\pi) = 0$ の場合、固有値は $m = 0, 1, 2, \dots$ として $\lambda = (m/2)^2$ であり、各 m に対応する固有関数は $\cos(mx/2)$ である。
- 境界条件が周期的条件 $\varphi(0) = \varphi(2\pi), \varphi'(0) = \varphi'(2\pi)$ の場合、固有値は $m = 0, 1, 2, \dots$ として $\lambda = m^2$ である。 $\lambda = 0$ に対応する固有関数は定数関数であり、 $\lambda = m^2 \neq 0$ に対応する固有関数は $\cos(mx)$ と $\sin(mx)$ の 2 つである。

使いどころ (フーリエ級数展開)

三角関数系に関して、次のことが言える。

区間 $(0, 2\pi)$ で定義された任意の区分的に連続な関数 $f(x)$ は、正規直交関数系

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right) \quad (1.C.59)$$

によって、平均収束の意味で次のように展開できる^{†29}。

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \quad (1.C.60)$$

これを (狭義の) フーリエ級数展開という。各展開係数 (フーリエ係数) は次のように書ける。

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad (1.C.61)$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (1.C.62)$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (1.C.63)$$

任意の区間 (a, b) の関数は適切に変数変換すれば上の定理に帰着する。一方で、区間 $(0, 2\pi)$ の任意の関数は、前節での一般論に従って、固定端を課したときの固有関数系

$$\left(\frac{\sin(x/2)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(3x/2)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right) \quad (1.C.64)$$

^{†29} 例えば $\sin(x/2)$ は次のように展開できる。

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{(2n+1)(2n-1)}$$

でも展開できるし、自由端を課したときの固有関数系

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(x/2)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(3x/2)}{\sqrt{\pi}}, \dots \right) \quad (1.C.65)$$

でも展開できる。

ルジャンドル多項式 $P_n(x)$ / ルジャンドル陪関数 $P_n^m(x)$

ロドリゲスの式

ルジャンドル陪関数 $P_n^m(x)$ は次のように表される^{†30}。

$$P_n^m(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (1-x^2)^n \quad (1.C.66)$$

$$= (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (1.C.67)$$

$$\text{ただし, } n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (1.C.68)$$

$P_n^0(x) = 1$ である。 $P_n^0(x)$ は特にルジャンドル多項式と呼ばれ、 $P_n(x)$ とも書かれる。上式では $0 \leq m \leq n$ として導入したが、次式の関係によって $-n \leq m \leq n$ に拡張されることがある。

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) \quad (1.C.69)$$

このとき、式 (1.C.67) は意味をなさなくなるが、式 (1.C.66) は成り立つ。

級数表示

$P_n^m(x)$ は次のようにも表される。

$$P_n^m(x) = (-1)^m \cdot 2^n \cdot (1-x^2)^{m/2} \cdot \sum_{k=m}^n \frac{k!}{(k-m)!} \binom{n}{k} \binom{\frac{n+k-1}{2}}{n} x^{k-m} \quad (1.C.70)$$

ただし、実数 a と非負整数 k に対して一般化された二項係数

$$\begin{cases} k=0 \text{ のとき} & \binom{a}{k} = 1 \\ k>0 \text{ のとき} & \binom{a}{k} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1} \end{cases} \quad (1.C.71)$$

を用いた。特に、 $P_n(x) = P_n^0(x)$ は次のように表すこともできる。

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-2k)! (n-k)!} x^{n-2k} \quad (1.C.72)$$

ただし、和の上限は $n/2$ を超えない最大の整数である。

^{†30} 更に因子 $(-1)^m$ を乗じたものとして定義されていることもあるので注意が必要である。また、正規直交関数となるように規格化されていることもある。

偶奇性

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n+m} P_n^m(x) \tag{1.C.73}$$

微分方程式

ルジャンドル陪関数は区間 $[-1, 1]$ で定義された関数 $\varphi(x)$ に対する次の特異スツルム-リウヴィル固有値問題の固有関数である。

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\varphi}{dx} \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \varphi = 0 \tag{1.C.74}$$

ただし、 m は非負整数である。区間の端点で有界である（発散しない）という境界条件を課す。このとき、与えられた m に対して $\{P_n^m(x); n = m, m+1, m+2, \dots\}$ という固有関数系を持ち、 $P_n^m(x)$ に対する固有値は $\lambda = n(n+1)$ である。

直交関係

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_n^m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'} \tag{1.C.75}$$

漸化式

$$(n-m+1)P_{n+1}^m(x) - (2n+1)xP_n^m(x) + (n+m)P_{n-1}^m(x) = 0 \tag{1.C.76}$$

$$\sqrt{1-x^2}P_n^{m+1}(x) - (n-m)xP_n^m(x) + (n+m)P_{n-1}^m(x) = 0 \tag{1.C.77}$$

$$2mxP_n^m(x) + \sqrt{1-x^2}[P_n^{m+1}(x) + (n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}(x)] = 0 \tag{1.C.78}$$

$$(1-x^2)[P_n^m(x)]' + (n-m+1)P_{n+1}^m(x) - (n+1)xP_n^m(x) = 0 \tag{1.C.79}$$

加法定理

点 P の極座標表示を (r, θ, ϕ) 、点 P' の極座標表示を (r', θ', ϕ') とする。ベクトル \vec{OP} と \vec{OP}' のなす角を ψ とすると、球面余弦定理より次の関係がある。

$$\cos \psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') \tag{1.C.80}$$

このとき、ルジャンドル陪関数 $P_n^m(x)$ とルジャンドル多項式 $P_n(x) = P_n^0(x)$ について、次の加法定理が成り立つ。ただし、2 段目は球面調和関数 $Y_{n,m}(\theta, \phi)$ を用いて書き替えたものである。

$$P_n(\cos \psi) = P_n(\cos \theta)P_n(\cos \theta') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta)P_n^m(\cos \theta') \cos[m(\phi - \phi')] \tag{1.C.81}$$

$$= \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_{n,m}^*(\theta', \phi') Y_{n,m}(\theta, \phi) \tag{1.C.82}$$

使いどころ 1 (球面調和関数の一部)

球面調和関数の一部として表れる。 $\cos \theta$ を引数とした場合のルジャンドル陪関数の具体例は表 4.1 で示されている。

使いどころ 2 (多重極展開)

$P_n(x)$ に関して次の公式がある。

十分条件として $|t| < 1$ かつ $|x| \leq 1$ のときに、次式の右辺は収束し、左辺と等しくなる (時弘哲治 et al., 2006, §2.3)。

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (1.C.83)$$

この公式はポアソン方程式に従うポテンシャルの多重極展開と呼ばれる操作に応用される。一例を節 1.C.5 で紹介する。

球面調和関数 $Y_{n,m}(\theta, \phi) / C_n^m(\theta, \phi), S_n^m(\theta, \phi)$

定義

球面調和関数 $Y_{n,m}(\theta, \phi)$ は球面における位置を極座標表示で表したときの変数 θ, ϕ ($0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$) に対して次のように表される。複素数を返す関数である。

$$Y_{n,m}(\theta, \phi) = (-1)^{(m+|m|)/2} \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad (1.C.84)$$

$$= (-1)^m \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad (1.C.85)$$

$$\text{ただし, } n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -n, -n+1, \dots, n-1, n \quad (1.C.86)$$

$0 \leq m \leq n$ として定義されたルジャンドル陪関数を用いた場合、式 (1.C.84) のように表され、式 (1.C.69) によって $-n \leq m \leq n$ に拡張されたルジャンドル陪関数を用いた場合は式 (1.C.85) のように表される。 m が逆符号の関数間には次の関係がある。

$$Y_{n,m}^*(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{n,-m}(\theta, \phi) \quad (1.C.87)$$

地球物理学において実関数を扱う場合は次の形式が用いられることがある。ただし、こ

ここでは正規化されたものを示す。

$$\begin{cases} C_n^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{\varepsilon_m(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) \cos(m\phi) \\ S_n^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{\varepsilon_m(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) \sin(m\phi) \end{cases} \quad (1.C.88)$$

$$\text{ただし, } \varepsilon_m = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ 2 & (m \neq 0) \end{cases} \quad (1.C.89)$$

このように定義した場合、 m は $0 \leq m \leq n$ を満たす整数であるが、 $S_n^0(\theta, \phi) = 0$ は直交関数系に含まれないことに留意されたい。オイラーの公式

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x \quad (1.C.90)$$

を用いることで、 $Y_{n,m}$ との間に次の関係が分かる。

$$Y_{n,0}(\theta, \phi) = C_n^0(\theta, \phi) \quad (1.C.91)$$

$$Y_{n,m}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{2} [C_n^m(\theta, \phi) + i S_n^m(\theta, \phi)] \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.C.92)$$

$$Y_{n,-m}(\theta, \phi) = \sqrt{2} [C_n^m(\theta, \phi) - i S_n^m(\theta, \phi)] \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.C.93)$$

関数形

$Y_{n,m}(\theta, \phi)$ の具体的な形を図 1.11, 1.12, 1.13 に示した。 $n = m = 0$ のときは定数関数である。 m が偶数の場合、 C_n^m, S_n^m はそれぞれ $Y_{n,m}$ の実部と虚部に、規格化定数の違いを除いて一致し、 m が奇数の場合はそれぞれの符号を変えたものに一致する。それぞれの関数は経度方向に一周すると $2m$ 個の節（関数値がゼロになる場所）を持つ。

偶奇性

$$Y_{n,m}(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^n Y_{n,m}(\theta, \phi) \quad (1.C.94)$$

C_n^m, S_n^m に対しても同じ式が成り立つ。

微分方程式

球面調和関数は球面上で定義された関数 $\varphi(\theta, \phi)$ に関する次の固有値問題の固有関数である。

$$\hat{\Omega}_{\theta\phi}\varphi + \lambda\varphi = 0 \quad (1.C.95)$$

$$\text{ただし, } \hat{\Omega}_{\theta\phi}\varphi = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} \quad (1.C.96)$$

固有値は $n = 0, 1, 2, \dots$ として $\lambda = n(n+1)$ であり、それに対する固有関数は $-n \leq m \leq n$ の $(2n+1)$ 個の $Y_{n,m}(\theta, \phi)$ である。あるいは、固有関数を実関数にとるならば、

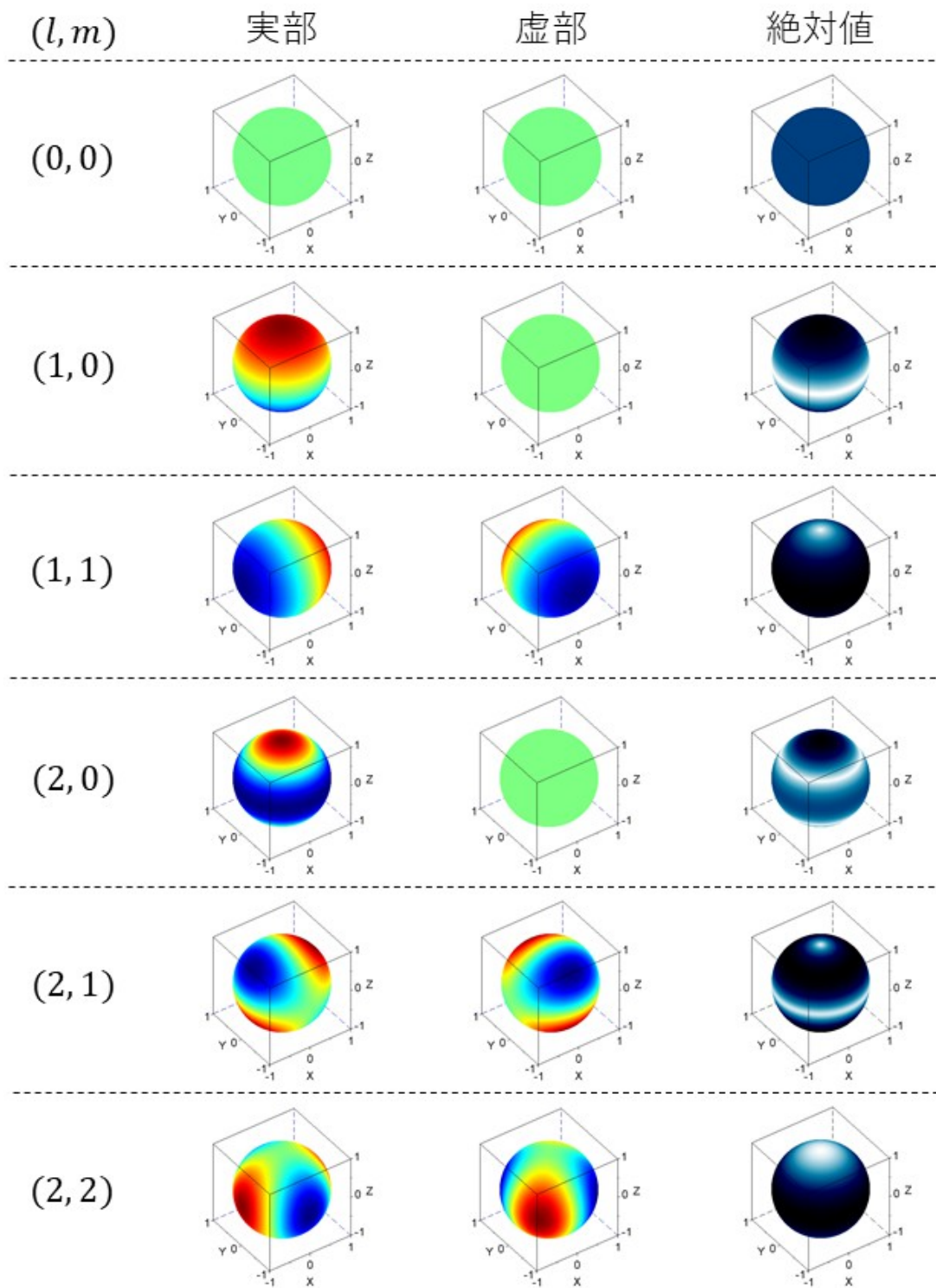


図 1.11 球面調和関数 1 : $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ の実部、虚部、絶対値の分布が球面上のカラーマップとしてプロットされている。実部と虚部については、青が負、緑がゼロ、赤が正の相対値を表す。絶対値については、色が濃いほど値が大きいことを表す。 m が負の関数については、 m が奇数の場合は $-m$ の関数の実部の符号だけを変えた関数 (虚部と絶対値は変わらない) であり、 m が偶数の場合は $-m$ の関数の虚部の符号だけを変えた関数 (実部と絶対値は変わらない)。

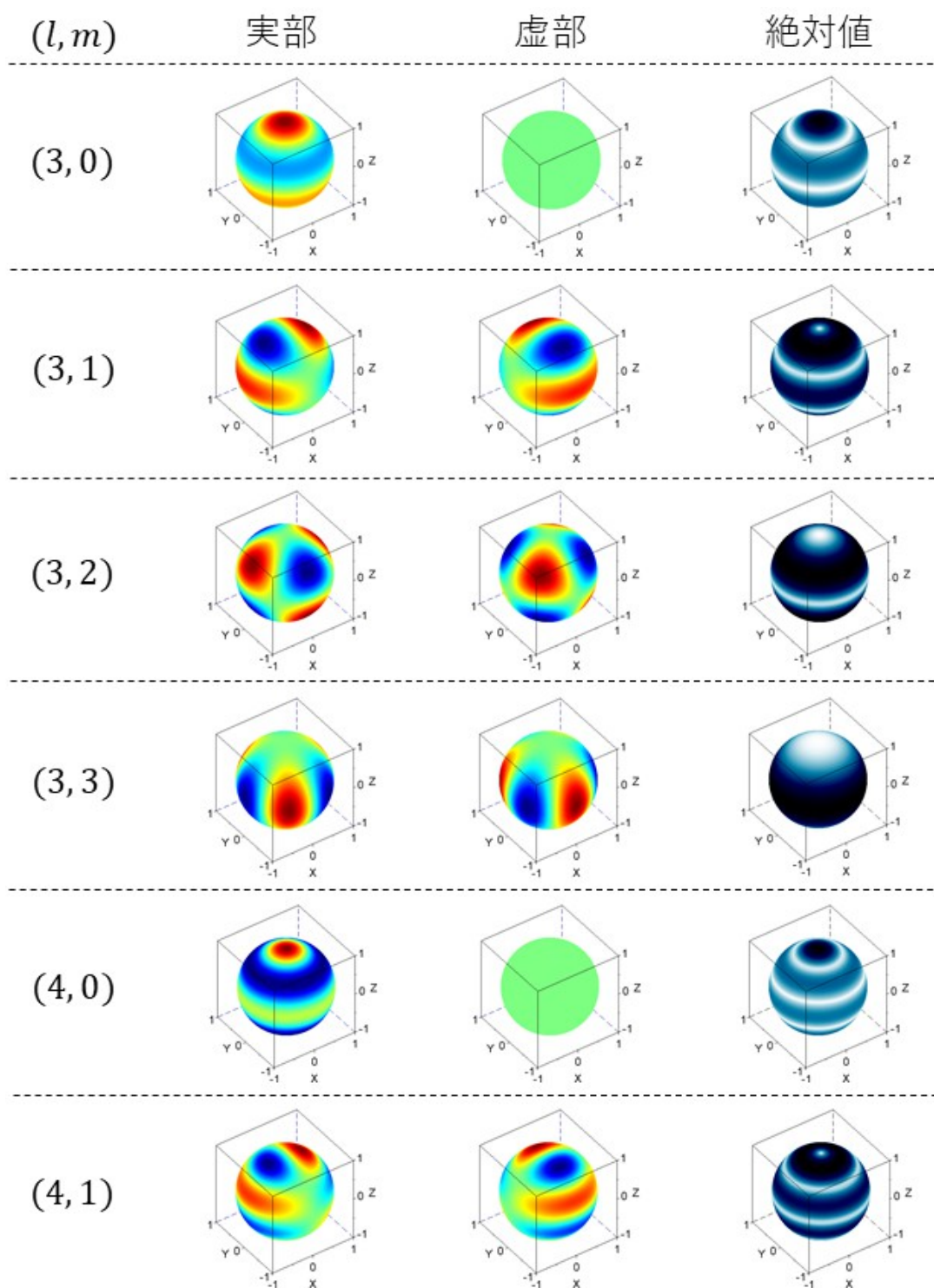


図 1.12 球面調和関数 2 : 図 1.11 の続き。

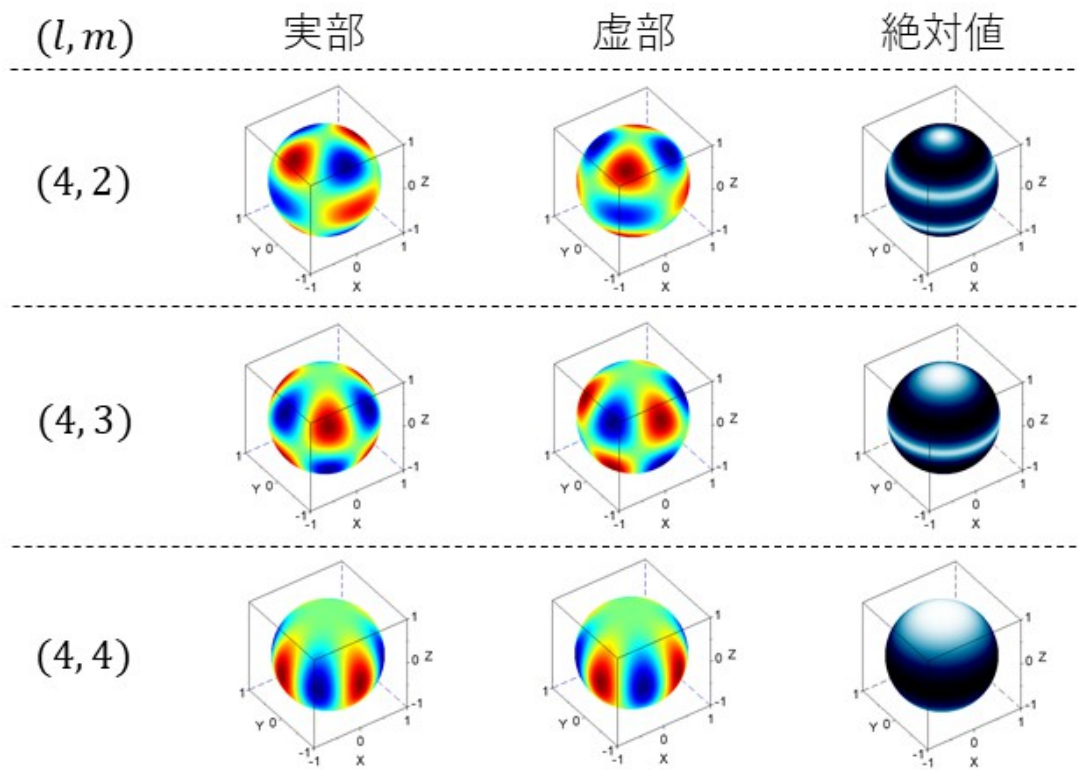


図 1.13 球面調和関数 3：図 1.12 の続き。

$\{C_n^m(\theta, \phi); 0 \leq m \leq n\}$ と $\{S_n^m(\theta, \phi); 1 \leq m \leq n\}$ の合わせて $(2n + 1)$ 個である。各 $Y_{n,m}, C_n^m, S_n^m$ は次の関係を満たす。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + m^2 \varphi = 0 \tag{1.C.97}$$

直交関係

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{n,m}^*(\theta, \phi) Y_{n',m'}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \tag{1.C.98}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi C_{n,m}(\theta, \phi) C_{n',m'}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \tag{1.C.99}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi S_{n,m}(\theta, \phi) S_{n',m'}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \tag{1.C.100}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi C_{n,m}(\theta, \phi) S_{n',m'}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = 0 \tag{1.C.101}$$

漸化式

$$\hat{l}_{\pm} = \pm \exp(\pm i\phi) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \pm \frac{i}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (1.C.102)$$

として、次の関係が成り立つ。複号同順である。

$$\hat{l}_{\pm} Y_{n,m}(\theta, \phi) = \sqrt{(n \mp m)(n \pm m + 1)} Y_{n,m \pm 1}(\theta, \phi) \quad (1.C.103)$$

使いどころ (球面上で定義された関数の展開)

球面上で定義された区分的に連続な任意の関数 $f(\theta, \phi)$ は、球面調和関数によって平均収束の意味で次のように展開できる。

$$f(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{n,m} Y_{n,m}(\theta, \phi) \quad (1.C.104)$$

展開係数はフーリエ係数であり、一般には複素数値をとる。

$$a_{n,m} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_{n,m}^*(\theta, \phi) f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (1.C.105)$$

特に、実関数のみを扱う場合は次のように展開できる。

$$f(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [a_n^m C_n^m(\theta, \phi) + b_n^m S_n^m(\theta, \phi)] \quad (1.C.106)$$

$$a_n^m = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} C_n^m(\theta, \phi) f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (1.C.107)$$

$$b_n^m = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} S_n^m(\theta, \phi) f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (1.C.108)$$

ただし、 b_n^0 は常にゼロである。

平面波を球面調和関数で展開した場合について、球ベッセル関数の項で説明する。ここでは別の例として、次の 3 次元ラプラス方程式を解く場合を考える。

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{x}) = 0 \quad (1.C.109)$$

球面上での境界条件が与えられている場合は、極座標を用いることで問題が簡単になる。付録 1.B.6 にまとめた知識を用いて上式を極座標に変換すると、次式を得る。

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \hat{\Omega}_{\theta\phi} \varphi = 0 \quad (1.C.110)$$

$\hat{\Omega}_{\theta\phi}$ は式 (1.C.96) で定義された微分演算子である。 $\varphi(r, \theta, \phi)$ を各 r に対して球面調和関

数で展開する。

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [a_n^m(r) C_n^m(\theta, \phi) + b_n^m(r) S_n^m(\theta, \phi)] \quad (1.C.111)$$

上式を式 (1.C.110) に代入し、球面調和関数の性質 $\hat{\Omega}_{\theta\phi} C_n^m = -n(n+1)C_n^m$ などを用いると、次式を得る。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [D_r^n a_n^m(r) C_n^m(\theta, \phi) + D_r^n b_n^m(r) S_n^m(\theta, \phi)] = 0 \quad (1.C.112)$$

$$\text{ただし,} \quad D_r^n \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2} \varphi \quad (1.C.113)$$

関数系 $\{C_n^m, S_n^m\}$ は線形独立なので、上式が成り立つのは全ての n, m について次式が成り立つときだけである。

$$D_r^n a_n^m(r) = 0 \quad \text{かつ} \quad D_r^n b_n^m(r) = 0 \quad (1.C.114)$$

この 2 階常微分方程式の一般解は

$$a_n^m(r) = A_{n,m}^{(a)} r^n + \frac{B_{n,m}^{(a)}}{r^{n+1}} \quad (1.C.115)$$

$$b_n^m(r) = A_{n,m}^{(b)} r^n + \frac{B_{n,m}^{(b)}}{r^{n+1}} \quad (1.C.116)$$

である。確かに上式は任意定数を 2 つ含み、実際に代入すると微分方程式を満たす。球面上の境界条件は、各々の $a_n^m(r), b_n^m(r)$ に対する境界条件に変換できる。例えば、ある関数 $\varphi_0(\theta, \phi)$ が与えられて $\varphi(r_0, \theta, \phi) = \varphi_0(\theta, \phi)$ という条件は、この関数 $\varphi_0(\theta, \phi)$ を球面調和関数で展開したときの係数に $a_n^m(r_0), b_n^m(r_0)$ が一致するという条件に置き換わる。対称の領域を囲む 2 つの球面での境界条件が与えられれば、上の一般解の係数が定まる^{†31}。それを式 (1.C.111) に戻せば、 $\varphi(r, \theta, \phi)$ が求まる。

ベッセル関数 $J_\alpha(x), N_\alpha(x)$

定義

第 1 種ベッセル関数は次のように表される。

$$J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \alpha} \quad (1.C.117)$$

^{†31} 対象の領域が、ある球面の外側全体の場合は、 $r \rightarrow \infty$ でゼロになるという条件より $A_{n,m}^{(\cdot)}$ がゼロになり、球面上の条件より $B_{n,m}^{(\cdot)}$ が決定される。あるいは、球面内の領域を考える場合は、原点で発散しないという条件より $B_{n,m}^{(\cdot)}$ がゼロになり、球面上の条件より $A_{n,m}^{(\cdot)}$ が決定される。

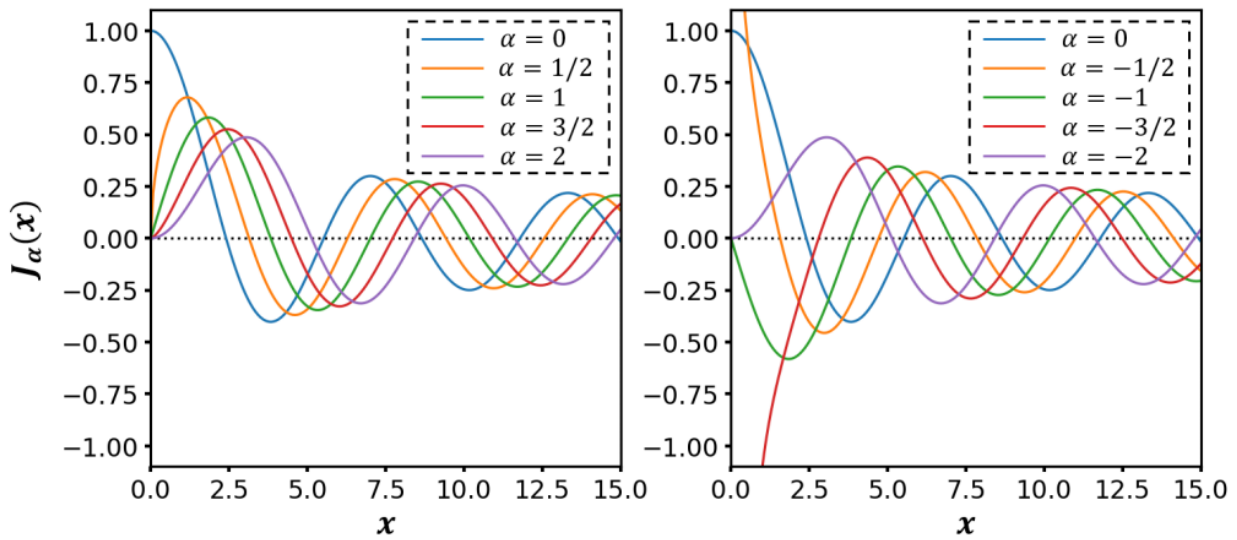


図 1.14 ベッセル関数 $J_\alpha(x)$ の関数形

この式によって一般に複素数 α に対して定義できる。ただし、 $\Gamma(z)$ はガンマ関数と呼ばれる。実部が正の複素数 z に対しては次のように表される^{†32}。

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t) dt \tag{1.C.118}$$

特に、 α が整数 m の場合は次のように書くこともできる。

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(mt - x \sin t) dt \tag{1.C.119}$$

関数形

図 1.14 にベッセル関数 $J_\alpha(x)$ を図示した。まず、 α が非負の場合について、 $J_0(0) = 1$ であり、 $\alpha > 0$ のとき $J_\alpha(0) = 0$ である。グラフは三角関数のようにうねっているが、周期関数ではない。 $J_\alpha(x) = 0$ となる x (ゼロ点) は α が大きくなる程原点から離れていく。ゼロ点は解析的に表現されないので、数値的に求める必要がある。いくつかの値を表 1.2 に示す。 $x \gg 1$ のとき、

$$J_\alpha(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{2\alpha + 1}{4}\pi\right) \tag{1.C.120}$$

^{†32} ガンマ関数は階乗の一般化である。ゼロと負の整数を除く複素数 z に対して次式が成り立つ。

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$$

実部がゼロまたは負の数である複素数 z に対しては、上式が成り立つようにして順次定義される。特に、 $\Gamma(1) = 1, \Gamma(n + 1) = n!, \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ である。

表 1.2 ベッセル関数 $J_\alpha(x)$ の n 番目のゼロ点の値

n	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$
1	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715
2	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386
3	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002
4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801
5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178
n	$J_{0.5}(x)$	$J_{1.5}(x)$	$J_{2.5}(x)$	$J_{3.5}(x)$	$J_{4.5}(x)$	$J_{5.5}(x)$
1	3.1416	4.4934	5.7635	6.9879	8.1826	9.3558
2	6.2832	7.7253	9.0950	10.4171	11.7049	12.9665
3	9.4248	10.9041	12.3229	13.6980	15.0397	16.3547
4	12.5664	14.0662	15.5146	16.9236	18.3013	19.6532
5	15.7080	17.2208	18.6890	20.1218	21.5254	22.9046

と近似できる^{†33}。

$\alpha < 0$ の場合 (図の右側)、 α が整数 $-m$ ならば原点で収束し、 $\alpha = m$ のときの関数との間に次の関係がある。

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x) \quad (1.C.121)$$

α が整数でない場合は原点で発散し、 α が逆符号のときの関数とは独立である。

微分方程式

ベッセル関数は次の微分方程式の解である。

$$x^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + x \frac{d\varphi}{dx} + (\lambda x^2 - \alpha^2) \varphi = 0 \quad (1.C.122)$$

境界条件を与えない場合、微分方程式 (1.C.57) ($\lambda > 0$) の一般解として $\sin(\sqrt{\lambda}x)$ と $\cos(\sqrt{\lambda}x)$ の独立な 2 関数が得られるように、上式の解として第 1 種ベッセル関数 $J_\alpha(\sqrt{\lambda}x)$ と第 2 種ベッセル関数

$$N_\alpha(\sqrt{\lambda}x) = \frac{J_\alpha(\sqrt{\lambda}x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(\sqrt{\lambda}x)}{\sin(\alpha\pi)} \quad (1.C.123)$$

の 2 つが得られる。ただし、 α が整数 n の場合は次の極限として $N_n(\sqrt{\lambda}x)$ を考える。

$$N_n(\sqrt{\lambda}x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} N_\alpha(\sqrt{\lambda}x) \quad (1.C.124)$$

^{†33} 後に説明する第 2 種ベッセル関数は $x \gg 1$ で次のように近似できる。

$$N_\alpha(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{2\alpha + 1}{4}\pi\right)$$

$N_\alpha(x)$ は原点で発散する。第 2 種ベッセル関数はノイマン関数と呼ばれることもある。あるいは、次の複素数値を返す 2 関数を考える場合もある。

$$H_\alpha^{(1)}(\sqrt{\lambda}x) = J_\alpha(\sqrt{\lambda}x) + iN_\alpha(\sqrt{\lambda}x) \quad (1.C.125)$$

$$H_\alpha^{(2)}(\sqrt{\lambda}x) = J_\alpha(\sqrt{\lambda}x) - iN_\alpha(\sqrt{\lambda}x) \quad (1.C.126)$$

これらはそれぞれ第 1 種と第 2 種のハンケル関数と呼ばれる。

区間 $[0, 1]$ で上の微分方程式を考え、境界条件として

$$x = 0 \text{ で有界, } \varphi(1) = 0 \quad (1.C.127)$$

を与えると、特異スツルム-リウヴィル固有値問題となる。ただし、 α は与えられた定数であり、固有値は λ であることに注意が必要である。任意の区間 $[0, a]$ での問題は適切に変数変換すればこの問題に帰着する。 $J_\alpha(t)$ の原点以外のゼロ点を小さい順に並べたものを $\{t = k_{\alpha,n}; n = 1, 2, 3, \dots\}$ とすると、固有値は $\lambda = k_{\alpha,n}^2$ となり、それに対応する固有関数は $J_\alpha(k_{\alpha,n}x)$ である。つまり、

$$(J_\alpha(k_{\alpha,1}x), J_\alpha(k_{\alpha,2}x), J_\alpha(k_{\alpha,3}x), \dots) \quad (1.C.128)$$

が直交関数系となる。第 n ゼロ点がちょうど境界 $x = 1$ に来るように伸縮した J_α の並びである。

直交関係

$$\int_0^1 J_\alpha(k_{\alpha,n}x)J_\alpha(k_{\alpha,n'}x)xdx = \frac{\delta_{nn'}}{2} [J'_\alpha(k_{\alpha,n})]^2 = \frac{\delta_{nn'}}{2} [J_{\alpha+1}(k_{\alpha,n})]^2 \quad (1.C.129)$$

漸化式

$$\frac{J_{\alpha+1}(x)}{x^\alpha} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{J_\alpha(x)}{x^\alpha} \right) \quad (1.C.130)$$

$$x^\alpha J_{\alpha-1}(x) = \frac{d}{dx} (x^\alpha J_\alpha(x)) \quad (1.C.131)$$

$$J_{\alpha+1}(x) = \frac{2\alpha}{x} J_\alpha(x) - J_{\alpha-1}(x) \quad (1.C.132)$$

$$J_{\alpha+1}(x) = -2J'_\alpha(x) + J_{\alpha-1}(x) \quad (1.C.133)$$

使いどころ 1 (2次元ラプラシアンに対する固有値問題の解)

ベッセル関数は 2 次元の場合に関する次の固有値問題の解になる。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = -\lambda \varphi \quad (1.C.134)$$

円周上で境界条件が与えられている場合は、2次元極座標 (r, θ) で考えることで問題が簡単になる。 $\varphi(r, \theta)$ を θ 方向に三角関数系で展開する。

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(r) \cos(n\theta) + b_n(r) \sin(n\theta)] \quad (1.C.135)$$

ただし、 $b_0(r) = 0$ である。この式を微分方程式に代入すると、次式を得る。

$$\sum_{n=0}^{\infty} [D_r^n a_n(r) \cos(n\theta) + D_r^n b_n(r) \sin(n\theta)] = 0 \quad (1.C.136)$$

$$\text{ただし, } D_r^n \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{n^2}{r^2} \varphi + \lambda \varphi \quad (1.C.137)$$

三角関数系は線形独立なので、上式が成り立つのは全ての n について次式が満たされる場合のみである。

$$D_r^n a_n(r) = 0 \quad \text{かつ} \quad D_r^n b_n(r) = 0 \quad (1.C.138)$$

この2階常微分方程式は上で述べたもので $\alpha = n$ とした場合なので、解はベッセル関数になる。例えば円内の領域を考え、境界条件として円周 $r = R$ で $\varphi = 0$ が与えられているとする。このとき、上で述べた固有値問題に帰着するので、ベッセル関数 $J_n(x)$ の m 番目 ($m = 1, 2, \dots$) のゼロ点 (表 1.2) を $x = k_{n,m}$ と書くと、固有値は $\lambda = (k_{n,m}/R)^2$ であり、それに対応する固有関数は

$$a_n(r) \text{ または } b_n(r) \propto J_n \left(k_{n,m} \frac{r}{R} \right) \quad (1.C.139)$$

となる。

使いどころ 2 (級数展開)

区間 $(0, 1)$ で定義された区分的に連続な任意の関数 $f(x)$ は、正規直交関数系

$$\varphi_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{J_{m+1}(k_{m,n})} J_m(k_{m,n}x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.C.140)$$

によって、次のようにフーリエ級数展開できる。

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (1.C.141)$$

$J_m(x)$ には好きな次数 m を採用すればよい。 $k_{m,n}$ は $J_m(x)$ の n 番目のゼロ点である。フーリエ係数は次のように計算される。

$$a_n = \int_0^1 \varphi_n(x) f(x) x dx \quad (1.C.142)$$

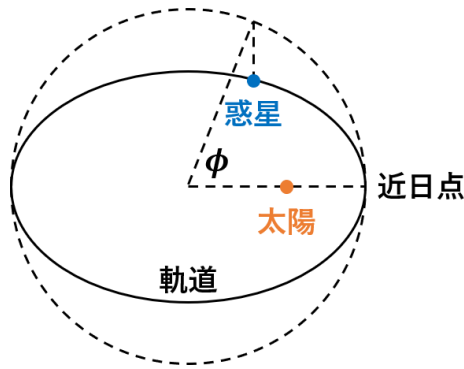


図 1.15 惑星のケプラー運動の軌道における離心近点角 ϕ の定義

使いどころ 3 (ケプラー運動の解)

太陽に比べて質量が十分に小さい惑星のような天体は、太陽を焦点の 1 つとする楕円軌道をとることが知られている (ケプラー運動)。図 1.15 のように、楕円軌道内の惑星の位置を表す変数として離心近点角 ϕ を考える。これは、楕円軌道を真円に射影したときの近日点から測った中心角である。また、運動の周期を P 、惑星が近日点にいるときの時刻を $t = 0$ とし、時刻をラジアン単位で表す変数 $\tau = 2\pi t/P$ (平均近点角) を導入する。このとき、次のケプラー方程式が成り立つ (e.g. 木下宙, 1998, 節 2.2)。

$$\phi - e \sin \phi = \tau \quad (1.C.143)$$

e は楕円軌道の離心率である。 ϕ を τ の関数として表すことを考える。上式より、 $\phi - \tau$ は ϕ について周期 2π の奇関数であることが分かるので、 τ についての関数としても同じ性質を持つ。よって、区間 $[-\pi, \pi]$ でフーリエ級数展開をし、奇関数の項だけを取り出すと、次式を得る。

$$\phi = \tau + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\tau) \quad (1.C.144)$$

奇関数と奇関数の積が偶関数となり、偶関数の区間 $[-\pi, \pi]$ での積分は区間 $[0, \pi]$ での積分の 2 倍に置き換わることを用いると、フーリエ係数は次のように計算できる。

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(n\tau)(\phi - \tau) d\tau \quad (1.C.145)$$

$$= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\tau) \left(\frac{d\phi}{d\tau} - 1 \right) d\tau \quad (1.C.146)$$

$$= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\phi - ne \sin \phi) d\phi \quad (1.C.147)$$

ただし、2 段目への変形では部分積分をし、3 段目では式 (1.C.143) を代入した。これは

ベッセル関数 $J_n(ne)$ の積分表示 (1.C.119) である^{†34}。よって、 ϕ の表式として次を得る。

$$\phi = \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(ne) \sin(n\tau) \quad (1.C.148)$$

これを太陽-惑星間の距離 r と楕円軌道の長半径 a の比に焼き直すと、次のように書ける (e.g. 木下宙, 1998, 付録 D.5.2)。

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{d}{de} J_n(ne) \cos(n\tau) \quad (1.C.149)$$

球ベッセル関数 $j_l(x), n_l(x)$

定義

球ベッセル関数 $j_l(x)$ は次数が半整数の第 1 種ベッセル関数を用いて次のように表される。

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x) \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.C.150)$$

$$= (-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \left(\frac{\sin x}{x} \right) \quad (1.C.151)$$

また、第 2 種ベッセル関数に対しても次のように定義される。

$$n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+1/2}(x) \quad (1.C.152)$$

$$= -(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \left(\frac{\cos x}{x} \right) \quad (1.C.153)$$

関数形

$j_l(x)$ は $x \rightarrow 0$ で収束し、 $n_l(x)$ は発散する。ベッセル関数と同じように、非周期的にうねる形をしており、 $x \gg 1$ では次のように近似できる。

$$j_l(x) \simeq \frac{1}{x} \sin \left(x - \frac{l\pi}{2} \right) \quad (1.C.154)$$

$$n_l(x) \simeq \frac{1}{x} \cos \left(x - \frac{l\pi}{2} \right) \quad (1.C.155)$$

一方、 $x \ll 1$ では次のように書ける。

$$j_l(x) \simeq \frac{x^l}{(2l+1)!!} \left(1 - \frac{x^2}{2(2l+3)} + \dots \right) \quad (1.C.156)$$

$$n_l(x) \simeq -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}} \quad (1.C.157)$$

^{†34} ベッセル関数の積分表示について詳しくは、例えば 福山秀敏 & 小形正男 (2003) の節 8.3 を参照されたい。

ただし、 $(2l + 1)!! = (2l + 1)(2l - 1) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1$ である。

微分方程式

$\varphi(x)$ に関する微分方程式

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d\varphi}{dx} + \left(\lambda - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \varphi = 0 \tag{1.C.158}$$

の独立な 2 解として $j_l(\sqrt{\lambda}x)$ と $n_l(\sqrt{\lambda}x)$ が得られる。実際に、 $\varphi(x) = w(x)/\sqrt{x}$ と置いて代入すれば、 $w(x)$ が次数 $(l + 1/2)$ のベッセル関数が満たす微分方程式に従うことが確かめられる。

境界条件として

$$x \rightarrow 0 \text{ で有界, } \varphi(1) = 0 \tag{1.C.159}$$

を課すと、ベッセル関数 $J_{l+1/2}(x)$ の n 番目のゼロ点を $x = k_{l+1/2,n}$ として固有値は $\lambda = k_{l+1/2,n}^2$ となり、それに対応する固有関数は $j_l(k_{l+1/2,n}x)$ となる。

使いどころ 1 (3 次元ラプラシアンに対する固有値問題の解)

球ベッセル関数は 3 次元の場合に関する次の固有値問題の解になる。

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \hat{\Omega}_{\theta\phi} \varphi = -\lambda \varphi \tag{1.C.160}$$

$\hat{\Omega}_{\theta\phi}$ は式 (1.C.96) で定義された微分演算子である。球面上で境界条件が与えられている場合は、極座標 (r, θ, ϕ) で考えることで、問題が簡単になる。 $\varphi(r, \theta, \phi)$ を球面調和関数で展開する。

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l [a_l^m(r) C_l^m(\theta, \phi) + b_l^m(r) S_l^m(\theta, \phi)] \tag{1.C.161}$$

ただし、 $b_l^0(r) = 0$ である。この式を微分方程式に代入すると、次式を得る。

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l [D_r^l a_l^m(r) C_l^m(\theta, \phi) + D_r^l b_l^m(r) S_l^m(\theta, \phi)] = 0 \tag{1.C.162}$$

$$\text{ただし, } D_r^l \varphi = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \left(\lambda - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \varphi \tag{1.C.163}$$

関数系 $\{C_l^m, S_l^m\}$ は線形独立なので、上式が成り立つのは全ての l, m について次式が満たされるときのみである。

$$D_r^l a_l^m(r) = 0 \quad \text{かつ} \quad D_r^l b_l^m(r) = 0 \tag{1.C.164}$$

例えば、球面内部の領域を考え、球面 $r = R$ 上で $\varphi = 0$ という境界条件が与えられている場合は、上式は上で述べた固有値問題になる。つまり、ベッセル関数 $J_{l+1/2}(x)$ の n 番

目のゼロ点 (表 1.2) を $x = k_{l+1/2,n}$ とし、固有値は $\lambda = (k_{l+1/2,n}/R)^2$ であり、それに対応する固有関数は

$$a_l^m(r) \text{ または } b_l^m(r) \propto j_l \left(k_{l+1/2,n} \frac{r}{R} \right) \quad (1.C.165)$$

となる。

使いどころ 2 (平面波の展開)

波数ベクトルが \mathbf{k} の平面波 $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ は次のように展開できる^{†35}。

$$\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n j_n(kr) P_n(\cos \Phi) \quad (1.C.166)$$

$$= 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i^n j_n(kr) Y_{n,m}^*(\theta_k, \phi_k) Y_{n,m}(\theta, \phi) \quad (1.C.167)$$

ただし、 k は \mathbf{k} の大きさ、 r は原点からの距離、 Φ は $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = kr \cos \Phi$ を満たす角である。特に、 \mathbf{k} の向きに z 軸を取った場合、 Φ は余緯度 θ に一致する。2 段目は加法定理 (1.C.82) を用いて 1 段目を変形したものである。 θ, ϕ は極座標の 2 変数であり、 θ_k, ϕ_k は \mathbf{k} の向きを極座標表示したものである。

ラゲール陪多項式 $L_n^m(x)$

ロドリゲスの式

ラゲール陪多項式 $L_n^m(x)$ は次のように表される。

$$L_n^m(x) = (-1)^m x^{-m} \exp(x) \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} [x^n \exp(-x)] \quad (n = 0, 1, 2, \dots; m = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (1.C.168)$$

$$= \frac{d^m}{dx^m} \left\{ \exp(x) \frac{d^n}{dx^n} [x^n \exp(-x)] \right\} = \frac{d^m}{dx^m} L_n(x) \quad (1.C.169)$$

ラゲール陪多項式はソニン多項式とも呼ばれる^{†36}。 $L_n^0(x)$ を特にラゲール多項式と呼び、 $L_n(x)$ と書く。

級数表示

$L_n^m(x)$ は次式でも表される。

$$L_n^m(x) = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^{k+m} \frac{(n!)^2}{k!(k+m)!(n-m-k)!} x^k \quad (1.C.170)$$

微分方程式

^{†35} 波の基本知識については付録 1.D を参照のこと。

^{†36} ソニン多項式と呼ばれている場合、係数の定義が異なる場合があるので注意を要する。

ラゲール陪多項式は次の特異スツルム-リウヴィル固有値問題の固有関数である。

$$x \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + (m + 1 - z) \frac{d\varphi}{dx} + (\lambda - m)\varphi = 0 \quad (1.C.171)$$

m は非負整数である。 $x \rightarrow +0$ で有界であり、 $x \rightarrow \infty$ で多項式として振舞う、言い換えると $\exp(-x/2)\varphi(x)$ が有界であるという境界条件を課す。すると、固有値は $n = m, m + 1, m + 2, \dots$ として $\lambda = n$ となり、それに対応する固有関数は $L_n^m(x)$ となる。つまり、与えられた m に対して $\{L_n^m(x); n = m, m + 1, m + 2, \dots\}$ が直交関数系になる。

直交関係

$$\int_0^\infty L_n^m(x)L_{n'}^m(x)x^m \exp(-x)dx = \delta_{nn'} \frac{(n!)^3}{(n-m)!} \quad (1.C.172)$$

似た形式の関係式として、次式も有用である。

$$\int_0^\infty [L_n^m(x)]^2 x^{m+1} \exp(-x)dx = \frac{(n!)^3}{(n-m)!} (2n - m + 1) \quad (1.C.173)$$

漸化式

$$(n + 1)L_{n+1}^m(x) - (2n + m + 1 - x)L_n^m(x) + (n + m)L_{n-1}^m(x) = 0 \quad (1.C.174)$$

$$[L_{n+1}^m(x)]' - [L_n^m(x)]' + L_n^m(x) = 0 \quad (1.C.175)$$

エルミート多項式 $H_n(x)$

ロドリゲスの式

エルミート多項式 $H_n(x)$ は次のように表される。

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} [\exp(-x^2)] \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.C.176)$$

級数表示

$H_n(x)$ は次式でも表される。

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k} \quad (1.C.177)$$

ただし、和の上限は $n/2$ を超えない最大の整数である。

微分方程式

エルミート多項式は次の特異スツルム-リウヴィル固有値問題の固有関数である。

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - 2x \frac{d\varphi}{dx} + 2\lambda \varphi = 0 \quad (1.C.178)$$

$|x| \rightarrow \infty$ で多項式のように振舞う、言い換えると $\exp(-x^2/2)\varphi(x)$ が有界であるという境界条件を課す。すると、 $n = 0, 1, 2, \dots$ として固有値は $\lambda = n$ となり、それに対応する固有関数は $H_n(x)$ となる。

直交関係

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_{n'}(x) \exp(-x^2)dx = \delta_{nn'}2^n n! \sqrt{\pi} \quad (1.C.179)$$

漸化式

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \quad (1.C.180)$$

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (1.C.181)$$

1.C.5 [トピック] 潮汐

図 1.16 は和歌山県串本町で観測された 1 ヶ月分の潮位の記録である。下段は上段のデータをフーリエ変換したものである。図を見ると、潮位の変動は様々な周期の成分から構成されることが分かるが、はっきりと確認できるのは半日周期、1 日周期、半月周期の 3 成分である。1 日に 2 回ずつ満潮・干潮になるのが半日周期、その 2 回の潮位が異なるのが 1 日周期、大潮と小潮を生み出すのが半月周期である。

この海洋潮汐の原因は地球が他天体から受ける潮汐力である。地球は太陽と月から潮汐力を受けており、後者は前者の約 2 倍である。地球と太陽、地球と月はそれぞれ、共通重心を中心にケプラー運動をしているが、地球が有限の大きさを持っているため、遠心力と重力のアンバランスによって地球を変形させようとする力がはたらく。これが潮汐力である。半月周期は太陽と月の位置関係によって起きる。半日周期と日周期の成分を具体的に考えるにはルジャンドル陪関数の知識を要する。本節では、半日周潮と日周潮の仕組みを単純化したモデルによって考える。定性的な説明をした後に、重力ポテンシャルによる具体的な説明をする。

簡単な説明

地球と月の 2 天体のみに注目する。両天体は共通重心を中心にして互いに互いの周りを回っている。この運動を円運動と考えることにする。この共通重心 G は地球中心 E から約 4600 km の位置にある。地球半径は約 6400 km なので、地球内部にある。地球の自転を無視した場合、地球に固定された各点は一律に同じ半径の円運動をしている (図 1.17 A)。つまり、地球中心の静止系で見た場合は、地球の各点は一様な遠心力を受ける。対して、月の引力は月からの距離に依存するため、場所によって異なる (図 1.17 B)。両者は地球中心^{†37}でちょうど相殺する。

^{†37} 地球を完全な球体と考え、地球重心は地球中心に一致しているとみなす。

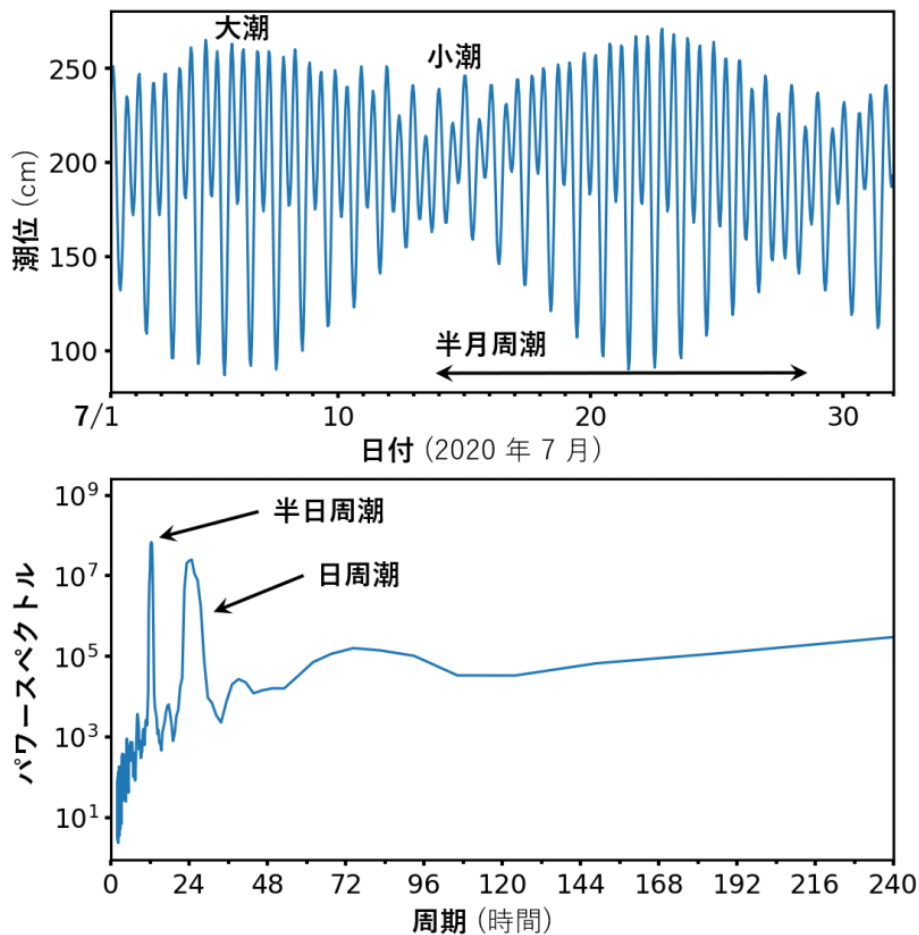


図 1.16 (上段) 和歌山県串本町で観測された潮位。2020 年 7 月の 1 ヶ月分の毎時測定結果。とある基準面に対する高さが cm の単位で示されている。気象庁ホームページより。(下段) 上段のデータのパワースペクトル。

月に面した側の地球表面では引力の大きさが勝るため、月に近づく向きに正味の力が働く。対して、月と反対側の地球表面では、遠心力の大きさが勝るため、月から離れる向きに正味の力が働く。これが潮汐力である。

潮汐力は、地球を月とその反対方向に扁平にしようとする力である。この潮汐力に引っ張られることで、海洋潮汐が起きる。地球は約 1 日の周期で自転しているため、海洋潮汐の基本成分は半日周期である。つまり、大雑把には、月が南中している時刻とその半日後に満潮になる。ただし、実際には様々な要因によって満潮の時刻はずれる。同様にして、太陽によっても潮汐力が働く。太陽と月の位置関係は約 1 ヶ月周期で変化するため、月による潮汐力と太陽による潮汐力の強め合い・弱め合いが半月周期で起きる。これが半月周潮を起こす。具体的には、地球から見て太陽と月が同じ方向または反対の方向にあるときに大潮となり、直角に位置しているときに小潮となる。

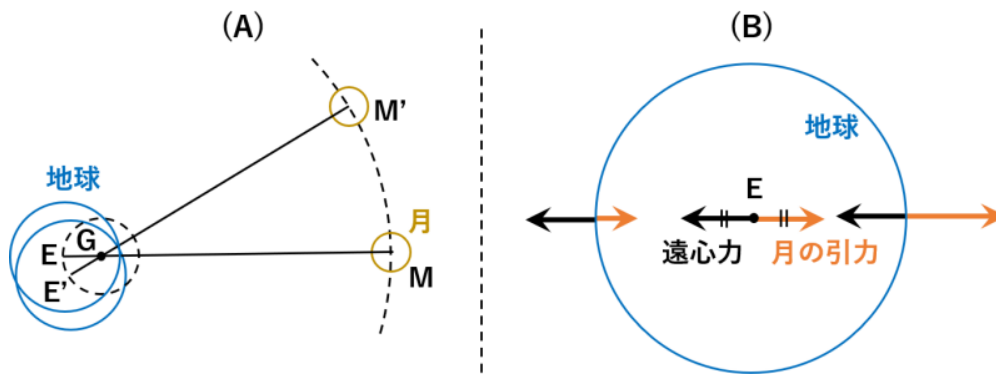


図 1.17 (A) 共通重心 G 周りのケプラー運動の様子。(B) ケプラー運動の遠心力と月による引力とのバランス関係。

ポテンシャルによる説明

地球の中心 O と月 Q の距離を d (定数) とし、O から距離 r の点 P を考える。点 P は地球内部または近傍を想定しているため、 $r/d \ll 1$ である。月の質量を M とする。OP と OQ のなす角を Ψ とすると、PQ の長さ l は余弦定理より次のように書ける。

$$l = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \Psi} \tag{1.C.182}$$

月が点 P に及ぼす重力ポテンシャル V は l に反比例するが、公式 (1.C.83) を用いてルジャンドル多項式 $P_n(x)$ で展開することで、次のように書ける。

$$V = \frac{GM}{l} \tag{1.C.183}$$

$$= \frac{GM}{d} \frac{1}{\sqrt{1 + (r/d)^2 - 2(r/d) \cos \Psi}} \tag{1.C.184}$$

$$= \frac{GM}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{d}\right)^n P_n(\cos \Psi) \tag{1.C.185}$$

G は重力定数である。最初の数項を書き出すと次のとおりである。

$$V = \frac{GM}{d} \left[1 + \frac{r}{d} \cos \Psi + \left(\frac{r}{d}\right)^2 \frac{3 \cos^2 \Psi - 1}{2} + \dots \right] \tag{1.C.186}$$

第 1 項は定数なので、重力には寄与しない。第 2 項は、OQ の向きに x 軸をとると、

$$V_1 = \frac{GM}{d^2} x \tag{1.C.187}$$

と表せる。よって、この項が作り出す重力 $\mathbf{g} = \nabla V_1 = (GM/d^2)\hat{\mathbf{x}}$ は各点で一様に OQ の向きである。この力は地球をケプラー運動させる力であり、地球中心 O の静止系で見ると、ちょうど遠心力と相殺する。結局、潮汐力に関わるのは第 3 項以降である。第 4 項以降は第 3 項に比

べ r/d のオーダーで小さいので、無視する。よって、次式のことを潮汐ポテンシャルと呼ぶことにする。

$$V_2 = \frac{GMr^2}{d^3} \frac{3 \cos^2 \Psi - 1}{2} \quad (1.C.188)$$

潮位は潮汐ポテンシャルが変化すると即座に対応し、海水面は常に等ポテンシャル面に一致すると考える。この考え方を平衡潮という。実際の海洋潮汐は、陸地があることや海底で摩擦が働くことなどの様々な要因によって、平衡潮とは異なる様相を示す。しかし、海洋潮汐を具体的に考える第一歩としては良い近似だと思われる。 V_2 は $\Psi = 0, \pi$ のときに最大になる。等ポテンシャル面は地球から月を見た方向を軸としたラグビーボールのような対称性を持った形状になる。この等ポテンシャル面の中を地球が自転すると、基本的に半日周期が現れる。更に、月が赤道面に無い場合、すなわち月の公転面に地球の自転軸が垂直でない場合は、1日周期も現れることになる。このことを数式で説明する。

地球中心を原点 O とし、 z 軸を地球の自転軸にとる。この座標系で極座標表示をしたときの月の方角を (θ', ϕ') と書く。ただし、 $\phi' = 0$ と固定しておく。点 P の極座標表示を (r, θ, ϕ) とする。ただし、地球は自転しているので、月が南中してから再び南中するまでの時間を P とし、 $\phi = 2\pi t/P$ と書ける。 V_2 をルジャンドル多項式を用いた形に書き直し、加法定理 (1.C.81) を用いることで、次式を得る。

$$V_2 = \frac{GMr^2}{d^3} P_2(\cos \Psi) \quad (1.C.189)$$

$$= \frac{GMr^2}{d^3} \left[P_2^0(\cos \theta') P_2^0(\cos \theta) + \frac{1}{3} P_2^1(\cos \theta') P_2^1(\cos \theta) \cos \phi + \frac{1}{12} P_2^2(\cos \theta') P_2^2(\cos \theta) \cos(2\phi) \right] \quad (1.C.190)$$

上式の第 1 項は自転 (ϕ) には依らず、月の余緯度 θ' の変化による周期を持つ項である。第 2 項は $\cos \phi$ に依存するので、1日周期性を強く持つ項である。これが日周潮に相当する。

$$P_2^1(\cos \theta') = 3 \sin \theta' \cos \theta' \quad (1.C.191)$$

に依存するので、月が赤道面 $\theta' = \pi/2$ にあるときは現れない成分である。月と太陽の地球周りの公転面がほとんど一致していると考え、夏は地球から見て太陽と月が直角の方向にあるときに $\theta' = \pi/2$ となる。図 1.16 を見ると、確かに小潮の時期に日周潮 (1日2回の振幅の差) が小さくなっている。日周潮は $P_2^1(\cos \theta)$ に依存することから、中緯度の地域で大きく現れる成分であることも分かる。式 (1.C.190) の第 3 項は $\cos(2\phi)$ に依存するので、半日周期性を強く持つ項である。これが半日周潮に相当する。

$$P_2^2(\cos \theta) = 3 \sin^2 \theta \quad (1.C.192)$$

に依存するので、低緯度の地域ほど大きく現れる成分であることが分かる。

1.C.6 フーリエ変換

節 1.C.4 で、有限区間で定義された任意の関数が三角関数のフーリエ級数で展開できることを述べた。この考え方を拡張し、三角関数とオイラーの公式

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x \quad (1.C.193)$$

で結ばれる複素指数関数によって、無限区間で定義される関数を展開する考え方をフーリエ変換という。具体的には、関数 $f(x)$ に対して次の関係にある関数 $\hat{f}(k)$ を $f(x)$ のフーリエ変換という。

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ikx) dx \quad (1.C.194)$$

対して、次式を $\hat{f}(k)$ のフーリエ逆変換という^{†38}。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \exp(ikx) dk \quad (1.C.195)$$

$f(x)$ が区分的に滑らかで $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ (絶対可積分) である場合、フーリエ逆変換は元の関数 $f(x)$ に一致する。区分的に滑らかとは、1 階導関数が区分的に連続なことを言う。

実関数 $f(x)$ のフーリエ変換 (一般に複素数を返す関数) を $\hat{f}(k)$ としたとき、次の性質がある。ただし、 $f(x) \rightarrow \hat{f}(k)$ のように書く。

$$af_1(x) + bf_2(x) \rightarrow a\hat{f}_1(k) + b\hat{f}_2(k) \quad (1.C.196)$$

$$f(ax) \rightarrow \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{k}{a}\right) \quad (1.C.197)$$

$$f(x - x_0) \rightarrow \hat{f}(k) \exp(-ikx_0) \quad (1.C.198)$$

$$f'(x) \rightarrow ik\hat{f}(k) \quad (1.C.199)$$

$$\hat{f}^*(k) = \hat{f}(-k) \quad (1.C.200)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(k)\hat{g}(k)dk \quad (1.C.201)$$

最後の式はパーセバルの定理と呼ばれる^{†39}。

^{†38} ここではフーリエ変換の式に $1/(2\pi)$ が係るように定義しているが、逆変換の式に係る、あるいは両方の式に $1/\sqrt{2\pi}$ が係るように定義しても良い。また、ここではフーリエ変換を $\exp(-ikx)$ 、逆変換を $\exp(ikx)$ を用いて行っているが、 k の符号を逆にしても良い。

^{†39} フーリエ変換と逆変換の両方に $1/\sqrt{2\pi}$ が係るように定義した場合は、等式に 2π が現れない。

フーリエ変換に関連して、次の公式がある。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) dk = 2\pi\delta(x) \quad (1.C.202)$$

$\delta(x)$ はデルタ関数と呼ばれる、極限的な意味での関数である。デルタ関数については次節で説明する。

関数 $f(x), g(x)$ に対して、次の演算を畳み込み (convolution) という。

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s) ds \quad (1.C.203)$$

畳み込みは可換であり、結合則を満たす。

$$f(x) * g(x) = g(x) * f(x) \quad (1.C.204)$$

$$f(x) * [g(x) * h(x)] = [f(x) * g(x)] * h(x) \quad (1.C.205)$$

畳み込みの微分は次の性質を持つ。

$$[f(x) * g(x)]' = f'(x) * g(x) = f(x) * g'(x) \quad (1.C.206)$$

畳み込みのフーリエ変換は次のようになる。ただし、変換の係数 $1/(2\pi)$ の定義の仕方によって係数は異なる。

$$f(x) * g(x) \longrightarrow 2\pi\hat{f}(k)\hat{g}(k) \quad (1.C.207)$$

$$f(x)g(x) \longrightarrow \hat{f}(k) * \hat{g}(k) \quad (1.C.208)$$

1.C.7 デルタ関数

どのような x のべき乗を乗じても $|x| \rightarrow \infty$ でゼロに収束するような任意の滑らかな関数 $f(x)$ に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0) \quad (1.C.209)$$

となるような関数 $\delta(x)$ を超関数の意味で考えることができる。これをデルタ関数という。

例えば、次の全ての性質を満たす連続関数の列 $\{\delta_n(x); n = 1, 2, 3, \dots\}$ は $n \rightarrow \infty$ の極限でデルタ関数として振舞うことが知られている^{†40}。

$$\delta_n(x) \geq 0; \quad |x| > \frac{1}{n} \text{ のとき } \delta_n(x) = 0; \quad \int_{-1}^1 \delta_n(x)dx = 1 \quad (1.C.210)$$

^{†40} 例えば、次のような関数である。

$$\delta_n(x) = \begin{cases} Cn \exp[-1/(1-n^2x^2)] & (|x| < 1/n) \\ 0 & (|x| \geq 1/n) \end{cases}$$

ただし、定数 C は $\int_{-1}^1 \delta_1(x)dx = 1$ となるように選ぶ。

実際に、定積分の平均値の定理から、 $-1/n < \theta_n < 1/n$ となる θ_n がとれて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f(x) dx = f(\theta_n) \int_{-1/n}^{1/n} \delta_n(x) dx = f(\theta_n) \quad (1.C.211)$$

となり、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $f(\theta_n) \rightarrow f(0)$ となる。このことを指して

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) \quad (1.C.212)$$

と書く。この例を眺めると、デルタ関数は面積 1 を保ったまま、 $x = 0$ でピークを持つ山の幅を限りなく狭くしたような関数というイメージが持てる^{†41}。 $\delta(x)$ は次のような表現もできる。

$$\delta(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \exp(ikx) dk = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\lambda x)}{x} \quad (1.C.213)$$

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \exp(-nx^2) \quad (1.C.214)$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \quad (1.C.215)$$

$\delta(x)$ は形式的に次の公式に従う。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a) \quad (1.C.216)$$

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad (1.C.217)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (1.C.218)$$

$f(x) = 0$ となる点を $x = a_1, a_2, \dots, a_n$ としたとき、

$$\delta[f(x)] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{|f'(a_k)|} \delta(x - a_k) \quad (1.C.219)$$

である。特に、 $a \neq b$ に対して、

$$\delta[(x - a)(x - b)] = \frac{1}{|a - b|} [\delta(x - a) + \delta(x - b)] \quad (1.C.220)$$

である。

デルタ関数の微分は部分積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f'(x) dx \quad (1.C.221)$$

^{†41} ただし、デルタ関数は数学的には「関数 $f(x)$ を与えたときに値 $f(0)$ を返す写像」として定義されるものであり、 $\delta(x)$ は良い性質の関数 $f(x)$ を乗じて積分した場合のみ意味をなす記号である。

が形式的に行えるように、対象の任意の関数 $f(x)$ に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)f(x)dx = -f'(0) \quad (1.C.222)$$

を満たすものとして定義される。これに関連する公式には次のものがある。

$$x\delta'(x) = -\delta(x) \quad (1.C.223)$$

付録 1.D 波の考え方

MHD では様々な種類の波を考えることがある。ここで言う「波」とは、場の量の擾乱の情報が流体の速度 (流速) とは違う速度で空間中を伝わる現象のことを指す。波の解析の基礎をなす線形波の考え方について、浅水波と内部重力波を例にして説明する。地球流体力学的な波については、例えば Pedlosky (2003) が詳しい。

1.D.1 波動方程式

例えば津波は、

- その波長に比べて海の深さ H (定数とする) が十分に浅い。
- 津波による水位の変動 $h(x, y, t)$ が H に比べて十分に小さい。
- 変動の時間スケールが 1 日に比べて十分短い。
- 背景の密度や圧力は水平方向に一様で、水の流れがない。或いは、一様な流れと同じ速度で動く観測系で見る。

などの仮定の下で、次の浅水波方程式に従うことが知られている。

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \quad (1.D.1)$$

$$\text{ただし, } c = \sqrt{gH} \quad (1.D.2)$$

g は重力加速度である。この偏微分方程式は、例えば

$$h(x, y, t) = h_1(x, y, t), \quad h(x, y, t) = h_2(x, y, t) \quad (1.D.3)$$

という 2 つの解があったとき、その重ね合わせ

$$h(x, y, t) = h_1(x, y, t) + h_2(x, y, t) \quad (1.D.4)$$

もまたこの偏微分方程式の解であるという性質を持つ。この性質を線形性と言う。線形な時間発展方程式に対しては後述する一連の線形波の考え方が通用する。

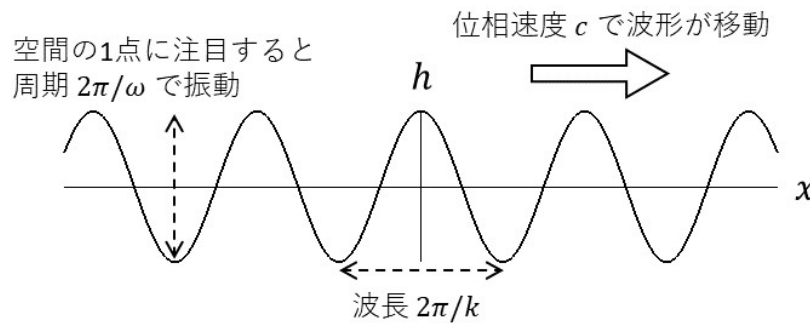


図 1.18 平面波

式 (1.D.1) の簡単な解として、

$$h(x, y, t) = h_0 \cos(kx - \omega t) \quad (1.D.5)$$

$$\text{ただし, } \omega = \pm c|k| \quad (1.D.6)$$

がある。実際に代入すると解であることが分かる。この解は平面波と呼ばれ、 $k > 0, \omega = c|k|$ あるいは $k < 0, \omega = -c|k|$ の場合は図 1.18 のように、波長 $2\pi/k$ のサインカーブが x 軸正の方向に速度 c で進むように見える波形を表す^{†42}。 $k < 0, \omega = c|k|$ あるいは $k > 0, \omega = -c|k|$ の場合は x 軸負の向きに速度 c で動くように見える。この速度 c は位相速度と呼ばれる^{†43}。 h_0 は振幅である。 y 軸方向には図の波形がずっと広がっている。 k は波数、 ω は角振動数と呼ばれる。計算を簡便にするために、波の解析時には h を敢えて複素数に拡張して考える。実際に観測される波形は h の実部である。すると、式 (1.D.5) の平面波は

$$h(x, y, t) = h_0 \exp[i(kx - \omega t)] \quad (1.D.7)$$

と表される^{†44}。 h_0 も一般には複素数となる。もっと一般に、 $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ の方向に位相速度 c で進む、波長 $2\pi/|\mathbf{k}|$ の平面波も式 (1.D.1) の解であり、

$$h(x, y, t) = h_0 \exp[i(k_x x + k_y y - \omega t)] \quad (1.D.8)$$

$$\text{ただし, } \omega = c|\mathbf{k}| \quad (1.D.9)$$

と書ける。

^{†42} 波長に比べて振幅が十分に小さいことが、水面波が浅水波方程式に従う条件のひとつである。図は縦軸が拡大されている。

^{†43} \exp の肩の $\theta = kx - \omega t$ を位相と言う。等位相面がその垂直な向きに動く速さが $c = \omega/|k|$ なので、 c は位相速度と呼ばれる。

^{†44} オイラーの公式

$$\exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$$

に従う複素指数関数を考えると、実数の場合と同じ指数法則や微積分の法則に従って計算ができるため、 \sin, \cos を陽に考えるより計算が簡便になる。

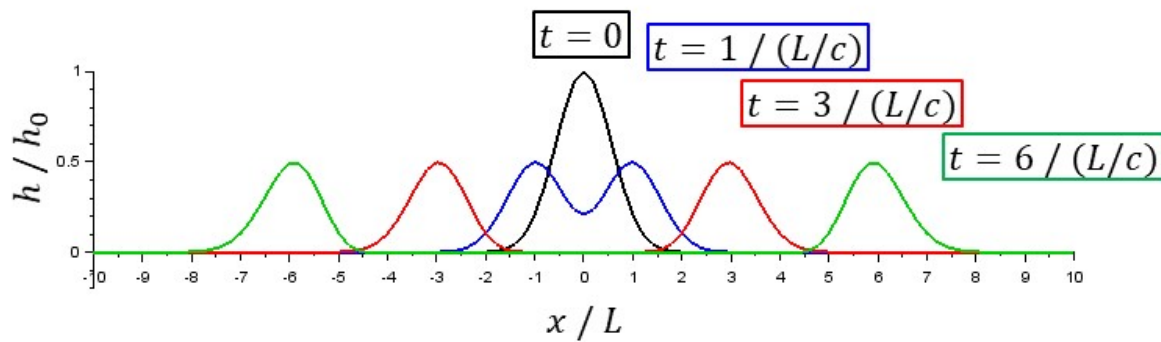


図 1.19 ガウス波束を初期条件に与えたときの浅水波方程式の数値計算結果：横軸 x は波の典型的な空間スケール L で、時間は位相速度が 1 になるように L/c で規格化されている。波高 h は典型的なスケール h_0 で規格化されている。

平面波は、サインカーブの波がずっと続く形の解なので、現実ではあまり見ないが、一般の波は平面波の重ね合わせで表すことができるため、波の解析においては特別な意味を持つ解である。例えば図 1.19 に、初期条件として

$$h(x, 0) = \exp\left[-\frac{\pi}{2}x^2\right] \tag{1.D.10}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(x, 0) = 0 \tag{1.D.11}$$

を与えて、 $c = 1$ とした浅水波方程式を数値計算した結果を示す。ただし、 y 軸方向には一様 ($\partial/\partial y = 0$) な場合を考えている。 $t = 0$ で $x = 0$ に置かれたガウス関数型の波束が高さ $1/2$ の波束 2 つに分かれて、それぞれ x 軸正の向きと負の向きに形を保ったまま速度 1 で移動する様子が分かる。この解の挙動は次のように解釈できる。初期条件 (1.D.10) は次のように、平面波 $\exp[ikx]$ の重ね合わせで表現できる。

$$h(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(k) \exp[ikx] dk \tag{1.D.12}$$

$$\text{ただし, } \hat{h}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{k^2}{2\pi}\right] \tag{1.D.13}$$

付録 1.C.6 で説明しているフーリエ変換である。各平面波の時間発展は $\omega(k) = c|k|$ として

$$\exp[i(kx \pm \omega(k)t)] \tag{1.D.14}$$

なので、平面波を重ね合わせた波束の時間発展は、

$$h(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(k) \{\alpha \exp[i(kx - \omega(k)t)] + \beta \exp[i(kx + \omega(k)t)]\} dk \tag{1.D.15}$$

$$\text{ただし, } \alpha + \beta = 1 \tag{1.D.16}$$

となる。ここで、初期条件 (1.D.11) より、

$$\left. \frac{\partial h}{\partial t} \right|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(k) \{-i\omega(k)\alpha + i\omega(k)\beta\} \exp [ikx] dk \quad (1.D.17)$$

があらゆる x についてゼロなので、

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \quad (1.D.18)$$

となる。よって、

$$h(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(k) \exp [i(kx - \omega(k)t)] dk + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(k) \exp [i(kx + \omega(k)t)] dk \quad (1.D.19)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(k) \exp [ik(x + ct)] dk + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(k) \exp [ik(x - ct)] dk \quad (1.D.20)$$

$$= \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{\pi}{2}(x + ct)^2 \right] + \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{\pi}{2}(x - ct)^2 \right] \quad (1.D.21)$$

と書ける。第 1 項が x 軸負の向きに進む成分で、第 2 項が正の向きに進む成分を表す。

1.D.2 波の分散

一般に、地球の大気は重力成層をしている。つまり、重力の影響で上層に行くほど圧力や密度が小さくなった状態で存在している。重力成層した安定な流体の中で鉛直方向の擾乱が加わると、重力と浮力を復元力とした振動をし、それが波として伝わる。このような波を内部重力波と言う。例えば、風が山を越えて吹くとき、山の存在により鉛直方向の風の流れが起こるので、山の風下側では内部重力波が起こり、風が上下にうねるようにして存在する。このような風のうねりは特に山岳波と呼ばれる。図 1.20 に山岳波の例を示した。これはひまわり 8 号衛星により観測された日本付近の雲の様子^{†45}だが、東北地方の太平洋側に、縦に並んだ雲の列が見える。これは奥羽山脈にぶつかった東向きの風が風下側で内部重力波を起こして上下にうねった結果、上昇流に伴って雲が発生し、その等位相面上に雲が並んでいると解釈できる。

内部重力波は、

- その擾乱の振幅が十分に小さい
- 背景の密度や圧力が水平方向に一様
- 背景の流速は水平方向の一様流

^{†45} 出典：ひまわり 8 号リアルタイム Web <https://himawari8.nict.go.jp/> (NICT, 2019 年 8 月 26 日閲覧)

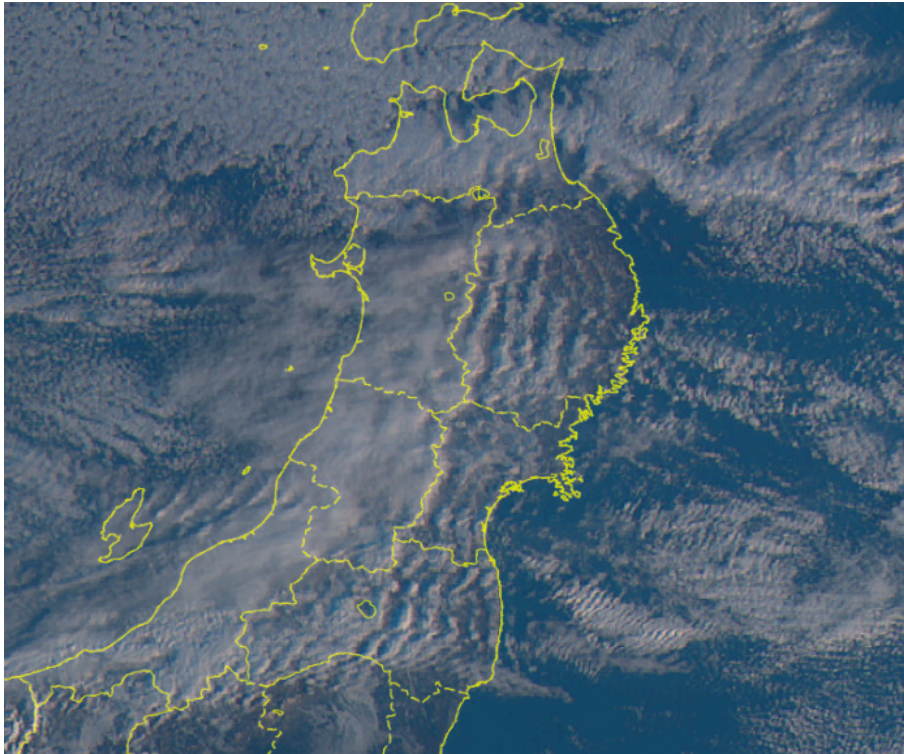


図 1.20 2016/01/31/08:30 の日本付近の雲の様子：東北地方の太平洋側に山岳波による雲の列が見られる。ひまわり 8 号リアルタイム Web <https://himawari8.nict.go.jp/> (NICT, 2019 年 8 月 26 日閲覧) より。

などの仮定の下で、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + N^2 \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1.D.22)$$

$$\text{ただし,} \quad N^2 = \frac{-g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \quad (1.D.23)$$

という偏微分方程式に従うことが知られている。ただし、背景場の静止系、すなわち風と同じ速度で動く観測系で見たときの方程式である。 g は重力加速度、 v_z, ρ_0 はそれぞれ、大気の高さ z 方向 (鉛直上向き) の速度場、大気 (背景場) の密度を表す。 N はブラント-バイサラ振動数と呼ばれる。

この方程式の性質を調べるために、 y 軸方向には一様な状況を考え、

$$v_z(x, z, t) = \hat{v}_z \exp [i(k_x x + k_z z - \omega t)] \quad (1.D.24)$$

という平面波を代入すると、

$$\{\omega^2(k_x^2 + k_z^2) - N^2 k_x^2\} \hat{v}_z = 0 \quad (1.D.25)$$

という関係式が導出される。ここで、 $\hat{v}_z = 0$ という自明な解以外の場合を考えると、

$$\omega^2 = \frac{N^2 k_x^2}{k_x^2 + k_z^2} \quad (1.D.26)$$

となる。この関係式を満たす平面波だけが方程式の解として許される。一般にこのような ω と k の間の関係式を分散関係 (dispersion relation) と呼ぶ。 $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$ として、この平面波の位相速度 $\omega/|\mathbf{k}|$ は

$$\frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = \pm \frac{N|k_x|}{|\mathbf{k}|^2} \quad (1.D.27)$$

となる。前節の浅水波方程式では分散関係が $\omega^2 = c^2 |\mathbf{k}|^2$ だったので、位相速度の大きさは \mathbf{k} に依らず一定だったが、本節の方程式の場合は平面波の位相速度は波数に依る。よって、一般に異なる波数の平面波の重ね合わせで表される波束は、構成するそれぞれの平面波が違う位相速度で移動するため、時間が経つと空間的に広がっていく。この性質を分散と言う。前節の方程式のような分散関係の波は分散のない波と呼ばれる。

1.D.3 群速度

一般に分散関係が $\omega = \omega(k_x, k_y, k_z)$ のとき、

$$\mathbf{c}_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \hat{\mathbf{z}} \quad (1.D.28)$$

というベクトルを群速度と言う。前節の分散関係の場合は

$$\mathbf{c}_g = \left(\frac{N}{|\mathbf{k}|} \sin^2 \vartheta \right) \hat{\mathbf{x}} - \left(\frac{N}{|\mathbf{k}|} \cos \vartheta \sin \vartheta \right) \hat{\mathbf{z}} \quad (1.D.29)$$

となる。ただし、 ϑ は

$$\cos \vartheta = \frac{k_x}{|\mathbf{k}|}, \quad \sin \vartheta = \frac{k_z}{|\mathbf{k}|} \quad (1.D.30)$$

となるようにとった。

$$\frac{\omega}{k_z} (\mathbf{c}_g \cdot \hat{\mathbf{z}}) < 0 \quad (1.D.31)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{c}_g = 0 \quad (1.D.32)$$

という関係があることがすぐに分かるので、内部重力波の場合、平面波の位相の進む向き \mathbf{k} と群速度 \mathbf{c}_g は垂直で、例えば $k_z > 0$ の場合は \mathbf{c}_g の z 成分は負であることが分かる。

群速度は波束の移動する速度を意味する。後から数式を用いてこのことを説明するが、群速度の理解が深まるような実験が「GFD-online (地球流体電脳倶楽部)」というチームによってウェ

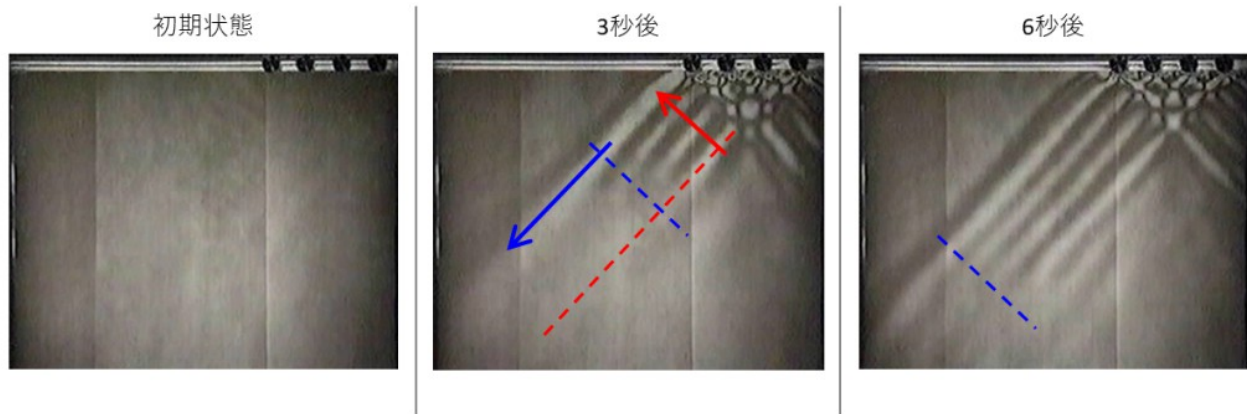


図 1.21 群速度と位相速度の違いを理解するための実験：食塩の濃度勾配を作り密度成層させた流体に、画面右上で丸棒 4 本を揺らすことで内部重力波を起こしている。モアレ法と呼ばれる手法で密度の擾乱を色の濃淡として可視化している。丸棒を揺らし始めると、平面波が赤い矢印の向きに移動する様子が見られるが、擾乱は青い矢印の向きに伸びていく。平面波の等位相面の 1 つを赤い破線、擾乱波束の先端の大体の位置を青い破線で示した。実験の詳細とこのスナップショットの原動画は地球流体基礎実験集 第 2 版 https://www.gfd-dennou.org/library/gfd_exp/index.htm (地球流体電脳倶楽部, 2021 年 5 月 2 日閲覧) を参照。

ブで公開されているので先に紹介しておく^{†46}。図 1.21 がその実験の様子のスナップショットである。重力成層に見立てて食塩の濃度勾配を作り、上層に行くほど密度が小さくなる状態にした水槽に波を起こす実験である。実験の詳細は図のキャプションや原ウェブページを見て欲しい。図を見ると、平面波の等位相面が移動する向きと擾乱が伝わる向きは垂直になっていることが分かる。この擾乱が伝わる向きが群速度に相当する。つまり、群速度は波の情報が伝わる速度、言い換えると波の振動によるエネルギーが伝わる速度を意味する。

群速度が波束の移動する速度を表すことを説明する。簡単のために 1 次元で考える。注目するスカラー場 $\phi(x, t)$ について次の波束を考える。

$$\phi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) \exp[i(kx - \omega t)] \quad (1.D.33)$$

ただし、 ω は分散関係 $\omega = \omega(k)$ で与えられたものとする。デルタ関数に関する公式

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) dk \quad (1.D.34)$$

^{†46} 地球流体基礎実験集 第 2 版 https://www.gfd-dennou.org/library/gfd_exp/index.htm (地球流体電脳倶楽部, 2021 年 5 月 2 日閲覧)

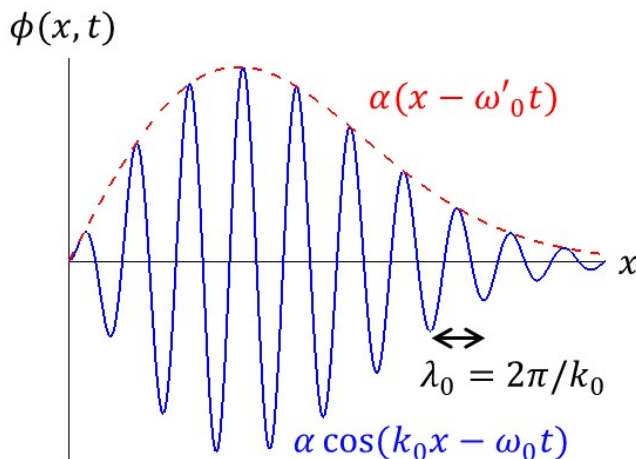


図 1.22 k_0 の周りの波数帯の平面波の重ね合わせで表される波束 (青色) とその包絡線 (赤色) の概念図

を見ると、無限小の幅を持つ関数は全波数帯 $(-\infty, \infty)$ における平面波の重ね合わせで表されることが分かる。一方で平面波自身は

$$\exp(ik_0x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \delta(k - k_0) \exp(ikx) \tag{1.D.35}$$

と書けるが、この式を見ると空間的に無限に広がる関数は無限小の幅の波数帯 (k_0) での平面波の重ね合わせで表されることが分かる。現実存在するような有限の幅を持つ波束は有限の幅の波数帯の平面波の重ね合わせで表される。式 (1.D.33) の $A(k)$ が k_0 の周りでのみ大きな値を持つとする。例えば式 (1.D.10) のガウス波束の場合は、式 (1.D.12) を見ると分かるように $k_0 \rightarrow 0$ であり、図 1.21 の実験の場合は赤い矢印の向きに移動するように見える平面波の波数が k_0 にあたる。このとき、分散関係を k_0 の周りで

$$\omega(k) \simeq \omega_0 + \omega'_0(k - k_0) \tag{1.D.36}$$

$$\text{ただし, } \omega_0 = \omega(k_0), \quad \omega'_0 = \frac{\partial \omega(k_0)}{\partial k} \tag{1.D.37}$$

と展開して式 (1.D.33) に代入することで、

$$\phi(x, t) \simeq \exp[i(k_0x - \omega_0t)] \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) \exp[i(k - k_0)(x - \omega'_0t)]}_{\alpha(x - \omega'_0t)} \tag{1.D.38}$$

と書ける。図 1.22 に示したように、 $\alpha(x - \omega'_0t)$ はこの波束の包絡線を表す。 α が $(x - \omega'_0t)$ の関数であることから、この包絡線は速度 ω'_0 で移動することが分かる。この ω'_0 が群速度にあたる。

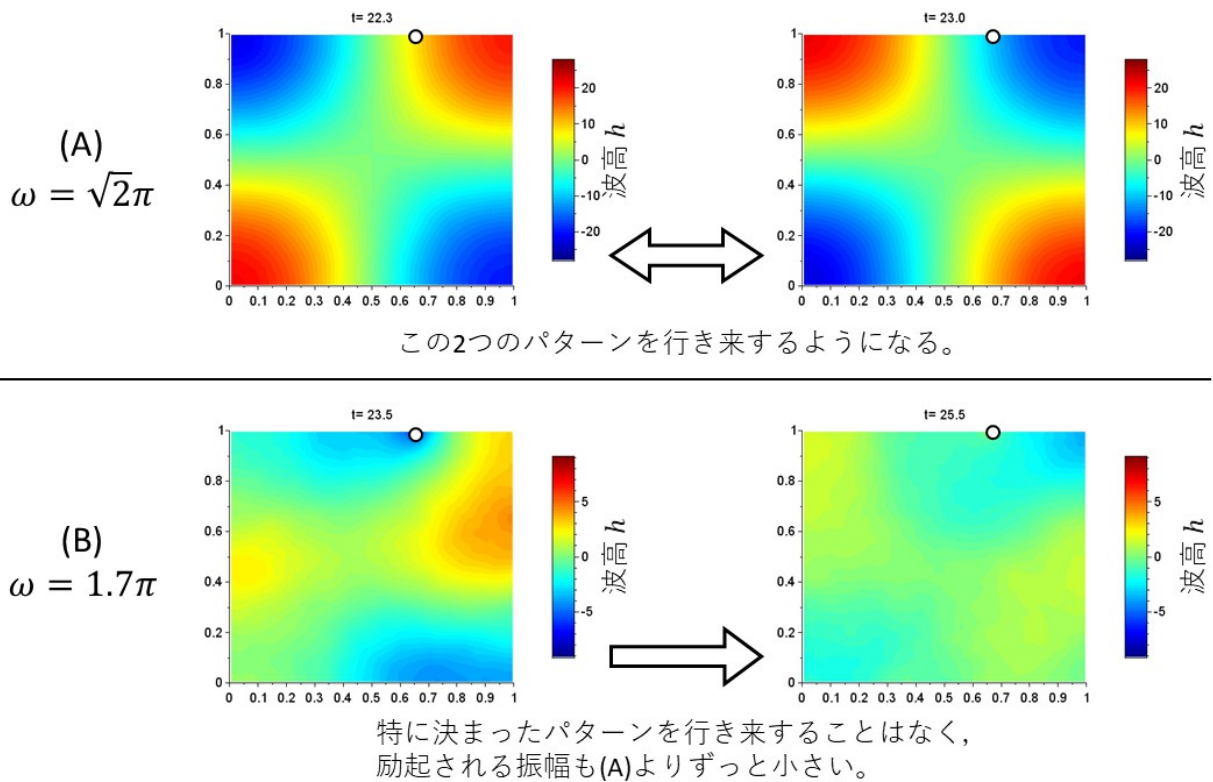


図 1.23 図の○で示した点で強制振動を与えたときの時間発展の数値計算結果：境界は $h(x, y, t)$ に関して自由端。与えた強制振動の角振動数は (A) が $\omega = \sqrt{2}\pi$ 、(B) が $\omega = 1.7\pi$ 。ただし、空間は L 、時間は $L/c = L/\sqrt{gH}$ 、角振動数は c/L 、波高 h は $h_0 = v_0\sqrt{H/g}/100$ で規格化されている。(A) ではある程度の時間が経つと図の 2 つの状態を行き来するようになるが、(B) では特定の状態を行き来することではなく、励起される波高の振幅も (A) のように時間が経つごとに大きくなるわけではない。原動画は https://youtu.be/6U_Zv6lv1CY

1.D.4 固有モード

前節までは、無限に広がる領域内、あるいは領域の境界条件を考えなくて良い程度の局所的な波について説明した。本節では境界に囲まれた領域内での大域的な波の挙動について説明する。節 1.D.1 で考えた浅水波方程式を、一辺の長さが L の正方形の領域内で考えてみる。領域の端(境界)は水面波を反射する壁と考える。境界条件を具体的に考えるために、式 (1.D.1) を導出す

る元となる式

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.D.39)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial y} \quad (1.D.40)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -H \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \quad (1.D.41)$$

を考える。 v_x, v_y はそれぞれ x, y 方向の速度場 (流速) の擾乱である。境界条件は速度場の壁に垂直な成分がゼロということになる。例えば、 x 軸方向に垂直な境界面 ($x = x_0$) では

$$v_x(x_0, y, t) = 0 \quad (1.D.42)$$

が境界条件である。式 (1.D.1) を考えるときは、式 (1.D.39) より

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y, t) = 0 \quad (1.D.43)$$

が境界条件となる。このような境界条件を「 v_x について固定端、 h について自由端」と表現する。

$$v_x(x, y, 0) = 0 \quad (1.D.44)$$

$$v_y(x, y, 0) = 0 \quad (1.D.45)$$

$$h(x, y, 0) = 0 \quad (1.D.46)$$

という初期条件の下で、上端の壁の一部 ($x = 2L/3, y = L$) において、周期 $2\pi/\omega$ の強制的な速度場の擾乱

$$v_y(2L/3, L, t) = v_0 \sin \omega t \quad (1.D.47)$$

を与え、系の時間発展を数値計算した結果の動画を YouTube に上げた^{†47}。動画のスナップショットを図 1.23 に示す。(A) は $\omega = \sqrt{2}\pi c/L$ 、(B) は $\omega = 1.7\pi c/L$ とした。図を見ると、(A) の角振動数の場合は大きな振幅の波高が励起されて一定の空間パターンを行き来するような波が見られる。このような状態の波を定在波と言う。一方、(B) の角振動数では定在波は励起されない。一般に、ある系で (A) のような波が安定して存在しうる角振動数を、その系の固有振動数と言う。また、各固有振動数における定在波の空間パターンを固有モードと言う。固有振動数と固有モードは系が従う偏微分方程式と境界条件 (境界の形や種類) によって決まる。

固有モードを調べるには、方程式 (1.D.1) に角振動数 ω で振動する解の形

$$h(x, y, t) = \hat{h}(x, y) \exp(i\omega t) \quad (1.D.48)$$

^{†47} https://youtu.be/6U_Zv6lv1CY

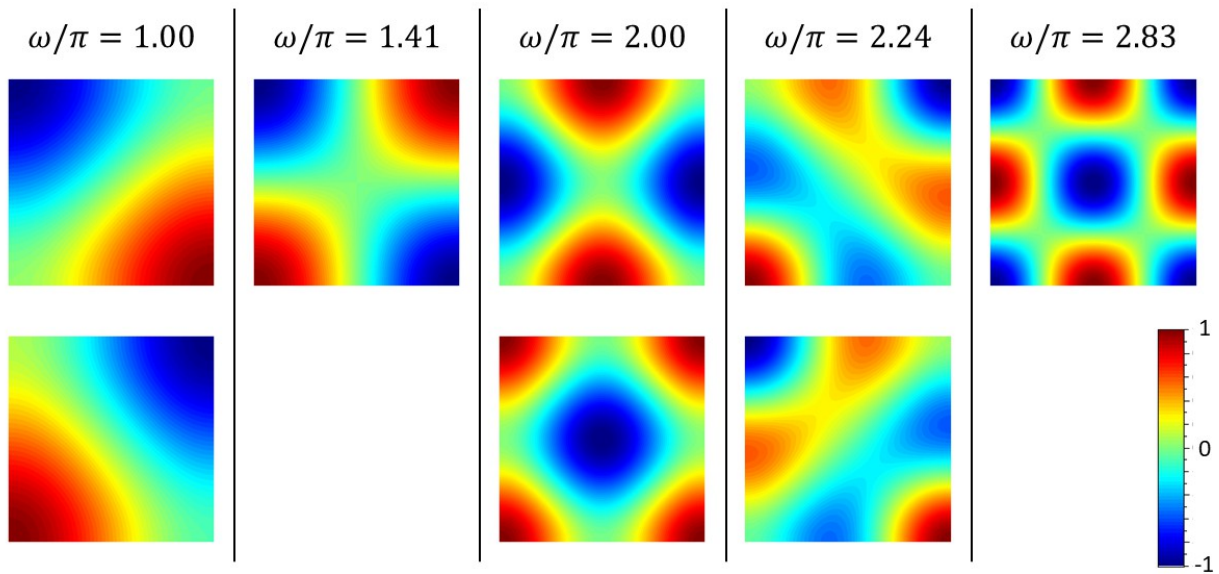


図 1.24 固有振動数と対応する固有モードの数値計算結果：縦に並んだ固有モードは縮退している。固有モードは最大値が 1 になるように規格化されていて、固有振動数は c/L で規格化されている。

を代入する。すると、

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\hat{h}(x,y) = \frac{\omega^2}{c^2}\hat{h}(x,y) \tag{1.D.49}$$

という関係式が出てくる。この関係を満たす ω と $\hat{h}(x,y)$ 、すなわち固有振動数と対応する固有モードを求めることを「固有値問題を解く」と表現する。この問題が行列の固有値と固有ベクトルを求める問題に対応することを説明するために、固有モードを数値計算する過程を考える。数値的に計算するために正方形の領域を N 個のグリッドに分け、式 (1.D.49) を節 1.5.4 で説明したような方法で離散化すると、

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} \hat{h}_1 \\ \hat{h}_2 \\ \vdots \\ \hat{h}_N \end{pmatrix} \tag{1.D.50}$$

と適当な N 次正方行列 \underline{D} を用いて

$$\underline{D}\vec{h} = \frac{\omega^2}{c^2}\vec{h} \tag{1.D.51}$$

となる。これは付録 1.A.4 で説明したように、 ω^2/c^2 が行列 \underline{D} の固有値であり、 \vec{h} がそれに対応する固有ベクトルであることを意味する。

行列 \underline{D} の固有値問題をコンピューターで解いて、求まった固有振動数のうち $|\omega|$ の小さいものから 8 個と、それに対応する固有モードを図 1.24 に示した。図を見ると、(A) の場合は左か

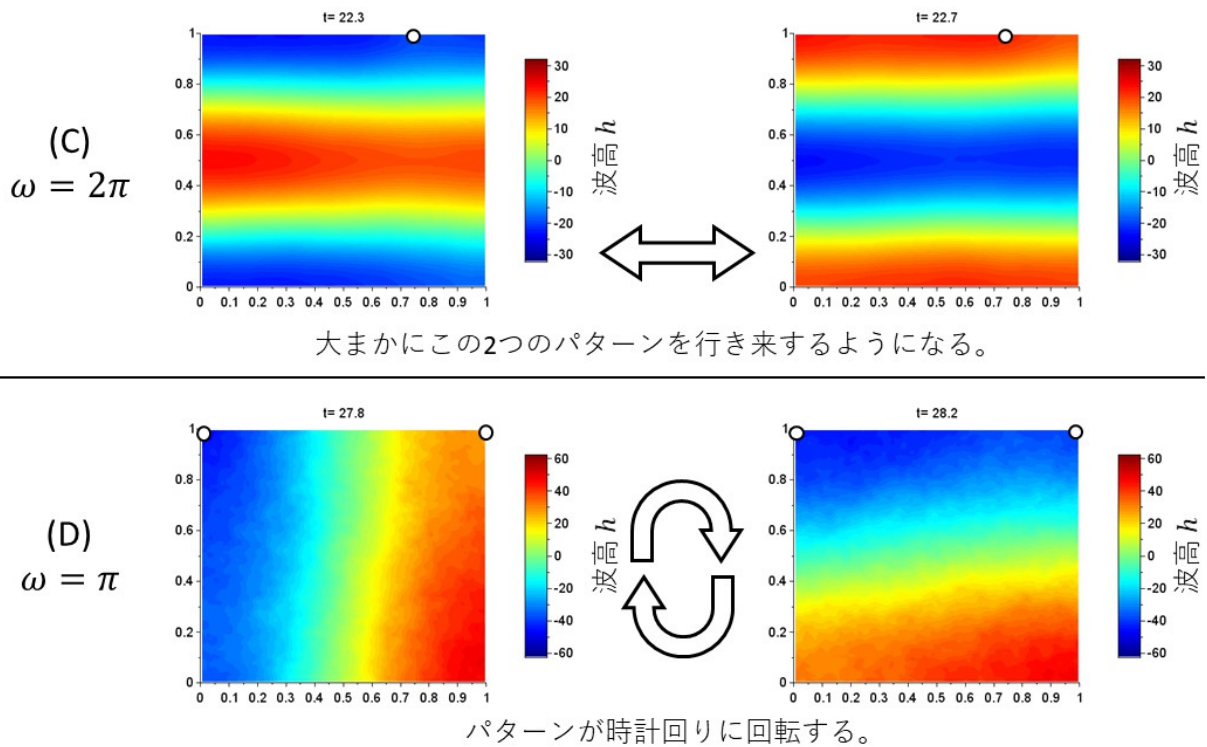


図 1.25 図の○で示した点で強制振動を与えたときの時間発展の数値計算結果：境界は $h(x, y, t)$ に関して自由端。与えた強制振動の角振動数は (C) が $\omega = 2\pi$ 、(D) が $\omega = \pi$ 。ただし、空間は L 、時間は $L/c = L/\sqrt{gH}$ 、角振動数は c/L 、波高 h は $h_0 = v_0\sqrt{H/g}/100$ で規格化されている。(C) は大まかに定在波が励起されている。(D) は波形が回転するパターンの固有モードが励起されている。原動画は https://youtu.be/6U_Zv61v1CY

ら 2 列目の固有モードが励起されていた一方で、(B) の場合の $\omega = 1.7\pi c/L$ という固有振動数は持たないことが分かる。

図 1.24 を見ると、 $\omega L/c = 1.00\pi, 2.00\pi$ などのモードは縮退している。 $(x = 3L/4, y = L)$ という点で角振動数 $\omega = 2\pi c/L$ の強制振動を与えた場合の、系の時間発展の数値計算結果を図 1.25 の (C) に示した。結果を見ると、固有モード (仮に $\hat{h}_0(x, y)$ とする) が励起されていることが分かるが、固有モードのパターンは図 1.24 の 2 パターン (仮に $\hat{h}_1(x, y), \hat{h}_2(x, y)$ とする) とは異なる。行列の固有値が縮退している場合に固有ベクトル 2 つの線形結合もまた固有ベクトルになったように、 \hat{h}_0 も \hat{h}_1, \hat{h}_2 の重ね合わせ

$$\hat{h}_0(x, y) = \alpha \hat{h}_1(x, y) + \beta \hat{h}_2(x, y) \tag{1.D.52}$$

で表すことができる。この場合はほとんど

$$\alpha = \beta \tag{1.D.53}$$

である。ただし、 α, β は一般には複素数である^{†48}。例えば、 $\omega = \pi c/L$ として、正方形の上側 2 つの角で位相を $\pi/2$ だけずらして、同じ強さの強制振動を与えた場合の数値計算結果を図 1.25 の (D) に示した。波形が時計回りに回転するような固有モードが励起されていることが分かる。図 1.24 の $\omega = 1.00\pi c/L$ の上のモードを $\hat{h}_1(x, y)$ 、下のモードを $\hat{h}_2(x, y)$ とした場合、この回転するモード $\hat{h}_0(x, y)$ は、ほとんど

$$\hat{h}_0(x, y) = \alpha\{\hat{h}_1(x, y) - i\hat{h}_2(x, y)\} \quad (1.D.54)$$

と表される。

この固有値問題を解析的に考えてみる。目標は、式 (1.D.49) と自由端境界条件を満たす非自明 ($\hat{h}(x, y) \neq 0$) な解が存在するような $\omega > 0$ の値 (固有値) と、そのときの解 (固有関数) の組を全て見つけることである。級数展開や固有値問題については付録 1.C で説明している。正方形の左下が $(x, y) = (0, 0)$ 、右上が $(x, y) = (L, L)$ となるように座標を設定する。まず、 x 方向の自由端境界条件を満たす完全系として、 \cos 系を選び、 $\hat{h}(x, y)$ を展開する。

$$\hat{h}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (1.D.55)$$

これを式 (1.D.49) に代入すると、次式を得る。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{d^2 a_n}{dy^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{L^2} \right) a_n \right] \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) = 0 \quad (1.D.56)$$

\cos 系は内積 $(f, g) = \int_0^L f(x)g(x)dx$ の下で直交関数系を成し、直交関数系は 1 次独立なので、上式が成り立つのは全ての n に対して次式が成り立つ場合に限る。

$$\frac{d^2 a_n}{dy^2} = - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{L^2} \right) a_n \quad (1.D.57)$$

これに y 方向の自由端境界条件を課したときの固有値問題の解は次のようになる。

$$\text{固有値: } \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 n^2}{L^2} = \frac{\pi^2 m^2}{L^2}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.D.58)$$

$$\text{固有関数: } a_{nm}(y) \propto \cos\left(\frac{\pi m}{L}y\right) \quad (1.D.59)$$

以上の議論をまとめると、初めの固有値問題の解は次のようになる。

$$\text{固有値: } \omega = \frac{\pi c}{L} \sqrt{n^2 + m^2}; \quad n, m = 0, 1, 2, \dots; \quad (n, m) \neq (0, 0) \quad (1.D.60)$$

$$\text{固有関数: } \hat{h}_{nm}(x, y) \propto \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi m}{L}y\right) \quad (1.D.61)$$

^{†48} 観測される波形は $\hat{h} \exp(i\omega t)$ の実部である。

つまり、固有振動数 $\omega = \pi c/L$ に対する固有モードは $(n, m) = (1, 0), (0, 1)$ の場合の 2 つ

$$\hat{h}_{10} = \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \quad (1.D.62)$$

$$\hat{h}_{01} = \cos\left(\frac{\pi}{L}y\right) \quad (1.D.63)$$

であることが分かる。図 1.24 に示した 2 つのモードはそれらの重ね合わせ

$$\hat{h}_{\text{上段}} = -\hat{h}_{10} + \hat{h}_{01} \quad (1.D.64)$$

$$\hat{h}_{\text{下段}} = \hat{h}_{10} + \hat{h}_{01} \quad (1.D.65)$$

にあたる。また、固有振動数 $\omega = \sqrt{2}\pi c/L$ に対する固有モードは $(n, m) = (1, 1)$ の場合の 1 つ

$$\hat{h}_{11} = \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{L}y\right) \quad (1.D.66)$$

であることなども分かる。

この問題のように正方形の 2 次元領域で固有値問題 (1.D.49) を考える場合、或いは立方体の 3 次元領域で固有値問題

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \lambda f(x, y, z) \quad (1.D.67)$$

を考える場合は、適切に境界条件を組み込めば三角関数同士の積によって固有モードを表せる。一方で、円形の 2 次元領域で同様の固有値問題を考えるときは三角関数とベッセル関数の積、球形の 3 次元領域を考える場合は球面調和関数と球ベッセル関数の積で固有モードが表されることを覚えておくと良い。詳しくは付録 1.C.4 にまとめてある。

1.D.5 波の減衰と不安定性

前節までで説明した方程式においては、分散関係の場合も固有振動数の場合も、 ω は実数として求まった。これは方程式を導くにあたって、ある種の理想化を施していたためである。一般的には ω が複素数として求まることがある。例えば、粘性や電気抵抗などの、エネルギーが不可逆的に熱に変わってしまうような過程を考慮すると、分散関係に虚数単位 i が混じり、 $\omega_i(k)$ を正の値をとる関数として、

$$\omega = \omega_r(k) - i\omega_i(k) \quad (1.D.68)$$

となることがある。このとき、平面波は

$$\exp[i(kx - \omega t)] = \exp[i(kx - \omega_r(k)t)] \exp[-\omega_i(k)t] \quad (1.D.69)$$

となり、波の振幅が時間の経過とともに指数関数的に小さくなるような解になる。この現象は内部減衰^{†49}と呼ばれる。

^{†49} ただし、一般に波の減衰と呼ばれる現象には、この内部減衰以外にも波の分散によって波束の高さが小さくなる現象や、波が球面的に広がることで波のエネルギー密度 (すなわち振幅) が小さくなる現象 (幾何減衰)、媒質 (背景場) が一様でないために生じる波の散乱による減衰 (散乱減衰) などを含む場合があるので注意が必要である。

固有モードを考える場合にも、固有振動数 (すなわち前節の行列 D の固有値) として、

$$\omega = \omega_r - i\omega_i \quad (1.D.70)$$

が求まることがある。これを仮定した振動解に戻すと、

$$\exp(i\omega t) = \exp(i\omega_r t) \exp(\omega_i t) \quad (1.D.71)$$

となる。 $\omega_i < 0$ の場合、これは自発的に減衰するモードを表す。一方、 $\omega_i > 0$ の場合、一旦励起されると時間経過と共に自発的に振幅が増大していくモードを表す。このようなモードを不安定と言う。不安定な波の解が現れることは、設定した系 (背景場) が安定して存在できないということである。波の解析手法は考える系の不安定性を調べるときにも用いられる。

2

電磁気学の基礎方程式

MHD の基礎方程式を考えるには、電磁気学の基礎方程式と流体力学の基礎方程式が出発点になる。この章では、電磁気学の諸法則の説明をしてから、それを流体に適用できる形に持っていく。運動物体での電磁場を扱うためには、途中で特殊相対性理論の枠組みでの話をせざるを得ないが、本書は基本的に光速より十分に遅い流体を対象とする。次章で説明する流体の基礎方程式には相対論の考え方は組み込まれていないので、本書の大部分で扱う非相対論的 MHD は光速に対して無視できない速さを持つ場合や、動的で強い重力下での相対論的な流体には適用できない。相対論的 MHD については第 7 章で説明する。

この章の内容は、主に砂川重信 (1999), Davidson (2001), Kulsrud (2004) を参考にしている。

2.1 マクスウェル方程式

電磁場を支配するマクスウェル方程式について説明する。

2.1.1 近接作用の考え方

「下敷きを髪に擦り付けると静電気が溜まって髪が下敷きにくっつく」というシチュエーションにおいて、「髪に現れた電荷と下敷きの電荷との間に引力が働いて両者は引き合う」というように考える場合、離れたもの間に力が働くという遠隔作用の立場に立っている。現代の物理学では、寧ろ近接作用の立場に立つことが主流である。この宇宙空間のあらゆる点と時刻において電磁場を定義する。下敷きと髪を擦って電荷が現れると、その電荷によって周りの電場が変化する。すると髪に現れた電荷は、その位置の電場に従って下敷きの方角の力を受ける。このように、時空間中に定義された電磁場を媒介して力を及ぼすという考え方が近接作用の立場である。従って、電磁場は場の量として記述される。

2.1.2 真空でのマクスウェル方程式

真空での電磁場はあらゆる点と時刻で次の法則に反してはならない。

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_e \quad (2.1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.1.3)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \quad (2.1.4)$$

これは真空でのマクスウェル方程式と呼ばれる。 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ は電場、 $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ は磁場^{†1}である。 $\rho_e(\mathbf{x}, t)$ は電荷密度と呼ばれるスカラー場で、 $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ は電流密度と呼ばれるベクトル場である。電流密度はしばしば略して電流と呼んでしまう。

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^4 \text{ A}^2, \quad (2.1.5)$$

$$\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6} \text{ m kg s}^{-2} \text{ A}^{-2} \quad (2.1.6)$$

はそれぞれ真空の誘電率、真空の透磁率と呼ばれる、次元を合わせるための定数である。 ρ_e と \mathbf{j} が空間と時間の関数として与えられると、この 4 法則によって磁場と電場の分布が決定される。ここで単位系の話をしておく。本書では、現在国際標準とされている MKSA 単位系で法則を記述するが、宇宙関係の分野では cgs ガウス単位系もよく使われる。MKSA 単位系と cgs ガウス単位系では諸法則の係数の記述が異なる。前者から後者への記述の変換は次のようにすれば良い^{†2}。

1. 光速 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ という関係を使って μ_0 を消去し、係数を ϵ_0, c で表す。
2. ϵ_0 を $1/(4\pi)$ と書き換え、 \mathbf{B} を \mathbf{B}/c と書き換える。

式 (2.1.1) はガウスの法則である。任意の領域 V で積分すると

$$\int_{\partial V} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_e dV \quad (2.1.7)$$

となる。つまりこの法則は、領域内の電荷の総和がその領域から流出するように見える電場の総和 (電束) になることを意味する。大雑把に言うと、電荷があるとその分電場が湧き出すような分布になる、ということである。

^{†1} \mathbf{B} は電磁気学では磁束密度と呼ばれるが、MHD の分野ではこれを磁場と呼ぶ。

^{†2} 式 (2.1.3) は cgs ガウス単位系では

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

と書かれる。これらの式を見ると、MKSA 単位系では磁場と電場の次元が速度の次元分だけ異なるが、cgs ガウス単位系では同じ次元を持つことが分かる。

式 (2.1.2) を任意の領域 V で積分すると、

$$\int_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.1.8)$$

となる。これは、磁場に対しては電荷のような湧き出しがないことを表す。磁場の面積分、すなわち、ある面を考えたときにその面を貫くように見える磁場の総量を磁束と言うが、この法則は磁束の一種の保存則を表す。ある領域に入った分だけ出てくるのである。接線の方向がその点での磁場の方向と一致し、任意の面を磁束に比例した本数だけ貫くような曲線群を磁力線と言う。この法則は、磁力線が途中で分裂したり合流することがなく、必ずループを描くか無限の彼方まで伸びていることを表す。この磁力線という概念は、磁場の可視化の方法として便利だが、MHD においてはある種の実体を帯びた重要な概念になることを節 4.2.2 で説明する。

式 (2.1.3) はファラデーの電磁誘導の法則である。任意の閉曲線 C で張られた面 S で積分すると、

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.1.9)$$

となる。大雑把に言うと、時間変化する磁束の周りには電場のループがあることを表す。

式 (2.1.4) はアンペール-マクスウェルの法則である。任意の閉曲線 C で張られた面 S で積分すると、

$$\int_C \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \int_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.1.10)$$

となる。大雑把に言うと、電流あるいは時間変化する電束の周りには磁場のループがあることを表す。マクスウェルが、それまで知られていたアンペールの法則に、変位電流と呼ばれる、電場の時間変化の項を加えて整備した法則である。

2.1.3 静止物体中のマクスウェル方程式

流体を構成する各分子の原子核や電子が作り出す電磁場は、前節で述べた真空でのマクスウェル方程式に従うべきであるが、MHD において知りたい電磁場はそういった微視的で複雑な電磁場をある時間、空間で平均した、巨視的な意味での電磁場である。前節の方程式を粗視化した、巨視的な電磁場が従う方程式を考える必要がある。

一般的な電磁気学の教科書では、ここで分極^{†3}や磁化^{†4}という概念を導入して粗視化した結果、

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (2.1.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.1.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j} \quad (2.1.14)$$

という方程式が導出される。これを静止物体中のマクスウェル方程式と言う。 \mathbf{D} , \mathbf{H} は

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.1.15)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (2.1.16)$$

と定義される。 \mathbf{P} は分極ベクトル、 \mathbf{M} は磁化ベクトルと呼ばれる場の量である。多くの物質で \mathbf{P} , \mathbf{M} は、静的な状況下でそれぞれ \mathbf{E} , \mathbf{B} に比例することが実験で分かっているので、

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.1.17)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \chi_m \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (2.1.18)$$

という関係を仮定する。 χ , χ_m はそれぞれ電気感受率、磁化率と呼ばれ、 ϵ , μ はそれぞれ誘電率、透磁率と呼ばれる。

MHD で扱うような液体金属やプラズマにおいては、分極の効果は小さいとして無視し、磁化の効果も、キュリー温度^{†5}を超えている場合を考えるので無視する。結局 $\epsilon = \epsilon_0$ 、 $\mu = \mu_0$ として考えるので、粗視化したマクスウェル方程式も式 (2.1.1)-(2.1.4) と形が変わらない。

2.2 ローレンツカ

電磁場の中を速度 \mathbf{v}_q で動く電荷 q には

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_q \times \mathbf{B}) \quad (2.2.1)$$

^{†3} 誘電体が外部電場を受けると、分子内に拘束された電子が引き寄せられて双極子をつくる。或いは水分子など、元から極性をもった分子からなる物質では、各分子の極性が電場によって揃う。これを平均して巨視的に見ると、分極という性質になる。

^{†4} 「電子は原子核の周りを回っている」「電子はスピンと呼ばれる自転をしている」と形容されるように、物質を構成する各分子や電子は磁気モーメントと呼ばれる量を持つ。磁性体が外部磁場を受けると各磁気モーメントの向きが揃う。これを巨視的に見ると、磁化という性質になる。あるいは、強磁性体は外部磁場が無くとも自発磁化を持つ。なお、プラズマの文脈で磁化は節 6.1.6 で説明する別の現象を指す。

^{†5} 常温で磁化率の高い物質であっても、キュリー温度と呼ばれる温度を超えると磁気モーメントが揃わなくなり、自発磁化がなくなる。

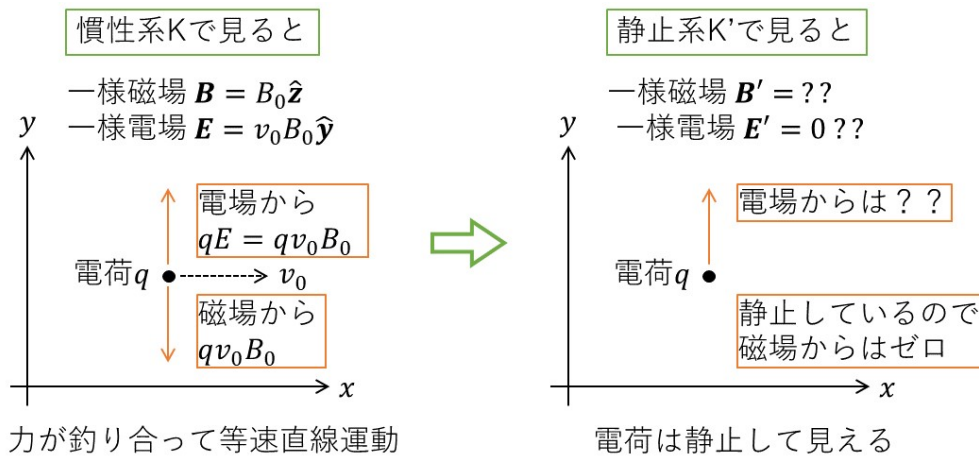


図 2.1 電磁場の変換についての思考実験

という力が働く。これをローレンツ力と言う。第 1 項は電荷が電場の向きに引かれる力を表し、クーロン力と呼ばれることがある。第 2 項は動く電荷が磁場の存在によって、フレミングの左手の法則で示される向きに受ける力を表し、この項だけを指してローレンツ力と言う場合もある。

これを流体に適用するために粗視化する。すなわち、単位体積あたりで合計すると、 $\sum q$ は電荷密度 ρ_e 、 $\sum qv_q$ は電流密度 \mathbf{j} に他ならないので、単位体積あたりのローレンツ力は

$$\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \tag{2.2.2}$$

となる^{†6}。

2.3 電磁場のローレンツ変換

図 2.1 のように、一様磁場 $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$ 、一様電場 $\mathbf{E} = v_0 B_0 \hat{y}$ が課された空間を考えたとき、電荷 q は図のようにローレンツ力が働いた結果、力が釣り合って等速直線運動をする。では、この状況を電荷が静止して見えるような慣性系で見るとどうなるだろうか。電荷は静止しているので磁場からは力を受けない。よって、電荷が静止し続けるためには電場がゼロにならないといけない。このような思考実験から分かるように、電場と磁場は観測する慣性系に依存した量である。違う慣性系から見るとどのように電場と磁場が変換されるかについては、特殊相対論によってその法則が与えられる。

特殊相対論によると、ある慣性系 K に対して図 2.2 のように一定の速度 V で動く慣性系 K'

^{†6} このとき、 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} も粗視化している。積の平均を平均の積で表していることになるので、 q と \mathbf{E} 、 qv_q と \mathbf{B} の間に相関 (共分散) がないことを暗に仮定している。

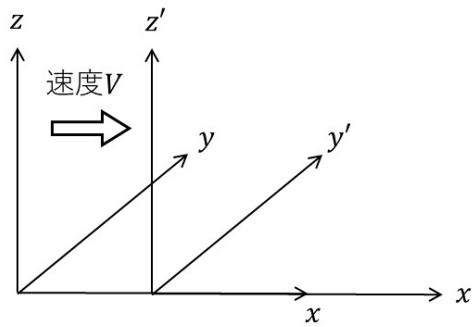


図 2.2 慣性系 K と K'

を考えた場合、時刻と座標は次のように変換される^{†7}。

$$x' = W(x - Vt) \quad (2.3.1)$$

$$y' = y, \quad z' = z \quad (2.3.2)$$

$$ct' = W \left(ct - \frac{V}{c}x \right) \quad (2.3.3)$$

これはローレンツ変換と呼ばれるもので、 c は光速、 W は

$$W = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (2.3.4)$$

と定義される。非相対論的極限 $|V|/c \ll 1$ において、ローレンツ変換は

$$x' = x - Vt \quad (2.3.5)$$

$$y' = y, \quad z' = z \quad (2.3.6)$$

$$t' = t \quad (2.3.7)$$

となり、ニュートン力学において仮定されていた座標変換であるガリレイ変換と一致する。

上記のようなローレンツ変換において電場と磁場は次のように変換する。

$$E'_x = E_x, \quad B'_x = B_x \quad (2.3.8)$$

$$E'_y = W(E_y - VB_z), \quad B'_y = W \left(B_y + \frac{V}{c^2}E_z \right) \quad (2.3.9)$$

$$E'_z = W(E_z + VB_y), \quad B'_z = W \left(B_z - \frac{V}{c^2}E_y \right) \quad (2.3.10)$$

観測系を変えると、電場の見え方は大きく変わる。一方で、非相対論的極限の場合は磁場の見え方は変わらないみなせる。図 2.1 の場合、 $V = v_0$ として上記の変換則を適用すると、静止系 K'

^{†7} 相対論について詳しく知りたい方は第 7 章を読んで欲しい。

での一様電場と一様磁場は

$$\mathbf{E}' = W(v_0 B_0 - v_0 B_0) \hat{\mathbf{y}} = 0 \quad (2.3.11)$$

$$\mathbf{B}' = \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} B_0 \hat{\mathbf{z}} \quad (2.3.12)$$

となっていることが分かる。確かに電荷の静止系で見ると電場はゼロになっている。

一方で、電荷密度と電流密度は上記のローレンツ変換において次のように変換する。

$$\rho'_e = W \left(\rho_e - \frac{V}{c^2} j_x \right) \quad (2.3.13)$$

$$j'_x = W (j_x - V \rho_e) \quad (2.3.14)$$

$$j'_y = j_y, \quad j'_z = j_z \quad (2.3.15)$$

2.4 オームの法則

静止した伝導体では、電流密度はしばしば自由電子に働く力に比例する。これをオームの法則と言う。流体においてもこの法則を適用し、微小領域において

$$\mathbf{j}_r = \sigma \mathbf{E}_r \quad (2.4.1)$$

を仮定する。ただし $\mathbf{j}_r, \mathbf{E}_r$ はこの微小領域の静止系で見たときの電流と電場であり、一般に微小領域が速度場 \mathbf{v} に従って動くときは、前節で説明した変換則を一般化して用いて、

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.4.2)$$

となる。ただし、非相対論的極限を考えている。電流は $\mathbf{j}_r = \mathbf{j} - \rho_e \mathbf{v}$ と変換するが、次節で述べる理由により典型的には $|\rho_e \mathbf{v}|/|\mathbf{j}| \sim (V/c)^2$ (ただし V は調べる流体の典型的な速度) となるので、非相対論的流体において $\mathbf{j}_r = \mathbf{j}$ とした。

σ は電気伝導率 (electrical conductivity) と呼ばれる。電気伝導率は流体の微視的性質の考察か、或いは観測や実験による結果によって決定されるべき量である。温度などの熱力学量に依ることが期待されるが、定数として考えられていることもある。液体金属における典型的な値は Davidson (2001) の Appendix 3、地球の外核における観測値や理論については Stacey (2007a), Price (2007), Stacey (2007b) を参考にすると良い。完全に電離したプラズマにおける理論は節 6.4 で説明する。

プラズマにおいては複数の仮定の下で上式を適用することになる。逆に、上式の精度が悪い系では、プラズマを記述するのに多流体方程式系や運動論を用いるべきかの選択が迫られる。詳しくは節 6.2 で説明する。例えば太陽大気 (光球や彩層) は僅かにしか電離しておらず、ほとんどの H, He 元素が中性粒子の状態で存在している。このようなプラズマでの現象を調べる際に

は、中性粒子との衝突による効果を含めたもう少し複雑な形式がオームの法則として採用される。詳細は一般化されたオームの法則の節 6.5.2 で説明する。

2.5 MHD 流体への適用

光速に対して十分に遅い伝導流体を考える際には、マクスウェル方程式をいくらか簡素化することで、電磁場の時間発展を支配する方程式は誘導方程式のひとつに集約される。

2.5.1 スケーリング

前節までで、MHD で使われる電磁気学の法則は全て説明した。ここで、

- 光速に対して十分に遅い流体を考える。
- 考える流体现象の時間スケールが十分に長い。

という仮定^{†8}の下で、方程式への寄与が常に小さく、無視できる項を 2 つ落とす。

まず、2 番目の仮定の具体的な意味を説明する。アンペール-マクスウェルの法則 (2.1.4) の両辺^{†9}に $\nabla \cdot$ を作用させ、ガウスの法則 (2.1.1) を代入すると、

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.5.1)$$

を得る。この式は、ある点に流れ込んだ正味の電流がその点での電荷の時間変化になるという意味であり、電荷の保存則を表す。オームの法則 (2.4.2) の両辺に $\nabla \cdot$ を作用させたものをこの式に代入し、ガウスの法則も使うと、

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\rho_e}{\tau_e} + \sigma \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (2.5.2)$$

という式が出てくる。ただし、 σ は定数としている。ここで、 $\tau_e = \epsilon_0 / \sigma$ は考える流体の電気伝導率で決まる値である。液体金属やプラズマの典型的な値 $\sigma = 10^{-4} - 10^6 \text{ S m}^{-1}$ を考えると、 $\tau_e = 10^{-17} - 10^{-7} \text{ s}$ となり、どの場合も 1 秒よりずっと短い値になる。 $\mathbf{v} = 0$ の状況を考えて、この式は

$$\rho_e(\mathbf{x}, t) = \rho_e(\mathbf{x}, 0) \exp[-t/\tau_e] \quad (2.5.3)$$

という解を持つ。つまり、十分に電気を通す流体の内部では、ある時刻に電荷が存在したとして

^{†8} 例えば太陽の表面付近で起こる現象においては、速くて 100 km s^{-1} のオーダーの速度である。或いはコロナ質量放出と呼ばれる現象などでは 1000 km s^{-1} のオーダーの速度が観測されることがあるが、それでもなお光速 $3 \times 10^5 \text{ km s}^{-1}$ に比べたら 1 % 程度である。

^{†9} 真空のマクスウェル方程式を参照しているが、形が同じだけで、考えているのは粗視化したマクスウェル方程式である。

も、その電荷は直ぐに τ_e の時間スケールで雲散霧消する^{†10}。この意味を込めて、 τ_e は電荷緩和時間と呼ばれる。

ただし、密度の小さいプラズマの場合、上述したような短い時間スケールにおいてオームの法則 (2.4.2) は適用できないため、上述の議論は意味をなさない。例えば太陽コロナ (温度や密度については表 6.2 参照) の場合、0.05 s 程度より長い時間スケールの現象に対してのみ、電子の慣性を無視することで式 (2.4.2) の形式のオームの法則が適用できる^{†11}。

いずれにせよ、調べたい現象の時間スケール T が τ_e やオームの法則を適用できる限界よりずっと長い場合、式 (2.5.2) は有効である。そのときの第 1 項と第 2 項の比は、

$$\frac{|\partial\rho_e/\partial t|}{|\rho_e/\tau_e|} \sim \frac{\tau_e}{T} \ll 1 \quad (2.5.4)$$

となり、第 2 項に比べて第 1 項は無視できる。 \sim は値が同じオーダーであることを表す。よって、第 2 項は第 3 項と釣り合う必要があるので、考える空間スケールを L 、流体の速度のスケールを V 、磁場強度のスケールを B 、電気伝導率のスケールを σ とすると、

$$\frac{\rho_e}{\tau_e} \sim \frac{\sigma VB}{L} \quad (2.5.5)$$

となる。更に電場強度のスケールを E としてガウスの法則も使ってスケーリングすると、結局

$$E \sim VB \quad (2.5.6)$$

となることが分かる。

次に、アンペール-マクスウェルの法則の磁場の項と変位電流の項の比を考えると、

$$\frac{|\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}|}{|\nabla\times\mathbf{B}|} \sim \frac{1/c^2\cdot E/T}{B/L} \sim \frac{L}{c^2T}\cdot\frac{E}{B} \quad (2.5.7)$$

である。ここで先ほどの関係 (2.5.6) を使うと、

$$\frac{|\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}|}{|\nabla\times\mathbf{B}|} \sim \frac{V}{c}\cdot\frac{L}{cT} \quad (2.5.8)$$

となる。1 番目の仮定より、この値は 1 よりずっと小さいことが分かる。よって、変位電流の項は今後無視する。アンペール-マクスウェルの法則は

^{†10} 今は巨視的な立場で議論しているので、ここで言う「電荷」は微視的な意味での電子やイオンなどを指すのではなく、それらの微視的電荷を適当な時空間で平均 (合計) した量のことである。

^{†11} 具体的には、電子の慣性や圧力の項を無視せずに残した形式のオームの法則 (6.2.157) において、ジュール抵抗の項に対して慣性項を無視できる条件を考えた。プラズマの電気抵抗については節 6.4.2 で説明しているスピッターの輸送係数によって見積もることができる。

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} \quad (2.5.9)$$

となる^{†12}。

次に、ローレンツ力 (2.2.2) の 2 項の比を考える。ガウスの法則 (2.1.1) とアンペールの法則 (2.5.9) を使うと、

$$\frac{|\rho_e \mathbf{E}|}{|\mathbf{j} \times \mathbf{B}|} \sim \frac{|\mu_0 \epsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}|}{|(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}|} \sim \frac{E^2/L}{c^2 B^2/L} \sim \frac{1}{c^2} \left(\frac{E}{B} \right)^2 \sim \frac{1}{c^2} \left(\frac{L}{T} \right)^2 \quad (2.5.10)$$

となり、やはり 1 よりずっと小さいことが分かる。よって電場から流体が受ける力は今後無視する。つまり、ローレンツ力は

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.5.11)$$

となる。

2.5.2 誘導方程式

ファラデーの法則 (2.1.3) にオームの法則 (2.4.2) を代入すると、

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{j} \right) \quad (2.5.12)$$

となり、更にアンペールの法則 (2.5.9) を代入すると、

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) \quad (2.5.13)$$

となる。これが、MHD において時間発展を司る 4 法則のうちの一つ、誘導方程式 (induction equation) である。ある時間ステップでの速度場 \mathbf{v} と磁場 \mathbf{B} の空間分布が分かれば、この方程式から磁場の時間発展が分かる。 $\eta = 1/(\mu_0 \sigma)$ は磁気拡散率 (magnetic diffusivity) と呼ばれる。

^{†12} まとめると、電荷緩和時間が考える時間スケールよりもずっと短いため、電荷保存則の時間変化の項が無視できることから、変位電流が無視できることにつながった。逆に、電荷緩和時間が考える時間スケールよりもずっと長いような流体、すなわち電気を通さないために電荷をため込むことができる流体を考える場合には、流体が光速よりもずっと遅いという仮定の下で、変位電流の代わりにファラデーの法則の時間変化項を無視することになる。このような場合の定式化を電気流体力学 (EHD) と言う (e.g. Zhakin, 2012)。

る^{†13}。特に η が空間的に一様の場合、ベクトル解析の公式を用いて、

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.5.14)$$

となる。 ∇^2 が出てくるので、確かにこの項が磁場の拡散を司る項であることが分かる。右辺第 1 項を変形して保存則の形で表すと、

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{v}) = -\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) \quad (2.5.15)$$

と書ける。ただし、一般にベクトル \mathbf{v} と \mathbf{B} のテンソル積を $\mathbf{v}\mathbf{B}$ と書き、 $\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{B})$, $\nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{v})$ はそれぞれ添え字形式での

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (v_j B_i), \quad \frac{\partial}{\partial x_j} (B_j v_i) \quad (2.5.16)$$

を表している。誘導方程式の具体的な意味については節 4.2.2 で説明する。

付録 2.A 電磁波

マクスウェル方程式に従う電磁場に何らかの擾乱が与えられると、その擾乱は波として空間中を伝わる。電磁波と呼ばれる現象である。この付録の前半は電磁波の基本的な性質を理解するために、真空中に電荷も電流もない場合の電磁波について説明する。荷電粒子と電磁波の相互作用によって電磁波の向きが変えられる現象を散乱と言う。これは古典電磁気学的^{†14}には、入射波によって力を受けた荷電粒子が振動し、その加速度によって別の方向に電磁波が放射される現象と解釈できる。散乱は第 5 章の放射輸送を考える際に重要なので、この付録の後半は荷電粒子による電磁波の放射を古典電磁気学的に扱う手法の説明をした後、非相対論的な自由電子による電磁波の散乱 (トムソン散乱) と原子に束縛された電子による散乱 (レイリー散乱) について説明する。

2.A.1 電磁ポテンシャル

ポテンシャルを用いて真空中のマクスウェル方程式 (2.1.1)-(2.1.4) を書き換える方法について説明する。磁場 \mathbf{B} は非発散の場合 ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) なので、ヘルムホルツの定理 (節 1.4.7 参照) より、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} によって

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.A.1)$$

^{†13} 文脈によっては電気伝導率の逆数である電気抵抗率 (electrical resistivity) $1/\sigma$ に η の文字が割り当てられていることもあるので注意が必要である。電気抵抗率と磁気拡散率は次元が μ_0 の分だけ違うが、物理的には同じ量とみなせる。

^{†14} 量子化されていない電磁気学という意味。電磁場の量子化については付録 5.B.10 で、量子論的電磁場による散乱の考え方については節 5.3.5 で説明する。

と表せる。これをファラデーの法則に代入することで

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.A.2)$$

となる。上式の括弧内は非回転の場であることが分かるので、ヘルムホルツの定理より、スカラーポテンシャルを用いて

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\phi \rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi \quad (2.A.3)$$

と表せる。つまり、電場と磁場を式 (2.A.1), (2.A.3) のようにベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルを用いて表せば、マクスウェル方程式のうちの 2 式を自動的に満たす。残りの 2 式 (ガウスの法則、アンペール-マクスウェルの法則) から \mathbf{A}, ϕ が従う方程式を導く。両式に式 (2.A.1), (2.A.3) を代入して、ベクトル解析の公式を用いて変形すると、

$$\nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (2.A.4)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \nabla^2 \phi = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (2.A.5)$$

となる。 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ は光速である。この 2 式より、与えられた \mathbf{j}, ρ_e と境界条件に対して \mathbf{A}, ϕ が求まれば、式 (2.A.1), (2.A.3) によって電場と磁場が決定される。

ポテンシャルの選び方には自由度がある。任意の微分可能な関数 $\chi(\mathbf{x}, t)$ を持ってきて、

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \quad (2.A.6)$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (2.A.7)$$

というように新しいポテンシャル \mathbf{A}', ϕ' を作ると、

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla\chi) = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.A.8)$$

$$-\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla\phi' = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right) - \nabla\phi + \nabla \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \quad (2.A.9)$$

$$= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi \quad (2.A.10)$$

となるので、 \mathbf{A}', ϕ' も \mathbf{A}, ϕ と同じ \mathbf{B}, \mathbf{E} を与えることが分かる。つまり、電磁ポテンシャル \mathbf{A}, ϕ には任意関数 χ について上述のような不定性がある。式 (2.A.6), (2.A.7) で表される、 \mathbf{B}, \mathbf{E} を不変に保つ変換をゲージ変換と言う。ゲージ変換が式 (2.A.4), (2.A.5) の形も不変にしていることも直ぐに確かめられる。

対象とする系において与えられた \mathbf{j}, ρ_e と境界条件の下で式 (2.A.4), (2.A.5) を解き、とある解 $\mathbf{A}_0(\mathbf{x}, t), \phi_0(\mathbf{x}, t)$ を得たとする。すると、式 (2.A.4), (2.A.5) を満たす一般解は、関数 $\chi(\mathbf{x}, t)$

を用いて

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla\chi \quad (2.A.11)$$

$$\phi = \phi_0 - \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad (2.A.12)$$

と書ける。ここで、 $\chi(\mathbf{x}, t)$ はどのような関数であっても正しい \mathbf{B}, \mathbf{E} を与えるため、次の方程式の解を持ってくることにする。

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = - \left(\nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_0}{\partial t} \right) \quad (2.A.13)$$

上式を満たす解 χ のひとつを用いて

$$\mathbf{A}_L = \mathbf{A}_0 + \nabla\chi \quad (2.A.14)$$

$$\phi_L = \phi_0 - \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad (2.A.15)$$

を満たす量 \mathbf{A}_L, ϕ_L を作ると、当然これらは対象とする系において式 (2.A.4), (2.A.5) を満たし、正しい \mathbf{B}, \mathbf{E} を与える。一方で \mathbf{A}_L, ϕ_L は

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_L + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_L}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \quad (2.A.16)$$

$$= 0 \quad (2.A.17)$$

も満たす。よって、 \mathbf{A}_L, ϕ_L が従う方程式 (2.A.4), (2.A.5) は次のように書き換えられる。

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{A}_L = \mu_0 \mathbf{j} \quad (2.A.18)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi_L = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (2.A.19)$$

以上の議論をまとめると、マクスウェル方程式は次の手順で解くことができる。与えられた \mathbf{j}, ρ_e と境界条件の下で上式の成分にして4つの波動方程式を解く。それによって得た解 \mathbf{A}_L, ϕ_L のうち、条件 (2.A.17) を満たすものだけを取り出す。そのようにして求めたポテンシャル \mathbf{A}_L, ϕ_L は、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_L \quad (2.A.20)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}_L}{\partial t} - \nabla \phi_L \quad (2.A.21)$$

によって正しい電磁場を与える。式 (2.A.17) はローレンツのゲージ条件、または単にローレンツ条件と呼ばれる。マクスウェル方程式をこのように書き換えて、 \mathbf{A}_L, ϕ_L を用いて電磁場を考えることを「ローレンツゲージで考える」と表現する。

ローレンツゲージの方程式系 (2.A.17)-(2.A.21) は

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \chi_0 = 0 \quad (2.A.22)$$

を満たす関数 χ_0 によるゲージ変換

$$\mathbf{A}_L \longrightarrow \mathbf{A}'_L = \mathbf{A}_L + \nabla \chi_0 \quad (2.A.23)$$

$$\phi_L \longrightarrow \phi'_L = \phi_L - \frac{\partial \chi_0}{\partial t} \quad (2.A.24)$$

において不変である。対象とする系のあらゆる点と時刻で \mathbf{j}, ρ_e がゼロである場合、上記のゲージ変換によって更に方程式系を簡単に行うことができる。ゲージ変換の χ_0 として、

$$\frac{\partial \chi_0}{\partial t} = \phi_L \quad (2.A.25)$$

を満たすものを持って来る。 $\rho_e = 0$ であるため、式 (2.A.19) より、この χ_0 が式 (2.A.22) の制限を侵すことはない。すると、新しいスカラーポテンシャルは

$$\phi = \phi_L - \frac{\partial \chi_0}{\partial t} = \phi_L - \phi_L = 0 \quad (2.A.26)$$

となり、方程式系はベクトルポテンシャルのみによって

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.A.27)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.A.28)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \mathbf{A} = 0 \quad (2.A.29)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.A.30)$$

と表される。このような表し方を放射ゲージと言う。新たなゲージ条件である式 (2.A.30) は横波条件と呼ばれる。その所以は次節で説明する。

2.A.2 自由電磁波

真空中に電荷も電流もない場合のマクスウェル方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.A.31)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.A.32)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.A.33)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (2.A.34)$$

となる。この方程式に従う電磁場を特に自由場と呼ぶ。式 (2.A.33) の両辺に $\nabla \times$ を作用させて、式 (2.A.34) を代入してベクトル解析の公式を用いて変形すると、

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathbf{E} \quad (2.A.35)$$

$$\text{ただし, } c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \quad (2.A.36)$$

という波動方程式が出てくる。また、 \mathbf{E}, \mathbf{B} について先ほどと対称的な式変形をすると、

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.A.37)$$

という波動方程式も出てくる。或いは放射ゲージを用いれば、ベクトルポテンシャルは波動方程式 (2.A.29) に従う。

式 (2.A.29) に平面波

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{A}} \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (2.A.38)$$

を代入すると、その分散関係は

$$\omega^2 = c^2 |\mathbf{k}|^2 \quad (2.A.39)$$

となることが分かる^{†15}。一方で、上記の平面波を式 (2.A.30) に代入することで

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{A}} = 0 \quad (2.A.40)$$

という関係が出てくるので、ベクトルポテンシャルの擾乱は平面波の進行方向に垂直であることが分かる。このような波を横波と言ひ、式 (2.A.30) は横波条件と呼ばれる。式 (2.A.28) より電場の擾乱はベクトルポテンシャルに平行なので、電場も平面波の進行方向に垂直である。また、式 (2.A.27) より

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = i(\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{A}}) \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (2.A.41)$$

なので、磁場の擾乱は平面波の進行方向にもベクトルポテンシャル (すなわち電場) にも垂直であることが分かる。

2.A.3 偏光

前節で電磁波は横波であることを説明した。例えば

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = a \hat{\mathbf{x}} \exp [i(kz - \omega t)] \quad (2.A.42)$$

^{†15} 波の考え方の基本については付録 1.D を参照のこと。

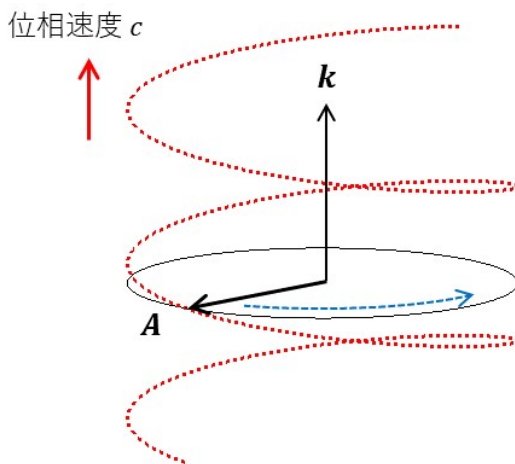


図 2.3 右円偏光の古典的イメージ：特定の点に注目すると、時間の経過と共に青色の矢印の向きに \mathbf{A} が回転する。 \mathbf{k} に平行な直線上の各点に注目すると、 \mathbf{A} の矢印の先は赤い破線のような螺旋を描き、その螺旋は時間の経過と共に赤い矢印の向きに位相速度 c で進行する。特定の位置の \mathbf{A} が回転する向きと伝搬方向 \mathbf{k} が右ねじの関係にある。

という、ベクトルポテンシャルの x 方向への擾乱が z 方向へ進行する平面波も考えることができる。また、次のような平面波の重ね合わせもまた平面波であり、方程式系 (2.A.29)&(2.A.30) の解となる。

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = (a_1 \hat{\mathbf{x}} + a_2 \hat{\mathbf{y}}) \exp [i(kz - \omega t)] \tag{2.A.43}$$

a_1, a_2 が実数の場合、この解は $(a_1 \hat{\mathbf{x}} + a_2 \hat{\mathbf{y}})$ の方向への擾乱が z 方向に進行する解となる。一方で、例えば $a_2 = ia_1$ の場合を考える。 n を整数として $i = \exp(\pi i/2 + 2n\pi i)$ なので、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = a_1 \hat{\mathbf{x}} \exp [i(kz - \omega t)] + a_1 \hat{\mathbf{y}} \exp [i(kz - \omega t + \pi/2 + 2n\pi)] \tag{2.A.44}$$

と書け、擾乱の方向が互いに垂直で位相が $\pi/2$ だけずれた平面波を重ね合わせる場合を考えていることになる。このとき、 \mathbf{A} の実部をとると、

$$\text{Re}[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} |a_1| \cos(kz - \omega t + \phi) \\ -|a_1| \sin(kz - \omega t + \phi) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.A.45}$$

と書ける。 $k > 0$ の場合、この解は図 2.3 のように進行する平面波を表す。このような平面波を右円偏光と呼ぶことにする。右-左の定義の仕方は双方の流儀があるため、注意が必要である。本書は Landi Degl’Innocenti & Landolfi (2004) の定義に合わせてある。 $a_1 = -ia_2$ の場合は左円偏光の解になる。これに対して式 (2.A.42) のような平面波を直線偏光と言う。一般に特定の方向に進む平面波は、直交する向きの 2 つの直線偏光の重ね合わせで表せると同時に、右円偏光と左円偏光の重ね合わせでも表現できる。

2.A.4 ポインティングベクトル

一般に

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (2.A.46)$$

というベクトル場はポインティングベクトルと呼ばれる。電磁波に伴う単位面積、単位時間あたりの平均のエネルギーフラックスはポインティングベクトルの時間平均

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{\mu_0} \overline{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} \quad (2.A.47)$$

で表され、電磁場のエネルギー密度の時間平均は

$$\bar{w} = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \quad (2.A.48)$$

で表される。例えば式 (2.A.42) の平面波を考えると、この平面波による電磁場の擾乱は

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = i\omega a \hat{\mathbf{x}} \exp[i(kz - \omega t)] \quad (2.A.49)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = ika \hat{\mathbf{y}} \exp[i(kz - \omega t)] \quad (2.A.50)$$

と書ける^{†16}。これらの実部を取って \mathbf{S}, w を計算し、1 周期分で時間平均するという操作は、 \mathbf{E}, \mathbf{B} を上記のように複素数に拡張されたままの量として

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}^* \quad (2.A.51)$$

$$\bar{w} = \frac{\epsilon_0}{4} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \frac{1}{4\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^* \quad (2.A.52)$$

を計算する操作に等しいことが直ぐに確かめられる。ただし、 \mathbf{B}^* は \mathbf{B} の複素共役という意味である。実際に計算すると、

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{ck^2}{2\mu_0} |a|^2 \hat{\mathbf{z}} \quad (2.A.53)$$

$$\bar{w} = \frac{1}{4} \left(\epsilon_0 \omega^2 |a|^2 + \frac{1}{\mu_0} k^2 |a|^2 \right) \quad (2.A.54)$$

$$= \frac{k^2}{2\mu_0} |a|^2 \quad (2.A.55)$$

となる。エネルギーは電磁波の伝搬する方向に流れることが分かる。また、電磁波においては磁場のエネルギーと電場のエネルギーは等しいことも分かる。

^{†16} $\omega = c|k|$ なので、平面波において $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|/c$ が成り立っていることもこの式から分かる。ただし、 $|\mathbf{B}| = \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{B} = |ka|$ とは \mathbf{B} の振幅のことである。

2.A.5 リエナール-ヴィーヘルトポテンシャル

本節からは、荷電粒子による電磁波の放射について説明する。一般のマクスウェル方程式 (2.1.1)-(2.1.4) をローレンツゲージで考える。

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (2.A.56)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.A.57)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (2.A.58)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_e \quad (2.A.59)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.A.60)$$

式 (2.A.58), (2.A.59) の成分にして 4 つの波動方程式の解の中でローレンツ条件 (2.A.60) を満たすベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ とスカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{x}, t)$ の組が求まれば、式 (2.A.56), (2.A.57) より電磁場が求まるという寸法である。無限遠方で両ポテンシャルがゼロになるという境界条件の下での式 (2.A.58), (2.A.59) の形式的な解を求めるために、まずは各量を次のようにフーリエ変換する。

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (2.A.61)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(\mathbf{x}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (2.A.62)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (2.A.63)$$

$$\rho_e(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}_e(\mathbf{x}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (2.A.64)$$

これらを式 (2.A.58), (2.A.59) に代入すると、

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{A}} + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{A}} = -\mu_0 \tilde{\mathbf{j}} \quad (2.A.65)$$

$$\nabla^2 \tilde{\phi} + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\phi} = -\frac{1}{\epsilon_0} \tilde{\rho}_e \quad (2.A.66)$$

という、ポアソン方程式 (1.5.15) の亜種の方程式が得られる。この方程式の無限遠でゼロになる解を求めるにはグリーン関数法が用いられる。式 (2.A.65), (2.A.66) に対するグリーン関数、すなわち

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G(\mathbf{x}) = -\delta^3(\mathbf{x}) \quad (2.A.67)$$

の解の中で無限遠でゼロになるものは

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(\pm i\omega |\mathbf{x}|/c)}{|\mathbf{x}|} \quad (2.A.68)$$

であることが知られている。これより

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}', \omega)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \exp\left(\pm i \frac{\omega}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\right) d^3 x' \quad (2.A.69)$$

$$\tilde{\phi}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\tilde{\rho}_e(\mathbf{x}', \omega)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \exp\left(\pm i \frac{\omega}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\right) d^3 x' \quad (2.A.70)$$

が分かるので、これを式 (2.A.61) に代入すると、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega t) \int d^3 x' \frac{\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}', \omega)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \exp\left(\pm i \frac{\omega}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\right) \quad (2.A.71)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp\left(-i\omega t \pm i \frac{\omega}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\right) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{j}(\mathbf{x}', t') \exp(i\omega t') \quad (2.A.72)$$

$$= \frac{\mu_0}{8\pi} \int d^3 x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathbf{j}(\mathbf{x}', t') \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp\left[i\omega \left(t' - t \pm \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)\right] \quad (2.A.73)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t - t' \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right) \mathbf{j}(\mathbf{x}', t') \quad (2.A.74)$$

となる。更に t' に関する積分を実行すると、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 x' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2.A.75)$$

と書け、 ϕ についても同様の計算を行うと

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 x' \frac{\rho_e(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2.A.76)$$

と書ける。ただし、

$$t' = t \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \quad (2.A.77)$$

である。上の符号を採用したときのポテンシャルは遅延ポテンシャルと呼ばれる。時刻 t' に位置 \mathbf{x}' における \mathbf{j}, ρ_e によって発せられた電磁波は時刻 $t = t' + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ に位置 \mathbf{x} で受信される。遅延ポテンシャルの表式は、各点で過去に発せられた電磁波の寄与の合計が、現在の注目する点での電磁ポテンシャルであることを表している。上式で書かれた電磁ポテンシャルがローレンツ条件 (2.A.60) を満たすことは、実際に電荷の保存則 (2.5.1) も用いて計算すれば分かる。

点電荷が軌道 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ を描いて運動しているとする。点電荷の電荷量を q とすると、電荷密度と電流密度は

$$\rho_e(\mathbf{x}, t) = q\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)) \quad (2.A.78)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = q\dot{\mathbf{r}}(t)\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)) \quad (2.A.79)$$

と書ける。すると遅延ポテンシャルは、式 (2.A.74) にこれを代入することで、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\dot{\mathbf{r}}(t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right) \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')) \quad (2.A.80)$$

$$= \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\dot{\mathbf{r}}(t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|}{c}\right) \quad (2.A.81)$$

と計算できる。ここで、積分変数を

$$s = t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|}{c} = f(t') \quad (2.A.82)$$

と変換し、この式は t' について $t' = f^{-1}(s)$ と解けるものとする。すると上式の積分は

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{df^{-1}(s)}{ds} \frac{\dot{\mathbf{r}}(f^{-1}(s))}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(f^{-1}(s))|} \delta(t - s) \quad (2.A.83)$$

$$= \frac{\mu_0 q}{4\pi} \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}}(f^{-1}(t))}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(f^{-1}(t))|} \frac{df^{-1}(t)}{dt} \quad (2.A.84)$$

と実行できる。 $t = f(t')$ を満たす t' を t_0 とすると、

$$\frac{df^{-1}(t)}{dt} = \left[\frac{df(t_0)}{dt_0} \right]^{-1} \quad (2.A.85)$$

であり、

$$\frac{df(t_0)}{dt_0} = 1 - \frac{1}{c} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}(t_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t_0)|} \cdot \frac{d\mathbf{r}(t_0)}{dt_0} \quad (2.A.86)$$

と計算できる。すると結局、ベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{r}}(t_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t_0)| - \dot{\mathbf{r}}(t_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r}(t_0))/c} \quad (2.A.87)$$

と書ける。 ϕ についても同様にして

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t_0)| - \dot{\mathbf{r}}(t_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r}(t_0))/c} \quad (2.A.88)$$

と書ける。ただし、 t_0 は

$$t_0 = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t_0)|}{c} \quad (2.A.89)$$

の解として与えられる発信時刻である。上記のポテンシャルはリエナール-ヴィーヘルトポテンシャル (Liénard-Wiechert potentials) と呼ばれる。このポテンシャルから電場と磁場を計算す

ると、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\mathbf{n}(t_0) - \boldsymbol{\beta}(t_0))(1 - \beta^2(t_0))}{\alpha^3(t_0)R^2(t_0)} + \frac{\mathbf{n}(t_0) \times \{(\mathbf{n}(t_0) - \boldsymbol{\beta}(t_0)) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t_0)\}}{c\alpha^3(t_0)R(t_0)} \right] \quad (2.A.90)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \mathbf{n}(t_0) \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (2.A.91)$$

$$\text{ただし, } R(t_0) = |\mathbf{x} - \mathbf{r}(t_0)| \quad (2.A.92)$$

$$\mathbf{n}(t_0) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}(t_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t_0)|} \quad (2.A.93)$$

$$\boldsymbol{\beta}(t_0) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t_0)}{c} \quad (2.A.94)$$

$$\alpha(t_0) = 1 - \mathbf{n}(t_0) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_0) \quad (2.A.95)$$

と書ける^{†17}。式 (2.A.90) の右辺第 1 項は点電荷が等速直線運動をする場合に放射される電磁場であり、 R^{-2} に比例する。これは電荷の静止系で見たときの静電場 (クーロン場) に相当する。一方で第 2 項は点電荷が加速度 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ を持つ状況において発せられる電磁波を表しており、 R^{-1} に比例する。よって、点電荷から十分に遠方では第 2 項の寄与が支配的になる。

2.A.6 制動放射

電荷が加速度を持つことによって電磁波を放射する現象を制動放射 (bremsstrahlung、ブレイムシュトラルルク) と言う。放射される電磁場は式 (2.A.90) の第 2 項だけを考慮して、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{n}(t_0) \times \{(\mathbf{n}(t_0) - \boldsymbol{\beta}(t_0)) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t_0)\}}{c\alpha^3(t_0)R(t_0)} \quad (2.A.96)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \mathbf{n}(t_0) \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (2.A.97)$$

と書ける。上式より、電荷から観測者に向く単位ベクトル \mathbf{n} と \mathbf{E}, \mathbf{B} は互いに直交関係にあると分かるので、電荷から十分に離れた領域では放射された電磁波は自由電磁波の性質を持つことが分かる。ポインティングベクトルを計算すると、

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\mu_0 c} [E(\mathbf{x}, t)]^2 \mathbf{n}(t_0) \quad (2.A.98)$$

$$= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{\mathbf{n}(t_0)}{\alpha^6(t_0) R^2(t_0)} \left[\mathbf{n}(t_0) \times \{(\mathbf{n}(t_0) - \boldsymbol{\beta}(t_0)) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t_0)\} \right]^2 \quad (2.A.99)$$

^{†17} 非常に煩雑な計算となる。詳しくは例えば砂川重信 (1999) の第 9 章 §3 を参照のこと。

となる。点電荷が単位時間加速されたときに放射されるエネルギーのうち、観測者が受け取るフラックスは

$$\frac{dE}{dt_0} = \frac{dE}{dt} \frac{dt}{dt_0} \quad (2.A.100)$$

$$= (\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(t_0)) \alpha(t_0) \quad (2.A.101)$$

なので、電荷が単位時間加速されて全方向に放射するエネルギーの総量は、これを電荷を中心とする半径 $R(t_0)$ の球面上で全立体角 4π について積分することで、

$$\frac{dW}{dt_0} = \int_{4\pi} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(t_0) \alpha(t_0) R^2(t_0) d\Omega \quad (2.A.102)$$

$$= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \int_{4\pi} d\Omega \frac{[\mathbf{n}(t_0) \times \{(\mathbf{n}(t_0) - \boldsymbol{\beta}(t_0)) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t_0)\}]^2}{(1 - \mathbf{n}(t_0) \cdot \boldsymbol{\beta}(t_0))^5} \quad (2.A.103)$$

と書ける。特に、電荷の速度が光速に比べて十分に小さいときは

$$\frac{dW}{dt_0} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \int_{4\pi} d\Omega [\mathbf{n}(t_0) \times (\mathbf{n}(t_0) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t_0))]^2 \quad (2.A.104)$$

$$= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} [\dot{\mathbf{v}}(t_0)]^2 \int_{4\pi} d\Omega \sin^2 \theta \quad (2.A.105)$$

$$= \frac{q^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} [\dot{\mathbf{v}}(t_0)]^2 \quad (2.A.106)$$

となる。ただし、 θ は放射方向 $\mathbf{n}(t_0)$ と電荷の加速度 $\dot{\mathbf{v}}(t_0)$ のなす角度である。これはラーモアの公式と呼ばれる。放射のエネルギーは電荷の加速度の 2 乗に比例し、主に加速度と垂直な方向に放射されることが分かる。

2.A.7 散乱

トムソン散乱

まずは、非相対論的な速さの自由電子による電磁波の散乱現象であるトムソン散乱について考察する。平面波が電子に入射し、電子が力を受ける状況を考える。自由電子の運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{z}}(t) = -e[\mathbf{E}(\mathbf{z}(t), t) + \dot{\mathbf{z}}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{z}(t), t)] \quad (2.A.107)$$

である。 $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C は素電荷、 $\mathbf{z}(t)$ は電子の軌道を \mathbf{E} , \mathbf{B} と同じように複素数に拡張したものである。電磁波においては $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|/c$ であるため、 $|\dot{\mathbf{z}}|/c \ll 1$ の場合には磁場から受ける力は電場から受ける力に比べて無視できる。入射波は直線偏光を考え、電場の振動する方向の単位ベクトルを $\hat{\mathbf{e}}$ とし振幅 (実数) を E_0 とすると、

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = E_0 \hat{\mathbf{e}} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \quad (2.A.108)$$

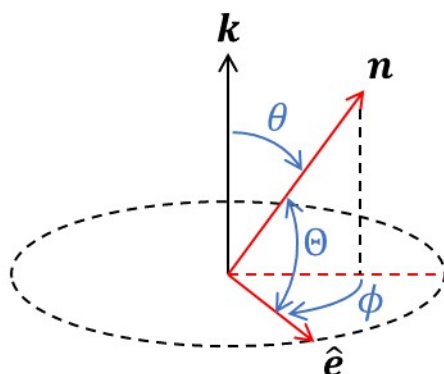


図 2.4 散乱に関する角の関係

と書ける。すなわち、電場から受ける力のみを考慮した運動方程式は

$$m\ddot{z}(t) = -eE_0\hat{e} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}_0 - \omega t)] \tag{2.A.109}$$

と書ける。電子は電場から力を受けて振動するが、その振動による位置の変化は電磁波の波長に比べて十分に小さいとして、 \exp の肩の $\mathbf{z}(t)$ を電子の平均的な位置 \mathbf{z}_0 で置き換えた。これは長波長近似と呼ばれる。この運動方程式より、電荷の加速度は

$$\ddot{z}(t) = -\frac{eE_0}{m}\hat{e} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}_0 - \omega t)] \tag{2.A.110}$$

と求まる。電子によって単位時間、単位立体角あたりに単位ベクトル \mathbf{n} の方向へ放射される平均エネルギーは、式 (2.A.104) の非積分関数を時間平均して、

$$\frac{d\bar{P}}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0c^3} |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \text{Re}[\dot{\mathbf{z}}(t)])|^2 \tag{2.A.111}$$

$$= \frac{e^2}{32\pi^2\epsilon_0c^3} |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{z}}(t))|^2 \tag{2.A.112}$$

$$= \frac{e^4E_0^2}{32\pi^2\epsilon_0m^2c^3} |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \hat{e})|^2 \tag{2.A.113}$$

と書ける。一方で、単位時間、単位面積あたりの入射波のエネルギーは、節 2.A.4 で説明したように、

$$\bar{S} = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2 \tag{2.A.114}$$

と書ける。

ここで、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\bar{P}}{d\Omega} / \bar{S} \tag{2.A.115}$$

という量を考える。これは面積の次元を持つ量で、特定の方向から平面波が入射したときに、特定の方向に放射されるエネルギーの割合に比例する。微分断面積と呼ばれる。トムソン散乱の

微分断面積は

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = r_0^2 |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{e}})|^2 \quad (2.A.116)$$

$$= r_0^2 \sin^2 \Theta \quad (2.A.117)$$

$$\text{ただし, } r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} = 2.82 \times 10^{-15} \text{ m} \quad (2.A.118)$$

と計算できる。 r_0 は古典電子半径と呼ばれる定数である。 Θ は放射方向 \mathbf{n} と入射波の偏極ベクトル $\hat{\mathbf{e}}$ がなす角度である。図 2.4 のように、入射波の伝搬方向 \mathbf{k} と放射の方向 \mathbf{n} がなす角度を θ として、図の赤く示された 3 方向が作る球面三角において球面余弦定理を使うと、

$$\sin^2 \Theta = 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi \quad (2.A.119)$$

という関係が分かる。入射波に偏極がないとすると、これを ϕ について平均することで、式 (2.A.117) の $\sin^2 \Theta$ は

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi) d\phi = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (2.A.120)$$

に置き換えられる。よって微分断面積は

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \theta) \quad (2.A.121)$$

となり、全放射方向 4π で積分したトムソン散乱の全断面積は

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \quad (2.A.122)$$

と書ける。全断面積は散乱の起こりやすさの尺度になる。

レイリー散乱

原子に束縛された電子による電磁波の散乱現象をレイリー散乱と言う。レイリー散乱のいちばん簡単なモデルとして、電子が角振動数 ω_0 の弾性力によって束縛されていると考えて断面積を計算する。電子の運動方程式は、長波長近似の下で、

$$m\ddot{\mathbf{z}}(t) = -m\omega_0^2 \mathbf{z}(t) - eE_0 \hat{\mathbf{e}} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}_0 - \omega t)] \quad (2.A.123)$$

と書ける。この微分方程式の特解を求めることによって、

$$\ddot{\mathbf{z}}(t) = \frac{e\omega^2 E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}_0 - \omega t)] \quad (2.A.124)$$

と書けることが分かるので、レイリー散乱の断面積は

$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega} = \frac{d\sigma_T}{d\Omega} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (2.A.125)$$

$$\sigma_R = \sigma_T \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (2.A.126)$$

と計算できる。特に、入射波の角振動数が $\omega \ll \omega_0$ を満たす場合には

$$\sigma_R \simeq \sigma_T \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \quad (2.A.127)$$

と書ける。節 5.3.5 で簡単に説明するが、量子論的電磁気学を用いたレイリー散乱の考察からも、各振動数が小さい場合には σ_R は ω^4 に比例することが言える。大気を構成する無色の気体分子の場合、 ω_0 に対応する典型的な波長は可視光の波長よりも短いため、可視光の散乱を考える場合はこの近似が良く成り立つ。図 2.5 に、地球大気に対するレイリー散乱断面積のモデルを示した。散乱断面積が λ^{-4} に比例することから、短い波長 (大きな振動数、青色) の光ほど散乱効率が大きいことが分かる。従って昼間の空は青く見え、逆に夕焼けは散乱されずに残った光を見るために赤く見える。また、微分断面積に $(1 + \cos^2 \theta)$ が係ることから、入射光と同じ方向か逆の方向には散乱が起きやすく、入射光と直交する向きには起きにくいことが分かる。我々が空を眺めるときには、太陽の方向から飛んできて 1 回だけレイリー散乱を受けた光を見てい^{†18}ので、空気の綺麗な日^{†19}に太陽が東の空にあった場合、東と西の空は比較的明るい青に見える、天頂は濃い (暗い) 青に見えるはずである。

2.A.8 クーロン相互作用と放射場の分離

前述した散乱問題のような、荷電粒子と電磁場の相互作用を量子力学的に考察する手法を節 5.3 で説明するが、その際の定式化の土台となる考え方を説明する。クーロンゲージと呼ばれる電磁ポテンシャルを用いれば、電荷と電磁場が共存する系のダイナミクスを荷電粒子の運動方程式とベクトルポテンシャルの時間発展方程式のみで記述することができ、スカラーポテンシャルの自由度を考慮する必要がなくなる。

節 2.A.1 で説明したゲージ変換において、ローレンツゲージにつながる式 (2.A.13) の代わりに、

$$\nabla^2 \chi = -\nabla \cdot \mathbf{A}_0 \quad (2.A.128)$$

^{†18} (大雑把な見積もり) 第 5 章で詳しく説明するが、散乱断面積を σ 、大気の数密度を n としたとき、 $l = 1/(n\sigma)$ という値は光が散乱を受けずに大気を直進できる平均的な距離 (平均自由行程) を表す。例えば地球大気による波長 450 nm でのレイリー散乱断面積として $1.0 \times 10^{-30} \text{ m}^2$ (Bodhaine et al., 1999) を使い、大気の数密度は地上を想定して $2.5 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ とすると、 $l = 40 \text{ km}$ と計算できる。実際の地球大気は高いほど希薄になるので、この l は過小評価である。一方で、地球大気のスケールハイト (節 4.3.1) はおよそ 8.4 km なので、光の自由平均行程は大気の厚さより大きいことが言える。つまり、大部分の光は地球大気でレイリー散乱を受けることなく直進し、ほんの一部の光が高々 1 回散乱される。空は太陽よりも十分に暗いために直視できることを考えると、当たり前かもしれない。

^{†19} 例えば煙などの塵や水滴などの大きな粒子が大気中に存在しない日のことを指す。光の波長に対して無視できない大きさの球形粒子による散乱を考える理論にはミー理論 (Mie theory) がある。雲を構成する粒子によるミー散乱では散乱断面積の波長依存性は少ないので、雲は白色に見える。

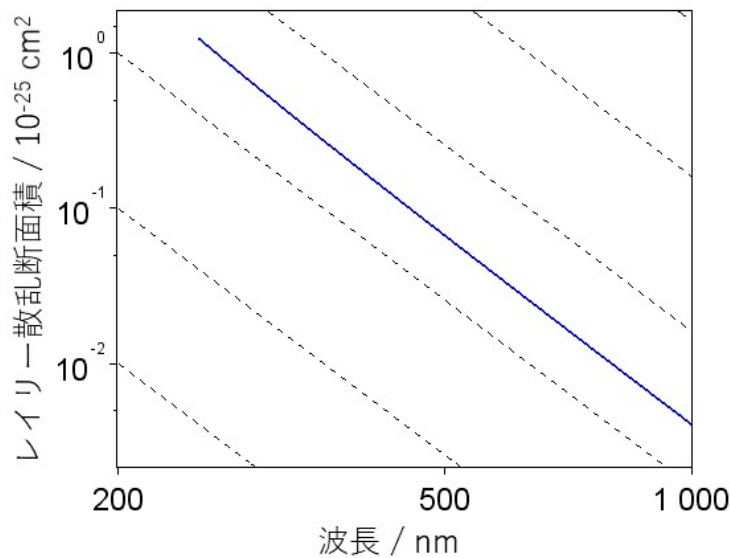


図 2.5 地球大気のレイリー散乱断面積のモデル：対数-対数グラフで書かれている。破線は $y = ax^{-4}$ の傾きを表す。Bodhaine et al. (1999) より。

という方程式の解のひとつである $\chi(\mathbf{x}, t)$ を持ってきて、

$$\mathbf{A}_C = \mathbf{A}_0 + \nabla\chi \tag{2.A.129}$$

$$\phi_C = \phi_0 - \frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{2.A.130}$$

と変換する。すると、マクスウェル方程式系は次のように書き換えられる。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_C \tag{2.A.131}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}_C}{\partial t} - \nabla\phi_C \tag{2.A.132}$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \mathbf{A}_C = \mu_0 \mathbf{j} - \frac{1}{c^2} \nabla \left(\frac{\partial\phi_C}{\partial t}\right) \tag{2.A.133}$$

$$\nabla^2 \phi_C = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} \tag{2.A.134}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_C = 0 \tag{2.A.135}$$

これをクーロンゲージと言う。ゲージ条件の式 (2.A.135) は横波条件と呼ばれる。 ρ_e, \mathbf{j} が存在しない状況では $\phi_C = 0$ の解が得られるので、放射ゲージに一致する。以下添え字の C は省略する。ヘルムホルツの定理 (節 1.4.7 参照) より、任意のベクトル場 \mathbf{Q} は縦成分 $\mathbf{Q}_\parallel (\nabla \times \mathbf{Q}_\parallel = 0)$ と横成分 $\mathbf{Q}_\perp (\nabla \cdot \mathbf{Q}_\perp = 0)$ に分けることができる。磁場 \mathbf{B} は常に横成分しか持たないし、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} もクーロンゲージにおいては横成分しか持たない。電場 \mathbf{E} を 2 つの成分に分けると、 \mathbf{A}, ϕ との間に

$$\mathbf{E}_\perp = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{E}_\parallel = -\nabla\phi \tag{2.A.136}$$

という関係を持つことが分かる。また、 \mathbf{j} を 2 つの成分に分けることで、式 (2.A.133) から横成分のみを抽出することができ、

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}_\perp \quad (2.A.137)$$

と書ける。

以上の議論を眺めると、次のことが言える。まず、スカラーポテンシャル ϕ は電場の縦成分 \mathbf{E}_\parallel を司るポテンシャルであり、荷電粒子の運動方程式によってある時刻での電荷密度 ρ_e が決まれば、ポアソン方程式 (2.A.134) より決定される。一方で、磁場 \mathbf{B} と電場の横成分 \mathbf{E}_\perp はベクトルポテンシャル \mathbf{A} によって表されていて、 \mathbf{A} の時間発展は外場 \mathbf{j}_\perp の下で式 (2.A.137) に従う。このようにして、電磁場の成分を、荷電粒子の運動の下で静電場のように振舞う成分 \mathbf{E}_\parallel と、独立した時間発展方程式に従う成分 $\mathbf{E}_\perp, \mathbf{B}$ に分けることができた。前者はクーロン相互作用 (Coulomb interaction)、後者は放射場 (radiation field) と呼ばれる。

点電荷から成る系を考える場合は、電荷密度と電流は次のように書ける。

$$\rho_e(\mathbf{x}, t) = \sum_n e_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{r}_n(t)) \quad (2.A.138)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \sum_n e_n \dot{\mathbf{r}}_n(t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{r}_n(t)) \quad (2.A.139)$$

ただし、各電荷のラベルを n と書くことにし、 n 番目の荷電粒子 (電荷 e_n) の描く軌道を $\mathbf{r}_n(t)$ 、その時間微分を $\dot{\mathbf{r}}_n(t)$ と書いた。上式の ρ_e の下でポアソン方程式 (2.A.134) を解くと、

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \sum_n \frac{e_n}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x} - \mathbf{r}_n(t)|} \quad (2.A.140)$$

となる。 n 番目の荷電粒子の運動方程式は、質量を m_n として、

$$m_n \ddot{\mathbf{r}}_n(t) = e_n [\mathbf{E}_\parallel(\mathbf{r}_n(t), t) + \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}_n(t), t) + \dot{\mathbf{r}}_n(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_n(t), t)] \quad (2.A.141)$$

$$= \sum_{n \text{ 以外の } m} \frac{e_n e_m}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_n(t) - \mathbf{r}_m(t)}{|\mathbf{r}_n(t) - \mathbf{r}_m(t)|^3} - e_n \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}_n(t), t)}{\partial t} + e_n \dot{\mathbf{r}}_n(t) \times [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_n(t), t)] \quad (2.A.142)$$

と書ける^{†20}。荷電粒子の運動方程式と電磁場の方程式を併せた全体の方程式系はマクスウェルローレンツ方程式系と呼ばれる。

^{†20} 式 (2.A.140) で与えられる ϕ について $-\nabla\phi(\mathbf{r}_n(t), t)$ を計算することで第 1 項を計算すると、 $m = n$ の場合の項が発散する。これは荷電粒子を点とみなしてデルタ関数を用いたことによる不都合であり、自己エネルギーの問題と呼ばれる。点電荷は自分自身の作りだすクーロン場からは力を受けないとして、この項の存在を無視して議論を進める。

3

流体の基礎方程式

流体力学では、流体の質量密度 ρ 、速度場 \boldsymbol{v} に加え、熱力学的状態量 1 つ (例えばエントロピー s や内部エネルギー e 、温度場 T など) の成分にして計 5 つの場の量の分布と時間発展を計算する。その際に使うのが、質量保存則、運動量保存則、エネルギー保存則の成分にして計 5 つの偏微分方程式である。密度と状態量 1 つの時間発展が求まれば、他の状態量の分布は状態方程式を使って求められる。MHD では、更に磁場 \boldsymbol{B} の時間発展を計算するために、前章で述べた誘導方程式も用いられる。磁場の時間発展が求まれば、他の電磁気学的量の分布はアンペールの法則 (2.5.9) やオームの法則 (2.4.2) を用いて求められる。本章では流体の時間発展を司る主軸の 3 保存則と、方程式系を閉じるために必要な状態方程式の説明をする。

流体力学の基礎方程式の説明の仕方には、現象論的な立場と原理的な立場がある。後者では、流体を構成する各粒子の運動を統計的に扱う方程式 (運動論的方程式) に平均操作を施すことで、各保存則が導入される。この立場での説明は、プラズマの場合について第 6 章で行う。本章では前者の立場から、保存則を出発点として説明する。その際、保存則の基本的な枠組みの上に、対象とする系に適した現象論的な構成則や状態方程式を採用して肉付けすることで、方程式系が完成する。このため、各保存則は系によって形を変え、しばしば混乱を招く。本節では、一般的な保存則の形を示したうえで、仮定を課して具体的に用いられる形式を導入するような説明の順序を心がけた。

この章の内容の骨格は Kulsrud (2004) と Priest (2014) を参考にし、流体力学的側面の補足は私が東京大学理学部で受けた講義のノートを参考にしている。関連した文献としては、例えば B. J. Cantwell 氏のスタンフォード大学での流体力学の講義のテキストがウェブ^{†1}で閲覧できるが、数学的準備や熱力学の基礎から丁寧に書かれていて分かりやすい (Cantwell)。流体力学の教科書には、上で述べたものを除くと、例えば一般向けのものとして Landau & Lifshitz (1987)、宇宙物理学のためのものとして Kato & Fukue (2020)、地球の外核のような液体金属を念頭に置いたものとして Davidson (2001)、大気や海洋への応用のためのものとして Vallis (2017)、工学向けの圧縮性流体について 松尾一泰 (2020) がある。

^{†1} <https://web.stanford.edu/~cantwell/> (2021 年 5 月 17 日閲覧)

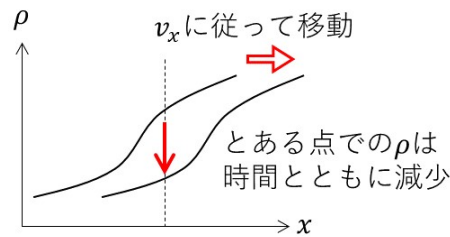


図 3.1 移流の概念

3.1 質量保存則 (連続の式)

質量保存則は、質量が湧き出すことも消滅することもないことを表す法則である。節 1.5.3 で説明した保存則の基本形通りに、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.1.1)$$

と書き表される。第 2 項をベクトル解析の公式を用いて分解すると、

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.1.2)$$

となる。

特に液体を考えるとときなどには、その流体が常に $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ を満たすと仮定する場合がある。このとき、質量保存則は

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (3.1.3)$$

となる。密度のラグランジュ微分がゼロ、すなわち流体粒子に沿った密度の時間変化がないという意味であり、考える流体が圧縮も膨張もしないことを表す。

3.1.1 移流項

ラグランジュ微分を具体的に書き表すと、式 (3.1.3) は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho \quad (3.1.4)$$

となるが、右辺、すなわちラグランジュ微分の第 2 項の意味について考えてみる。速度場が x 軸の向き ($\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{x}}$) だった場合、この式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (3.1.5)$$

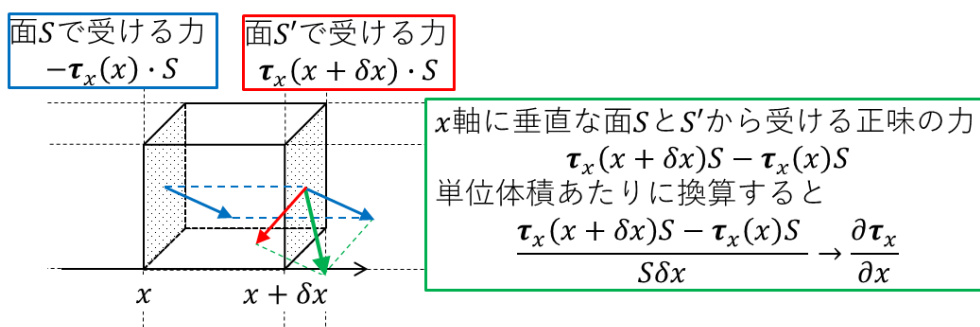


図 3.2 応力を介して微小領域が受ける力

となる。つまり、 $\mathbf{v} \cdot \nabla$ は、流れ場の向きに微分して、その流れ場の大きさをかけたものになる。とある ρ の分布が微小時間 δt 後に、 v_x の流れに従って図 3.1 のように動いたとする。 $v_x > 0$, $\partial \rho / \partial x > 0$ の場合、とある点での $\partial \rho / \partial t$ は負になる。これが式 (3.1.5) の意味である。つまり、ラグランジュ微分の第 2 項 ($\mathbf{v} \cdot \nabla$) は、ある物理量が流れに乗って移動するときの変化分を表す。その意味を込めて移流項 (advection term) と呼ばれる。

3.2 運動量保存則 (運動方程式)

運動量保存則の一般形から出発し、仮定を与えることで具体的に用いられる形式の運動方程式を導出する。

3.2.1 一般形

流体の単位体積あたりの運動量は $\rho \mathbf{v}$ と表される。運動量保存則を添え字形式で書き下すと、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijk} j_j B_k + f_i \tag{3.2.1}$$

となる。左辺は保存則の基本形通り、すなわち、ある微小領域での運動量の時間変化と流れに乗って微小領域から流出する運動量のフラックスの正味量を表す。運動量はこれ以外に、隣の微小領域から直接、応力として受け取ることができるので、その効果を表す右辺第 1 項が加わる。 τ_{ij} は応力テンソルと呼ばれる。更に、ローレンツ力 $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ や重力 $\rho \mathbf{g}$ などの外力が加わると、それは微小領域にとって運動量の湧き出しとしてはたらくため、右辺第 2,3 項が加わる。

応力についてももう少し詳しく説明する。流体の各微小領域は互いに押し合っている。ある面を考えたとき、その面で隔てられるふたつの領域がその面上で押し合っているが、その単位面積

あたりの力を応力と言う。例えば、図 3.2 のようなキューブ状の微小領域の、 x 軸に垂直な面について考える。各面では作用・反作用の法則に従って互いに押し合っているが、 x 座標の小さい側の領域が大きい側の領域から受ける応力を τ_x とする。このとき、図のような考察の結果、 x 軸に垂直な面に関して微小領域が受ける正味の力は、単位体積あたりにして $\partial\tau_x/\partial x$ となる。このような考察を y, z に垂直な面に対しても行うと、微小領域が隣の領域から受ける正味の力は、単位面積あたりにして

$$\frac{\partial\tau_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_z}{\partial z} \quad (3.2.2)$$

となる。この τ_x, τ_y, τ_z をまとめたものが式 (3.2.1) の応力テンソル τ_{ij} である。一般の平面を考えた場合、その面上で法線ベクトル $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$ が向く向きの領域から反対の領域が受ける応力は、

$$\tau_{ij}n_j \quad (3.2.3)$$

となる。節 3.2.3 で、この τ_{ij} が具体的にどのような形になるのかを考える。

3.2.2 電磁場の運動量とマクスウェルの応力

MHD において外力として加わることになるローレンツ力 $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ は、流体の運動量保存という観点からみると運動量の湧き出しと考えられることを前節で述べた。その湧き出した分の運動量がどこから来るのかについて不思議に思った方もいるかもしれない。それは、電磁場自身が運動量を持つと考えることで解決する。

ローレンツ力は次のように変形できる。

$$f_i = \varepsilon_{ijk} j_j B_k \quad (3.2.4)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \left(\frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{jlm} \frac{\partial B_m}{\partial x_l} \right) B_k \quad (3.2.5)$$

$$= \frac{\partial T'_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.2.6)$$

$$\text{ただし, } T'_{ij} = \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right) \quad (3.2.7)$$

2 段目ではアンペールの法則 (2.5.9) を代入した。あとは式変形するだけである。今は変位電流と電場による力を無視して考えているが、これらの項も考慮し、マクスウェル方程式を総動員して同じような式変形をすると、

$$f_i = -\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.2.8)$$

$$\text{ただし, } p_i = \epsilon_0 \varepsilon_{ijk} E_j B_k \quad (3.2.9)$$

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right) \quad (3.2.10)$$

となる。これを運動量保存則 (3.2.1) に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i + p_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij} + T_{ij}) \quad (3.2.11)$$

となる。ここで電磁場が p_i という運動量^{†2}を持つと考えると、この式は、流体+電磁場の全体の運動量保存則とみなせる。 T_{ij} は電磁場の存在によって隣の微小領域から受ける応力とみなせるため、マクスウェルの応力と呼ばれる。式 (3.2.6) と (3.2.8) を見比べると、MHD 流体の場合は光速より十分に遅い場合を考えているがゆえに、電磁場の運動量の時間変化と、マクスウェルの応力の電場による成分は考えなくて良いと解釈できる。マクスウェルの応力の具体的な説明は節 4.2.3 である。

3.2.3 ニュートン流体

応力は流体を構成する物質の性質と流体の速度場の状況に依存する。よって応力と速度場の関係は、対象の物質によってケースバイケースで考えるものであり、その物質の構成則 (constitutive relation) と呼ばれる。太陽大気のようなプラズマの構成則を原理的に考察するならば、第 6 章で説明する運動論が用いられる。

現象論的によく使われる構成則にニュートンの粘性法則がある。この法則が適用される流体をニュートン流体と呼ぶ。ニュートン流体では以下のことが仮定されている。

- 速度場がゼロの時の応力は、面を垂直に押す向きに等方的に働く圧力だけである。
- 速度場の勾配が十分に小さい。
- 速度場に対する流体の応答が等方的である。

$$u_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (3.2.12)$$

と書くことにする。 u_{ij} を速度勾配テンソルと呼ぶ。2 番目の仮定より、 u_{kl} の二次以上の項は無視して、

$$\tau_{ij} = a_{ij} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial u_{kl}} u_{kl} + \mathcal{O}(u_{kl}^2) \quad (3.2.13)$$

と展開できる。

まず、速度場がゼロの状況を考えて

$$\tau_{ij} = a_{ij} \quad (3.2.14)$$

となる。すると 1 番目の仮定より、 p を圧力として、

$$a_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (3.2.15)$$

^{†2} ポインティングベクトル \mathbf{S} を用いると $\mathbf{p} = \mathbf{S}/c^2$ と書ける。

となる^{†3}。

次に、速度場がある状況を考えるが、ここで

$$e_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) \quad (3.2.16)$$

$$\Omega_{kl} = \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \quad (3.2.17)$$

とおくと、速度勾配テンソルは

$$u_{kl} = e_{kl} + \frac{1}{2} \Omega_{kl} \quad (3.2.18)$$

と表される。 Ω_{kl} は $\nabla \times \mathbf{v}$ の成分を持つテンソルで、流体の剛体回転の効果を表している。 e_{kl} は速度勾配テンソルから剛体回転の効果を差し引いたテンソルで、歪速度テンソルと呼ばれる。流体が剛体回転をしても、静止している場合と同じように圧力しか働かず、回転の効果を差し引いたときの歪みがせん断応力を生むので、 τ_{ij} は e_{kl} の関数になる。つまり、

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + b_{ijkl}e_{kl} \quad (3.2.19)$$

である。また、3 番目の仮定より、 b_{ijkl} は 4 階の等方テンソルになる必要がある。等方テンソルとは、どのような向きの正規直交基底で展開しても、同じ成分で表されるようなテンソルである。一般に 4 階のテンソルは成分が 3^4 個あるが、等方であるという仮定を課すと独立な成分が 3 つに減らせて、

$$b_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk} \quad (3.2.20)$$

となることが知られている。つまり、

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + A\delta_{ij}e_{kk} + Be_{ij} + Ce_{ji} \quad (3.2.21)$$

$$= -p\delta_{ij} + A\delta_{ij} \cdot \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{1}{2}(B+C) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.2.22)$$

である^{†4}。慣習として

$$A = \lambda, \quad \frac{1}{2}(B+C) = \mu \quad (3.2.23)$$

と書く。すると、

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda\delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \quad (3.2.24)$$

^{†3} 例えば、図 3.2 の面 S' では x 軸負の向きに圧力を受けることになるので、 p が正の数になるように定義すると、前に負号が付く。

^{†4} $\partial v_k / \partial x_k$ とは $\nabla \cdot \mathbf{v}$ のことである。

となる。ここで、主応力^{†5}の大きさの平均を考えると、

$$\frac{\sum_i \tau_{ii}}{3} = -p + \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \quad (3.2.25)$$

$$= -p + \zeta \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \quad (3.2.26)$$

となる。 $\zeta = 2\mu/3 + \lambda$ は、流体が圧縮膨張するとき ($\nabla \cdot \mathbf{v} \neq 0$ のとき) の、主応力の静止圧力からのずれの平均と解釈できる。この ζ を用いて応力テンソルを書き直すと、ニュートン流体の構成則は

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \quad (3.2.27)$$

となる。 μ は粘性率 (viscosity)、 ζ は体積粘性率と呼ばれる。体積粘性率は小さいので、特殊な場合を除いて考えないことが多い。粘性率を密度で割った動粘性率 $\nu = \mu/\rho$ を用いることもある。

一般に、粘性率は考えている流体の微視的な性質についての考察か、或いは観測や実験による結果によって決定されるべき量である。温度などの熱力学量に依ることが期待されるが定数として考えられていることもある。液体金属における典型的な値については Davidson (2001) の Appendix 3、地球の外核における観測値や理論については Stacey (2007a), Price (2007), Vočadlo (2007) を参考にすると良い。完全に電離したプラズマにおける理論については節 6.4 で説明する。

式 (3.2.1) にローレンツ力とニュートン流体の構成則を適用し、左辺を質量保存則を用いて式変形すると、

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3}\mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{f}_g \quad (3.2.28)$$

となる。ただし、粘性率は空間的に一様として、体積粘性率は無視した。この式はナビエ-ストークス方程式と呼ばれる。左辺の速度場のラグランジュ微分とは加速度のことを指すので、ニュートンの運動方程式に対応した形になっている。右辺第 1,3,4 項は応力テンソルを分解した結果出てきた項である。第 1 項は圧力勾配による力、すなわち微小領域が各方向から受ける圧力を差し引きした結果加わる正味の力を表す (傾圧項)。第 3 項を見ると、上で導入した粘性は速度場を拡散させる効果を持つことが分かる。つまり、速度差による歪みを緩和する方向に粘性応力が働いた結果、粘性流体の速度場は均されていく。第 4 項は流体が圧縮膨張するときに働く粘性の効果を表す。第 5 項は重力の項であり、具体的な形は次節で説明する。ナビエ-ストークス方程式において粘性率をゼロとした場合の運動方程式は、特にオイラー方程式と呼ばれる。

^{†5} 応力テンソルは式 (3.2.21) の段階で対称テンソル (添え字を入れ替えても同じ値になるようなテンソル) であることが分かる。対称テンソルの固有値は実数であるという性質に関連して、各基本ベクトル $\hat{\mathbf{n}}_i$ に垂直な面に働く応力 $\boldsymbol{\tau}_i$ が面に垂直 ($\boldsymbol{\tau}_i = \alpha_i \hat{\mathbf{n}}_i$) になるような直交基底 $\{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$ をとることができる (テンソルの対角化)。その時の各応力 (テンソルの固有値) τ_1, τ_2, τ_3 を主応力と呼ぶ。主応力の大きさの総和 (トレース) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ は、任意の基底でテンソルを展開したときの対角成分の和 $\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}$ に等しい。正方行列については付録 1.A、テンソル場については付録 1.B にまとめている。

3.2.4 重力

重力は、重力加速度を $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ として

$$\mathbf{f}_g = \rho \mathbf{g} \quad (3.2.29)$$

と表される。

例えば太陽大気を調べる場合、原理的には大気自身の密度によっても重力場が決定するため、ニュートン力学の範疇で考えるなら、

$$\mathbf{g} = -\nabla \phi_g \quad (3.2.30)$$

と重力ポテンシャル $\phi_g(\mathbf{x})$ を導入して、ポアソン方程式

$$\nabla^2 \phi_g = 4\pi G \rho \quad (3.2.31)$$

を解くべきである。しかし、太陽大気において働く重力は、そのほとんどが太陽内部の質量によるものなので、大気自身による重力は無視して、 \mathbf{g} を与えられたものとして計算する。また、太陽内部の対流を調べる場合は、対流の質量変動による重力場の摂動は無視して重力場を球対称として考え、 $M(r)$ をその点より内側にある質量の総和として

$$\mathbf{g}(r) = -\frac{GM(r)}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.2.32)$$

として考える^{†6}。地球の外核での対流を調べる場合は、更に密度を一様 ($M(r) \propto r^3$) とみなして^{†7}

$$\mathbf{g}(r) = -g_o \frac{r}{R_o} \hat{\mathbf{r}} \quad (3.2.33)$$

とすることがある (e.g. Christensen & Wicht, 2015)。 $g_o \simeq 11 \text{ m s}^{-2}$ はマントルとの境界 $R_o \simeq 3.5 \times 10^6 \text{ m}$ での重力加速度である。

一方で、自己重力を無視できない場合はポアソン方程式を解く必要性が出てくるが、重力が大きい場合や激しく時間変化する場合はニュートン力学の範疇では扱えなくなるので、一般相対論を考える必要がある^{†8}。ニュートン力学の範疇で毎時ポアソン方程式によって決定される (準

^{†6} 球対称の薄い球殻が作る重力場は、球殻の外側では球殻の質量が全て中心に集まっていると考えた場合と同じ重力場になり、球殻の内側では相殺されてゼロになるという性質がある。このことから、太陽を平均的に球対称と考えた場合、内部の注目している点より内側の質量だけを考えれば良いことが分かる。太陽の $M(r)$ については "Standard Solar Model" (e.g. Guenther et al., 1992; Christensen-Dalsgaard et al., 1996) を調べて欲しい。特に Christensen-Dalsgaard et al. (1996) のモデルは Model S と呼ばれる。Model S の実データは http://owwww.phys.au.dk/jcd/solar_models/ を参照のこと。

^{†7} 実際は外核の外側で $1.0 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$ 、内側で $1.2 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$ 程度であると考えられている (Dziewonski & Anderson, 1981, PREM と呼ばれる地球内部の標準モデル)。密度を一様とみなすのは、節 4.6.6 で説明するブシネスク近似の仮定のひとつである。

^{†8} 一般相対論的流体力学は例えば中性子星やブラックホールを調べるときに使われる。相対論については第 7 章を読んで欲しい。

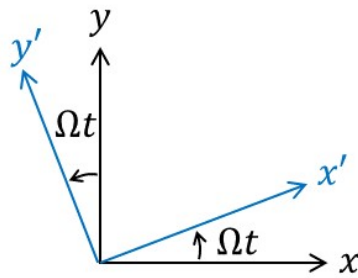


図 3.3 慣性系 I と回転系 R

定常の) 重力場を考える場合は、

$$\rho g_i = -\frac{\partial T_{ij}^{(g)}}{\partial x_j} \tag{3.2.34}$$

$$\text{ただし, } T_{ij}^{(g)} = \frac{1}{8\pi G} \frac{\partial \phi_g}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_g}{\partial x_k} \delta_{ij} - \frac{1}{4\pi G} \frac{\partial \phi_g}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_g}{\partial x_j} \tag{3.2.35}$$

と変形することで、重力を応力として扱える。

3.2.5 コリオリの力

回転系で考える場合、流体には遠心力とコリオリの力という慣性力が働く。慣性系 I の z 軸周りに図 3.3 のように一定の角速度 Ω で回転する系 R を考え、回転系で見た物理量はプライム (') を付けて表すことにする。

まず、電磁気学的量の慣性系と回転系の変換について、非相対論的極限では各場の量とローレンツ力は次のように変換することが知られている (e.g. Arendt, 1998; McDonald, 2008)。

$$\rho'_e = \rho_e \tag{3.2.36}$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} - \rho_e \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \tag{3.2.37}$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B} \tag{3.2.38}$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} \tag{3.2.39}$$

$$\mathbf{f}' = \rho'_e \mathbf{E}' + \mathbf{j}' \times \mathbf{B}' \tag{3.2.40}$$

$$= \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \tag{3.2.41}$$

$$= \mathbf{f} \tag{3.2.42}$$

ただし、

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{z} \tag{3.2.43}$$

$$\mathbf{r}(x, y, z) = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z} \tag{3.2.44}$$

である。磁場とローレンツ力がこの変換に対して不変であることに留意されたい。こうして変換された各量は、 $(\Omega \times \mathbf{r})/c$ について 1 次以上の項を無視すると、慣性系と同じ形のマクスウェル方程式に従う^{†9}。また、オームの法則 (2.4.2) もこの変換について共変である。以上のことから、誘導方程式もこの変換について共変になる。

次に、速度場 \mathbf{v} の変換を考えるために、ラグランジュ微分の変換を考える。回転系 R と慣性系 I のデカルト座標の基底には、

$$\hat{\mathbf{x}}' = \hat{\mathbf{x}} \cos(\Omega t + \varphi) + \hat{\mathbf{y}} \sin(\Omega t + \varphi) \quad (3.2.45)$$

$$\hat{\mathbf{y}}' = -\hat{\mathbf{x}} \sin(\Omega t + \varphi) + \hat{\mathbf{y}} \cos(\Omega t + \varphi) \quad (3.2.46)$$

$$\hat{\mathbf{z}}' = \hat{\mathbf{z}} \quad (3.2.47)$$

という関係がある。ここから直ぐに、

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}'}{\partial t} = \Omega \hat{\mathbf{y}}', \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}'}{\partial t} = -\Omega \hat{\mathbf{x}}', \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{z}}'}{\partial t} = 0 \quad (3.2.48)$$

という関係が計算できる。よって、ベクトル場 \mathbf{Q} の、慣性系 I でのラグランジュ微分は、

$$\left(\frac{D\mathbf{Q}}{Dt} \right)_I = \frac{DQ_{x'}}{Dt} \hat{\mathbf{x}}' + \frac{DQ_{y'}}{Dt} \hat{\mathbf{y}}' + \frac{DQ_{z'}}{Dt} \hat{\mathbf{z}}' + Q_{x'} \frac{D\hat{\mathbf{x}}'}{Dt} + Q_{y'} \frac{D\hat{\mathbf{y}}'}{Dt} + Q_{z'} \frac{D\hat{\mathbf{z}}'}{Dt} \quad (3.2.49)$$

$$= \frac{DQ_{x'}}{Dt} \hat{\mathbf{x}}' + \frac{DQ_{y'}}{Dt} \hat{\mathbf{y}}' + \frac{DQ_{z'}}{Dt} \hat{\mathbf{z}}' + \Omega Q_{x'} \hat{\mathbf{y}}' - \Omega Q_{y'} \hat{\mathbf{x}}' \quad (3.2.50)$$

となる。ここで回転系でのラグランジュ微分を、 \mathbf{Q} の回転系における成分のラグランジュ微分

$$\left(\frac{D\mathbf{Q}}{Dt} \right)_R = \frac{DQ_{x'}}{Dt} \hat{\mathbf{x}}' + \frac{DQ_{y'}}{Dt} \hat{\mathbf{y}}' + \frac{DQ_{z'}}{Dt} \hat{\mathbf{z}}' \quad (3.2.51)$$

とすると、

$$\left(\frac{D\mathbf{Q}}{Dt} \right)_I = \left(\frac{D\mathbf{Q}}{Dt} \right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} \quad (3.2.52)$$

となる。慣性系で見たときの各流体粒子の位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ をベクトル場と見てこの変換法則を適用すると、 $\mathbf{v} = D\mathbf{r}/Dt$ であることから、

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (3.2.53)$$

となる。更に、 \mathbf{v} について変換法則を適用して、

$$\left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right)_I = \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right)_R + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \quad (3.2.54)$$

$$= \left(\frac{D\mathbf{v}'}{Dt} \right)_R + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (3.2.55)$$

^{†9} 変換前と変換後で方程式の形が変わらないことを、その方程式はその変換について共変であると言う。

となる。

質量密度 ρ はスカラー場なので回転系への変換について不変 $\rho' = \rho$ であり、スカラー場の微分や空間微分は非相対論的極限では回転系への変換について形が変わらない。このことと $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ より、質量保存則 (3.1.2) は回転系への変換について共変であることが分かる。

運動量保存則の変換性を考える。式 (3.2.1) の左辺は質量保存則を用いると $\rho D\mathbf{v}/Dt$ となるので、

$$\rho \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right)_I = \rho \left(\frac{D\mathbf{v}'}{Dt} \right)_R + 2\rho\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' - \rho\Omega^2(x'\hat{\mathbf{x}}' + y'\hat{\mathbf{y}}') \quad (3.2.56)$$

となる。一方で右辺は共変なので、構成則が共変であると仮定すれば、回転系での運動量保存則は慣性系での形のまま、まるで

$$\mathbf{f} = -2\rho\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' + \rho\Omega^2(x'\hat{\mathbf{x}}' + y'\hat{\mathbf{y}}') \quad (3.2.57)$$

という外力 (慣性力) が働いているかのように書き下せば良いことになる。第 1 項はコリオリの力と呼ばれ、第 2 項は遠心力と呼ばれる。自己重力を考慮しない重力場を考える場合、遠心力は重力と同じように ρ に比例することを用いて、重力加速度 \mathbf{g} に組み込まれることが多い^{†10}。よって、遠心力を組み込んだ重力加速度を用いて重力を表せば、回転系への変換による付加項はコリオリの力の項だけになる。

コリオリの力は常に速度場 \mathbf{v}' と垂直なため、流体に対して仕事をしない。よって、重力加速度に遠心力を組み込む場合には、回転系への変換による運動エネルギー保存則への影響はない。

3.2.6 渦度方程式

$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ を渦度 (vorticity) と言う。運動方程式の代わりに渦度の時間発展方程式を考えることがある。まず、ベクトル解析の公式から、

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2}\nabla v^2 \quad (3.2.58)$$

という関係があることが分かる。ナビエ-ストークス方程式 (3.2.28) の移流項に上式を代入し、両辺に $\nabla \times$ を作用させると、勾配の回転がゼロであることを用いて、次式を得る。

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right) \quad (3.2.59)$$

$\nu = \mu/\rho$ は動粘性係数と呼ばれる。これを渦度方程式と言う。右辺第 2 項は傾圧項であり、密度一定の場合、あるいは等密度面と等圧面が一致する場合にゼロになる。逆に、傾圧力 $-\nabla p$ に直交する向きに密度差があった場合、慣性の違いによって流体の加速に差が生まれ、その結果渦

^{†10} そしてしばしば、重力に比べて十分に小さいとして無視される。

が生成される。傾圧項とローレンツ項が無視できる場合、上式は誘導方程式 (2.5.14) と同じ形であることを特筆しておく。

上式の右辺第 1 項をベクトル解析の公式を用いて変形すると、次のようにも書ける。ただし、他の項は無視する。

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\nabla \cdot \mathbf{v})\boldsymbol{\omega} \quad (3.2.60)$$

上式は流体粒子に沿った渦度の時間変化を表す。右辺の意味を分かりやすくするために、 $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_z)$ の場合を考える。

$$\text{右辺} = \omega_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \hat{\mathbf{x}} + \omega_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \hat{\mathbf{y}} - \omega_z \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \quad (3.2.61)$$

初めの 2 項は、渦度に垂直な向きの流れによって渦度の向きが変わる効果を表す。残りの項は、渦度に直交する平面内で圧縮流があった場合に渦度が強められる効果を表す。これらの効果は、節 4.2.2 で述べる磁力線凍結定理が渦線^{†11}の場合にも言えることを考慮すれば分かりやすい。

3.3 エネルギー保存則

流体力学では連続体近似のもとで考えると節 1.2.1 で述べたが、エネルギーについて考える場合には、各流体粒子はほとんど熱平衡の状態にあるという仮定のもとで考えることになる。局所熱平衡 (local thermodynamic equilibrium; LTE) と呼ばれる仮定である。この仮定の意味については、第 6 章で理解が深まると思われる。また、付録 3.A も参照して欲しい。今はとにかくそうすることで、平衡系の熱力学の概念を使ってエネルギーを議論する。各流体粒子において、単位質量あたりの内部エネルギー e を考える^{†12}。各流体粒子内の微視的な意味での力学的エネルギーをブラックボックスにして e に押し付けるというイメージである。MHD 方程式系を解くという観点では、エネルギー保存則を使って求めたいのは内部エネルギーの時間発展である。その意味では、節 3.3.3 の内部エネルギー保存則が肝なのだが、代わりに、運動エネルギーと電磁場のエネルギーも加えた全エネルギー保存則や、エントロピーの保存則を考えると便利な場合もある。

平衡系での熱力学の基礎知識については付録 3.A にまとめた。

^{†11} 接線がその点での渦度の向きに一致するような曲線群のこと。渦度も磁場と同様に非発散の場合なので、渦線は分岐・合流することはない。渦線の密集度は渦度の大きさに相当する。

^{†12} 勿論、記述方法としてはオイラー的記述である。

3.3.1 運動エネルギー保存則

運動量保存則 (3.2.1) の両辺に v_i を乗じて、適宜質量保存則を用いながら式変形すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 v_j \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} v_i) - \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijk} v_i v_j B_k + v_i f_i \quad (3.3.1)$$

となる。ただし、 $v^2 = v_i v_i$ は速度場の大きさの 2 乗である。この式は流体の単位体積あたりの運動エネルギー $\rho v^2/2$ についての保存則と解釈できる。右辺第 1 項は応力を介した隣の微小領域とのエネルギーのやり取りである。第 2 項は応力を介した運動エネルギーと内部エネルギーとの変換を表す。第 3,4 項はローレンツ力や外力によってなされる仕事率である。

特に、ニュートン流体を考える場合、構成則を代入することで、右辺第 2 項は

$$-\tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = p(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \Phi \quad (3.3.2)$$

$$\text{ただし, } \Phi = 2\mu \left\{ e_{ij} e_{ij} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \right\} \quad (3.3.3)$$

となる。 e_{ij} は節 3.2.3 で述べた歪速度テンソルである^{†13}。体積粘性率は考えていない。第 1 項は圧力による熱力学的な意味での仕事である。第 2 項の Φ は散逸関数と呼ばれる正の値をとる関数で、粘性による散逸の効果、すなわち粘性による運動エネルギーから内部エネルギーへの変換を表す。もっと一般に、応力を等方的な圧力 p と粘性応力 τ_{ij}^ν に

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}^\nu \quad (3.3.4)$$

と分け、散逸関数を

$$\Phi = \tau_{ij}^\nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (3.3.5)$$

と定義すれば、式 (3.3.2) のように書ける。

3.3.2 電磁場のエネルギー保存則

$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ という量を考えると、

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (3.3.6)$$

$$= -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \quad (3.3.7)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} B^2 \right) - \mu_0 \left\{ \frac{j^2}{\sigma} - \mathbf{j} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right\} \quad (3.3.8)$$

^{†13} 内部エネルギーの表記と混同しないように注意されたい。

となる。2 段目ではファラデーの法則 (2.1.3) とアンペールの法則 (2.5.9) を使い、3 段目ではオームの法則 (2.4.2) を用いた。これを書き直すと、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) = -\frac{j^2}{\sigma} - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \quad (3.3.9)$$

となる。この式は、磁場のエネルギー $B^2/(2\mu_0)$ の保存則と解釈できる。ポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$ はエネルギーフラックスである。右辺第 1 項はジュール熱やオーム散逸と呼ばれ、電磁場のエネルギーから内部エネルギーへの変換を表す。第 2 項はローレンツ力がする仕事率、すなわち運動エネルギーとの変換を表す。

変位電流と電場による力の項を無視せずに同じような式変形を行うと、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) = -\frac{j^2}{\sigma} - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \quad (3.3.10)$$

となる。式 (3.3.9) と見比べると、非相対論的 MHD 流体の場合は電場のエネルギーは考えなくて良いと解釈できる。

3.3.3 内部エネルギー保存則

内部エネルギーの保存則は次のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho e v_j) = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{j^2}{\sigma} - \mathcal{L} \quad (3.3.11)$$

右辺第 1 項の \mathbf{q} は熱流束と呼ばれ、流体の流れがなくとも隣の微小領域へ熱伝導として流出するエネルギーフラックスを表す。第 2,3 項は前節までで述べた圧力による仕事と粘性散逸、オーム散逸である。第 4 項の \mathcal{L} はそのほかの理由、例えば節 3.4.5 で説明する放射などの理由によって消失する単位体積あたりのエネルギーや、熱源があった場合の収入を表す。

熱流束について、熱的緩和時間より十分長い時間スケールにおいては、

$$q_i = -\kappa_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (3.3.12)$$

が成り立つ。 T は流体の温度である。これをフーリエの法則と言い、 κ_{ij} は熱伝導率 (thermal conductivity) と呼ばれる。等方的に同じ効率で熱が伝わると考える場合は $\kappa_{ij} = \kappa \delta_{ij}$ 、すなわち式 (3.3.11) の熱流束の項は

$$\nabla \cdot (\kappa \nabla T) \quad (3.3.13)$$

となる。強い磁場中の希薄なプラズマの場合、磁力線に垂直な方向 (\perp) の熱伝導率は、磁力線に

沿った方向 (\parallel) への熱伝導率より小さいと考えられる (節 6.1.6 参照)。その場合、熱流束の項は

$$\nabla_{\parallel} \cdot (\kappa_{\parallel} \nabla_{\parallel} T) + \nabla_{\perp} \cdot (\kappa_{\perp} \nabla_{\perp} T) \quad (3.3.14)$$

$$= \nabla \cdot (\kappa_{\perp} \nabla T) + \nabla \cdot \left\{ \frac{\kappa_{\parallel} - \kappa_{\perp}}{B^2} (\mathbf{B} \cdot \nabla T) \mathbf{B} \right\} \quad (3.3.15)$$

と表される。熱伝導率は粘性率と同じように、流体の微視的性質についての考察か、或いは観測や実験による結果によって決定されるべき量である。温度などの熱力学量に依ることが期待されるが定数として考えられていることもある。液体金属における典型的な値については Davidson (2001) の Appendix 3、地球の外核における観測値や理論については Stacey (2007a), Price (2007), Stacey (2007c) を参考にすると良い。完全に電離したプラズマにおける理論については節 6.4 で説明する。

応力を式 (3.3.4) のように、等方的な静止圧力と粘性応力に分けて表した場合、質量保存則を用いることで、内部エネルギー保存則は

$$\rho \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \Phi + \frac{j^2}{\sigma} - \mathcal{L} \quad (3.3.16)$$

となる。 Φ は式 (3.3.5) で定義された散逸関数である。あるいは、式 (3.3.11) の左辺をラグランジュ微分書き換え、付録 3.A.5 の知識を用いて他の状態量についてのラグランジュ微分に変換し、適宜質量保存則も用いることで、次式を得る。

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} + \frac{\alpha T}{\chi_T} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \Phi + \frac{j^2}{\sigma} - \mathcal{L} \quad (3.3.17)$$

$$\frac{1}{\tilde{\gamma}} \frac{Dp}{Dt} + \frac{\rho c_p}{\alpha} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \Phi + \frac{j^2}{\sigma} - \mathcal{L} \quad (3.3.18)$$

α は熱膨張率、 c_v は定積比熱、 c_p 定圧比熱、 χ_T は等温圧縮率、 $\tilde{\gamma}$ はグリユナイゼン定数である (付録 3.A.5 参照)。本章で τ_{ij} と書いている応力テンソルは圧力 p も含んでいることに注意されたい。特に、理想気体 $p = \rho k_B T / m$ (節 3.4.1 参照) の場合は、 γ を比熱比として、

$$\alpha = \frac{1}{T}, \quad c_v = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{k_B}{m}, \quad c_p = c_v + \frac{k_B}{m}, \quad \chi_T = \frac{1}{p}, \quad \tilde{\gamma} = \gamma - 1 \quad (3.3.19)$$

である。

3.3.4 全エネルギー保存則

前節までで述べた MHD 流体でのエネルギー収支をまとめると、図 3.4 のようになる。運動エネルギーと電磁場のエネルギーと内部エネルギーの保存則を足した、全エネルギーについての保存則は次のようになる。

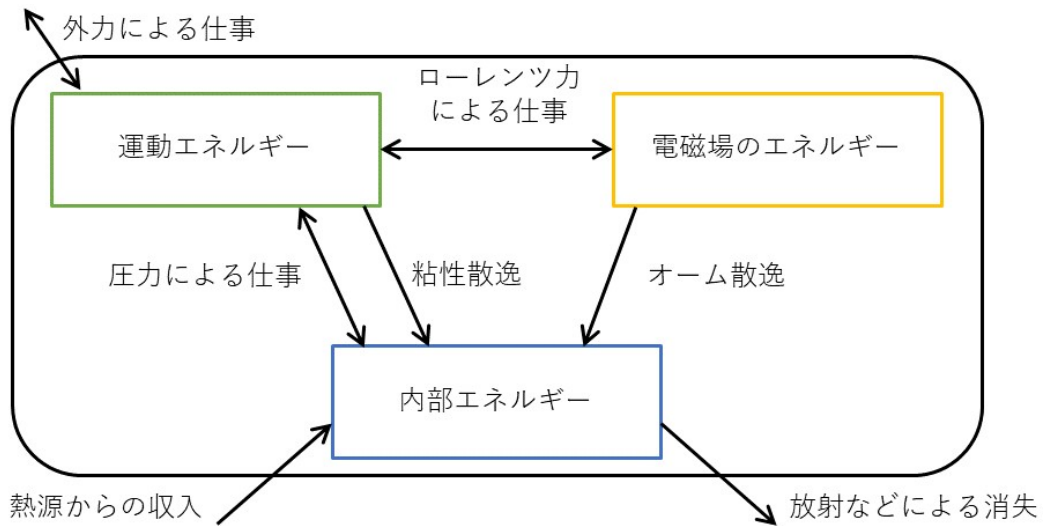


図 3.4 エネルギー収支

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \rho v^2 v_j + (\rho e + p) v_j + \frac{1}{\mu_0} \varepsilon_{jik} E_i B_k - \tau_{ij}^\nu v_i + q_j \right] = v_i f_i - \mathcal{L} \quad (3.3.20)$$

ただし、応力は式 (3.3.4) のように、等方的な圧力と粘性応力に分けて書いた。各項の意味をまとめる。まず、左辺の時間微分内の各項

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} \rho v^2, \quad \mathcal{E}_i = \rho e, \quad \mathcal{E}_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (3.3.21)$$

はそれぞれ、流体の運動エネルギー密度 (kinetic)、内部エネルギー密度 (internal)、磁場のエネルギー密度 (magnetic) である。左辺の $\nabla \cdot$ 内の各項は隣の微小領域とのエネルギーのやり取り (フラックス) を表し、

$$\mathcal{F}_k = \frac{1}{2} \rho v^2 \mathbf{v}, \quad \mathcal{F}_h = (\rho e + p) \mathbf{v}, \quad \mathcal{F}_m = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad \mathcal{F}_\nu = -\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}^\nu, \quad \mathbf{q} \quad (3.3.22)$$

はそれぞれ、移流による運動エネルギーのフラックス、移流によるエンタルピーフラックス、電磁場のエネルギーフラックス、粘性によるフラックス、熱伝導によるフラックス (熱流束) である。右辺は、系の内部でのエネルギー変換を表す項が打ち消しあった結果、外力による仕事と、熱のロスや熱源を表す項だけが残る。

3.3.5 エントロピーについての方程式 (熱輸送の式)

静止圧力が等方的な流体を考える。微小変化について

$$Tds = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (3.3.23)$$

という関係^{†14}を満たす量 s を考える。 s は単位質量あたりのエントロピーと呼ばれる。この関係から

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \quad (3.3.24)$$

となることが分かるので、式 (3.3.16) より s の時間発展式は

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = -\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \Phi + \frac{j^2}{\sigma} - \mathcal{L} \quad (3.3.25)$$

となる。この式を見ると、圧力による可逆的な仕事を表す項が消え、散逸による非可逆な加熱を表す項や冷却の項だけが残っている。エントロピーが時間的または空間的に一定に保たれている状況を断熱的 (adiabatic, isentropic) という。例えば、熱対流を調べるときにはエントロピーを考えると便利であることが節 4.6 で分かる。

3.3.6 重力エネルギー

重力が流体にする仕事は、運動エネルギー保存則 (3.3.1) 或いは全エネルギー保存則 (3.3.20) の右辺において、

$$\mathbf{v} \cdot (\rho \mathbf{g}) = -\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \phi_g \quad (3.3.26)$$

という項を考えることで表現できる。

まず、質量の移動による自己重力を無視し、重力加速度 \mathbf{g} を時間に依らない与えられたものとして考える場合について説明する。この場合、重力エネルギーは

$$\mathcal{E}_g = \rho \phi_g \quad (3.3.27)$$

と表される。 \mathcal{E}_g の時間微分を計算すると、

$$\frac{\partial \mathcal{E}_g}{\partial t} = \phi_g \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.3.28)$$

$$= -\phi_g \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (3.3.29)$$

$$= -\nabla \cdot (\rho \phi_g \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \phi_g \quad (3.3.30)$$

^{†14} $1/\rho$ を単位質量あたりの体積と解釈すれば、熱力学の教科書に書いてある形式と整合する。熱力学の基本知識については付録 3.A を参照のこと。

となるので、この式を全エネルギー保存則 (3.3.20) に加えることで、 $\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \phi_g$ が相殺して、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_m + \mathcal{E}_g) + \nabla \cdot (\mathcal{F}_k + \mathcal{F}_h + \mathcal{F}_m + \mathcal{F}_\nu + \mathbf{q} + \rho \phi_g \mathbf{v}) = -\mathcal{L} \quad (3.3.31)$$

となる。

$$\mathcal{F}_g = \rho \phi_g \mathbf{v} \quad (3.3.32)$$

は重力エネルギーのフラックスである。

次に、自己重力を考慮して、重力ポテンシャル ϕ_g がポアソン方程式

$$\nabla^2 \phi_g = 4\pi G \rho \quad (3.3.33)$$

によって毎時刻決定される場合を考える。この場合、重力エネルギーとして

$$\mathcal{E}_g = \frac{1}{2} \rho \phi_g \quad (3.3.34)$$

を考える。 $\int \mathcal{E}_g dV$ の時間微分を計算すると、

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathcal{E}_g dV = \frac{1}{2} \int_V \left(\phi_g \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi_g}{\partial t} \right) dV \quad (3.3.35)$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \phi_g \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \frac{\nabla^2 \phi_g}{8\pi G} \frac{\partial \phi_g}{\partial t} dV \quad (3.3.36)$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \phi_g \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \frac{\phi_g}{8\pi G} \nabla^2 \frac{\partial \phi_g}{\partial t} dV \quad (3.3.37)$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \phi_g \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \frac{1}{2} \int_V \phi_g \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (3.3.38)$$

$$= \int_V \phi_g \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (3.3.39)$$

$$= \int_V \{ -\nabla \cdot (\rho \phi_g \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \phi_g \} dV \quad (3.3.40)$$

となる。ただし、2 段目から 3 段目の変形では、第 2 項の積分を 2 回部分積分^{†15}し、表面積分項を無視した。表面積分項を無視するには、 ϕ_g を無限遠でゼロになるようにとり、積分領域 V をその表面が無限遠とみなせるくらい広くとれば良い。そのような領域を考えることができる系では上式が成り立ち、大域的に

$$\frac{d}{dt} \int_V (\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_m + \mathcal{E}_g) dV + \int_{\partial V} (\mathcal{F}_k + \mathcal{F}_h + \mathcal{F}_m + \mathcal{F}_\nu + \mathbf{q}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \mathcal{L} dV \quad (3.3.41)$$

が成り立つ。

^{†15} 例えば

$$\nabla \cdot (f \nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g$$

という関係式を体積分することで、

$$\int_V f \nabla^2 g dV = \int_{\partial V} (f \nabla g) \cdot d\mathbf{S} - \int_V \nabla f \cdot \nabla g dV$$

という部分積分公式が得られる。

3.3.7 ベルヌーイの定理

外力については、前節で述べたような定常的に与えられた重力を考え、電磁場が無く、散逸を無視できる状況 (完全流体、 $q_j = \tau'_{ij} = 0$) を考える。エネルギー消失項もゼロである ($\mathcal{L} = 0$) とする。これは、熱輸送の式 (3.3.25) を考慮すれば、 $Ds/Dt = 0$ の状況を考えていることに相当する。

更に、定常状態 ($\partial/\partial t = 0$) を考えた場合、質量保存則より $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$ となることと全エネルギー保存則 (3.3.20) から、次式が言える^{†16}。

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left[\frac{1}{2} v^2 + e + \frac{p}{\rho} + \phi_g \right] = 0 \quad (3.3.42)$$

単位質量あたりのエンタルピー $h = e + p/\rho$ (付録 3.A.3 参照) を導入すると、上式は

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2} v^2 + h + \phi_g \quad (3.3.43)$$

が流線 (各点で \mathbf{v} が接ベクトルとなるような曲線) に沿って一定に保たれることを言っている。これをベルヌーイの定理という^{†17}。 \mathcal{B} はベルヌーイ関数と呼ばれ、次に述べるように、考える系によって形を変える。

ρ が p のみの関数であるような状況をバロトロピック (barotropic、順圧) というが、バロトロピックな状況を考える場合、付録 3.A.3 で説明している h の全微分より、次式が成り立つことが分かる。

$$\mathbf{v} \cdot \nabla h = T \mathbf{v} \cdot \nabla s + \frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \nabla p \quad (3.3.44)$$

今は、 s が流線に沿って一定な状況 ($\mathbf{v} \cdot \nabla s = 0$) を考えているので、 $\rho = \rho(p)$ の場合は、不定積分を用いて

$$\mathbf{v} \cdot \nabla h = \mathbf{v} \cdot \nabla \int \frac{dp}{\rho} \quad (3.3.45)$$

と書ける。すなわち、この場合は

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2} v^2 + \int \frac{dp}{\rho} + \phi_g \quad (3.3.46)$$

^{†16} 電磁場がある状況でも、電気伝導率が無限大 (オーム散逸が無い) とみなせ、ローレンツ力が流体に仕事をしない場合は、電磁場のエネルギー保存則を繰り込まなくとも全エネルギー保存則が閉じるため、この節の議論が成り立つ。

^{†17} ベルヌーイの定理には、本節で述べるものとは別に、いわゆる一般化された (拡張された) ベルヌーイの定理もある。これは、バロトロピック ($\rho = \rho(p)$) かつ渦なし ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$) の流れについての定理である。定常の条件を課す必要はない。渦なしであることから、流れのポテンシャル Φ を $\mathbf{v} = \nabla \Phi$ と導入する。すると、バロトロピックな場合には、オイラー方程式を書き換えることで、次式が言える。

$$\nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + \int \frac{dp}{\rho} + \phi_g \right) = 0$$

つまり、左辺のカッコ内は時刻のみの関数であり、空間的に一様である。

である。

別の例として、非圧縮 ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) の流れを考える場合は、質量保存則より $\mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0$ が言えるので、内部エネルギー保存則 (3.3.16) より $\mathbf{v} \cdot \nabla e = 0$ が得られる。よって、 $\mathbf{v} \cdot \nabla h = \mathbf{v} \cdot \nabla (p/\rho)$ であり、

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + \phi_g \quad (3.3.47)$$

である。

あるいは、理想気体の場合は、比熱比を γ として $h = \gamma p / [(\gamma - 1)\rho]$ と書ける (節 3.4.1 参照) ので、

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \phi_g \quad (3.3.48)$$

である。

3.4 状態方程式

前節までで、誘導方程式、質量保存則、運動量保存則、エネルギー保存則 (或いはエントロピーについての方程式) の、成分にして 8 つの独立な方程式を説明した。そこには未知数として \mathbf{v} , \mathcal{B} と熱力学的状態量 ρ, p, T, e (或いは s)、輸送係数 (磁気拡散率、粘性率、熱伝導率) が出てきた。輸送係数については考えないことや、定数として扱うことも多いと述べた。輸送係数を除いても、未知数が成分にして 10 個あるので、方程式系を閉じるためには更に熱力学的状態量の間関係式が必要である。その関係は状態方程式と呼ばれる。今までは流体に共通した巨視的な性質に注目して方程式系を組み立ててきたが、ここで、考える系に固有の状態方程式を採用することによって、考えている流体の微視的な性質 (どういう粒子からなる気体か、或いは液体かなど) の情報を方程式系に取り入れることになる。よく使われる状態方程式をいくつか紹介する。適宜付録 3.A や 3.B も参考にして欲しい。

3.4.1 理想気体

気体を構成する粒子間の相互作用が (衝突の効果を除いて) 存在しないとした仮想的な気体を理想気体と言う。気体のいちばん簡単なモデル化であり、太陽大気のような弱結合 (節 6.1.2 参照) かつ非縮退 (節 6.1.7 参照) のプラズマでは良い精度で成り立つ。

平衡系の熱力学によると、系のエントロピーが示量変数^{†18}の関数として与えられれば、そのモデルの巨視的な性質の情報が全て、その関係式から導き出せる (e.g. 清水明, 2021)。これを

^{†18} 系のエネルギーやエントロピー、体積、粒子数などのように、同じ平衡状態で大きさが 2 倍の系では値が 2 倍になる量を示量変数と言う。示量変数には、共役な示強変数が存在する。示強変数は系の大きさが 2 倍になっても値が変わらない。

基本関係式を言う。本書では基本的に、示量変数については単位質量あたりの量を考えている。特に、単位質量当たりの体積 $v = 1/\rho$ を比体積と呼ぶ。単位質量あたりの粒子数 \tilde{n} は、気体を構成する分子の平均質量 m の逆数である ($\tilde{n} = 1/m$)。理想気体の基本関係式は次のように与えられる^{†19†20}。

$$s(e, v, \tilde{n}) = \frac{\tilde{n}}{\tilde{n}_0} s_0 + \tilde{n} k_B \ln \left[\left(\frac{e}{e_0} \right)^{1/(\gamma-1)} \left(\frac{v}{v_0} \right) \left(\frac{\tilde{n}}{\tilde{n}_0} \right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \right] \quad (3.4.1)$$

ここで、 $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ はボルツマン定数であり、 $s_0, e_0, v_0, \tilde{n}_0$ は適当な基準状態での値を指す。 γ は比熱比と呼ばれるパラメータであり、気体を構成する分子の微視的な性質から決まる。

式 (3.4.1) を e, v について偏微分し、熱力学的関係 (3.A.11) を用いることで、次の 2 つの状態方程式を得る。

$$p = \rho \frac{k_B}{m} T \quad (3.4.2)$$

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{k_B}{m} T \quad (3.4.3)$$

ここで、 T は温度である。気体の数密度 $n = \rho/m$ や無次元の平均分子量 $\mu = m/m_p$ (m_p は陽子質量)^{†21}、気体定数 $R = k_B/m_p$ を用いると、式 (3.4.2) は次のようにも表される。

$$p = nk_B T = \rho \frac{R}{\mu} T \quad (3.4.4)$$

完全電離していて陽子と電子の数密度が等しい水素の場合、電子質量を $m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ として、

$$m = (m_p + m_e)/2 \simeq 0.5m_p \quad (3.4.5)$$

となる。つまり $\mu = 0.5$ である。部分電離した水素の場合については次節で説明する。一般に、 $c_v = (\partial e / \partial T)_v$ を定積比熱と言うが、 m (や γ) の変化しない理想気体の場合は定数であることが分かる。式 (3.4.2) を用いると、式 (3.4.3) は次のようにも書ける。

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \quad (3.4.6)$$

^{†19} 付録 3.B.3 では、統計力学の原理から、適当なモデルを考えることでこの関係を導出している。具体的にはヘルムホルツの自由エネルギー $F(T, V, N)$ を導いているが、それをルジャンドル変換 (付録 3.A.3) すれば良い。

^{†20} $\ln x$ は自然対数を表す。

^{†21} $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ではなく、寧ろ原子質量単位 $m_u = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ を用いて分子量を表す方が行儀のよい書き方かもしれない。

プラズマを構成する粒子の微視的運動自由度 \tilde{N} を用いて γ を表すと、エネルギー等分配則^{†22} より、

$$\gamma = \frac{\tilde{N} + 2}{\tilde{N}} \quad (3.4.7)$$

となる。また、エントロピーは p, ρ を用いると次のように書ける。

$$s = c_v \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + \text{定数} \quad (3.4.8)$$

一般に断熱的 (adiabatic) $ds = 0$ な変化の際の

$$\gamma_{\text{ad}} = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_s \quad (3.4.9)$$

を断熱指数と言うが、理想気体の場合は断熱指数は比熱比に等しいことが分かる。

静止圧力が等方的で粘性や熱伝導を考えず、電気伝導度が無限大の流体を完全流体と言うが、完全流体かつ理想気体を考える場合の全エネルギー保存則は、構成則と式 (3.4.6) を式 (3.3.20) に代入して、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) + \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} \right) \mathbf{v} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right\} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} - \mathcal{L} \quad (3.4.10)$$

となる。或いは内部エネルギー保存則は式 (3.3.11) より、

$$\frac{Dp}{Dt} + \gamma p (\nabla \cdot \mathbf{v}) = -(\gamma - 1) \mathcal{L} \quad (3.4.11)$$

というように、圧力 p についての時間発展方程式に帰着する。

密度の高いプラズマを良い精度で計算するためには、理想気体の状態方程式からのずれを考慮しなければならない場合がある。非理想気体の状態方程式については、付録 6.A でいくつかの場合について紹介している。

3.4.2 サハの式：部分電離プラズマ

前節で、完全電離した水素、すなわち H^+ と e^- が等しい数密度で存在するプラズマの場合、平均分子量は $\mu = 0.5$ になると述べた。太陽の表面 (光球) 付近などの場合、例えば電子 2 つと

^{†22} 統計力学によると、系の持ち得るエネルギーが連続的とみなせる場合、系の微視的な意味での自由度ごとに、巨視的に見るとエネルギー $k_B T/2$ が配分される。完全電離した水素ガスの場合、各粒子の自由度は並進運動 3 方向の $\tilde{N} = 3$ であり、単位体積あたりに粒子は平均して ρ/m 個存在するので、系としての自由度は単位体積あたり $3\rho/m$ となり、

$$\rho e = \frac{3\rho}{2m} k_B T$$

となる。すなわち $c_v = 3k_B/(2m)$ であり、 $\gamma = 5/3$ である。ただし、低温の系を考える際には系の持ち得るエネルギーが離散的であると考え (量子力学的効果を考慮する) 必要が出てくるため、エネルギー等分配則が単純に成り立つわけではない。詳しくは付録 3.B を読んで欲しい。

H^+ が衝突して片方の電子がエネルギーを失い、 H^+ に拘束されたり、逆に H に電子が衝突して電子を剥がしたりすることで



のような反応が起きている。或いは H に光子が衝突して電子を剥がしたり (光電離)、その逆の過程も起きている。その結果、熱平衡状態では H と H^+ が混在している。このように部分電離したプラズマを扱う際も、理想気体と同様に、例えば式 (3.4.2) が使われるが、そこで必要になる平均分子量は電離度によって変化することになる。また、内部エネルギーも電離による、 T について非線形な効果を考える必要がある。

プラズマが H , H^+ , H^+ と同じ数密度の e^- からなると考えて、 H の質量密度を ρ_{HI} 、 H^+ の質量密度を ρ_{HII} として、電離度 x を

$$x = \frac{\rho_{HII}}{\rho_{HI} + \rho_{HII}} \quad (3.4.13)$$

と定義したとき、 x は次の式によって、全体の質量密度 $\rho (= \rho_{HI} + \rho_{HII} + \rho_e \simeq \rho_{HI} + \rho_{HII})$ と温度 T の関数として決定される。

$$\frac{x^2}{1-x} = \frac{m_p g_e}{\rho U_{HI}} \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_H}{k_B T}\right) \quad (3.4.14)$$

この式はサハの式と呼ばれる。サハの式についての詳しい説明は付録 3.B.5 を参照のこと。

$$\chi_H = \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = 13.6 \text{ eV} = 2.18 \times 10^{-18} \text{ J} \quad (3.4.15)$$

は水素の第一イオン化エネルギー、すなわち孤立した水素原子から電子を無限遠に引き離すのに必要なエネルギーである。ただし、 $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ は素電荷である。

このとき、プラズマガス全体の平均分子量は、電離度を用いて、

$$\mu = \frac{1}{1+x} \quad (3.4.16)$$

と表せる。また、ガス全体としての内部エネルギーは、電離した分だけポテンシャルを持つと考えて、

$$\rho e = \frac{3}{2} n k_B T + \chi_H n_{HII} \quad (3.4.17)$$

$$= \frac{\rho}{m_p} \left(\frac{3k_B T}{2\mu} + \chi_H x \right) \quad (3.4.18)$$

となる。

3.4.3 H と He からなるプラズマ

主に H と He からなるプラズマを考える場合、元素 H の質量分率を X 、元素 He の質量分率を Y 、その他の元素 (金属と呼ばれる) の質量分率を Z と書く。太陽の場合は、 $X = 0.73, Y = 0.25, Z = 0.02$ 程度と考えられている (Grevesse & Sauval, 1998)。この節では金属元素の電離は考慮しないことにする。

H は H_2 , $H(=H \text{ I}), H^+(=H \text{ II})$ の状態で存在していると考えられる^{†23}。一方で He は $He(=He \text{ I}), He^+(=He \text{ II}), He^{2+}(=He \text{ III})$ の状態で存在すると考えられる。前節の考えを発展させて、各電離度、解離度を

$$x = \frac{\rho_{HII}}{\rho_{H2} + \rho_{HI} + \rho_{HII}} = \frac{n_{HII}}{2n_{H2} + n_{HI} + n_{HII}} \quad (3.4.19)$$

$$y = \frac{\rho_{HeI}}{\rho_{H2} + \rho_{HI} + \rho_{HII}} = \frac{n_{HeI}}{2n_{H2} + n_{HI} + n_{HII}} \quad (3.4.20)$$

$$z_1 = \frac{\rho_{HeII}}{\rho_{HeI} + \rho_{HeII} + \rho_{HeIII}} = \frac{n_{HeII}}{n_{HeI} + n_{HeII} + n_{HeIII}} \quad (3.4.21)$$

$$z_2 = \frac{\rho_{HeIII}}{\rho_{HeI} + \rho_{HeII} + \rho_{HeIII}} = \frac{n_{HeIII}}{n_{HeI} + n_{HeII} + n_{HeIII}} \quad (3.4.22)$$

と定義する。ガスの全質量密度を ρ とすると、

$$X\rho = \rho_{H2} + \rho_{HI} + \rho_{HII} \quad (3.4.23)$$

$$Y\rho = \rho_{HeI} + \rho_{HeII} + \rho_{HeIII} \quad (3.4.24)$$

$$n_e = n_{HII} + n_{HeII} + 2n_{HeIII} \quad (3.4.25)$$

$$= \frac{\rho}{m_p} \left(Xx + \frac{Yz_1}{4} + \frac{Yz_2}{2} \right) \quad (3.4.26)$$

などの関係があるので、H の電離、He の 1 階電離、2 階電離に関するサハの式はそれぞれ、

$$\frac{x}{y} \left(Xx + \frac{Yz_1}{4} + \frac{Yz_2}{2} \right) = \frac{m_p g_e}{\rho U_{HI}} \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\chi_H}{k_B T} \right) \quad (3.4.27)$$

$$\frac{z_1}{1 - z_1 - z_2} \left(Xx + \frac{Yz_1}{4} + \frac{Yz_2}{2} \right) = \frac{m_p U_{HeII} g_e}{\rho U_{HeI}} \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\chi_{HeI}}{k_B T} \right) \quad (3.4.28)$$

$$\frac{z_2}{z_1} \left(Xx + \frac{Yz_1}{4} + \frac{Yz_2}{2} \right) = \frac{m_p g_e}{\rho U_{HeII}} \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\chi_{HeII}}{k_B T} \right) \quad (3.4.29)$$

となる。H₂ 分子の解離については、サハの式において m_e を H 原子 2 つについての換算質量 $m_p/2$ に置き換えて同じように考えることで、

$$\frac{2y}{1 - x - y} \left(Xx + \frac{Yz_1}{4} + \frac{Yz_2}{2} \right) = \frac{m_p U_{HI}^2}{\rho U_{H2}} \left(\frac{m_p k_B T}{4\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\chi_{H2}}{k_B T} \right) \quad (3.4.30)$$

^{†23} H⁻ も微量存在すると考えられるが、今は無視する。

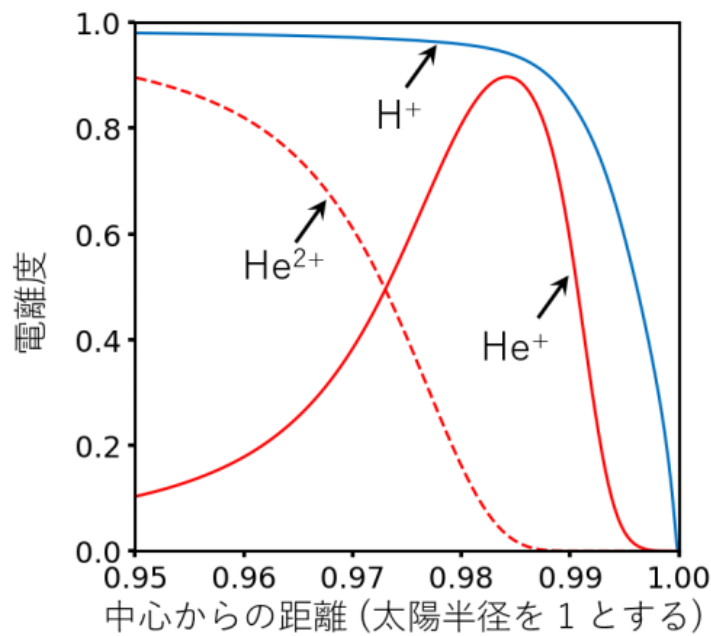


図 3.5 太陽対流層上部の大雑把な電離度：水素の電離とヘリウムの 1 階、2 階電離を考慮して、サハの式を連立させて計算した値。サハの式に現れる分配関数は基底状態だけを考慮した。温度と密度の構造には Christensen-Dalsgaard et al. (1996) の値を用いた。

と書ける。\$T, \rho\$ が分かっているならば、上記 4 式を連立させることで、\$x, y, z_1, z_2\$ を決定できる。

平均分子量 \$\mu\$ は

$$\mu = \frac{\rho}{m_p(n_{H_2} + n_{HI} + n_{HII} + n_{HeI} + n_{HeII} + n_{HeIII} + n_e + n_{metal})} \tag{3.4.31}$$

$$= \left\{ \frac{X}{2}(1 + 3x + y) + \frac{Y}{4}(4 + z_1 + 2z_2) + \left\langle \frac{1}{A} \right\rangle Z \right\}^{-1} \tag{3.4.32}$$

となる。ただし、\$\langle 1/A \rangle\$ は金属元素の原子量の逆数の平均であり、太陽の場合は \$\langle 1/A \rangle \simeq 1/15.5\$ となる。

一方、ガス全体としての内部エネルギーは、各粒子の並進自由度の寄与、\$H_2\$ 分子の内部自由度の寄与、電離、解離した分のポテンシャルに分けて考えて、

$$\rho e = \frac{3}{2}nk_B T + n_{H_2}(\langle e^r \rangle + \langle e^v \rangle) + \chi_H n_{HII} + \chi_{H_2} n_{HI} + \chi_{HeI} n_{HeII} + \chi_{HeII} n_{HeIII} \tag{3.4.33}$$

$$= \frac{\rho}{m_p} \left\{ \frac{3k_B T}{2\mu} + \frac{X(1-x-y)}{2}(\langle e^r \rangle + \langle e^v \rangle) + \chi_H X x + \chi_{H_2} X y + \chi_{HeI} Y z_1 + \chi_{HeII} Y z_2 \right\} \tag{3.4.34}$$

となる。理想気体の内部エネルギーの考え方について詳しくは付録 3.B.3, 3.B.4 を読んで欲しい。

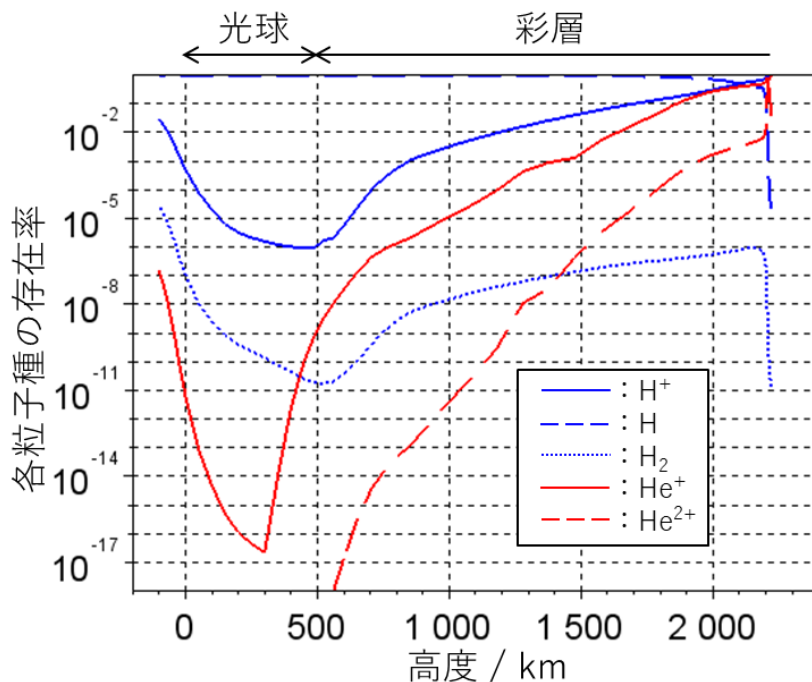


図 3.6 太陽大気の電離度のモデル：縦軸は各粒子種の質量存在率で横軸は太陽表面からの高度。 H^+ , H , H_2 , He^+ , He^{2+} について、それぞれ本節で定義した $x, y, 1-x-y, z_1, z_2$ に相当する量をプロットしている。Fontenla et al. (1993) の model C のデータから作成。

太陽の表面 (光球) 付近は、図 3.5 (内部側), 3.6 (大気側) のように部分電離の状態にあるため、光球付近での現象を調べる際にはこの節の手法が使われるようだ (e.g. Vögler et al., 2005; Iijima & Yokoyama, 2015; Schlichenmaier et al., 1998)^{†24}。一般に電離度がサハの式からずれた場合、例えばサハの式より大きな値になった場合は、電離過程よりも再結合過程の方が多く起きることで、サハの式に戻ろうとする。このような現象を緩和と言う。光球ではこの電離平衡への緩和がすぐに起きるため、電離度がずっとサハの式に従っているという仮定が比較的良く成り立つ。一方で、光球の上空の彩層は密度が小さいために電離や再結合の反応速度が遅く、緩和にかかる時間が注目する流体现象の時間スケールと同じくらいか、それよりも長くなっていると考えられている (Carlsson et al., 2019)。故に、彩層では電離度がサハの式からずれていることによる効果を考慮する必要が出てくる。このような太陽大気での現象を調べる際には節 6.5 で説明する多流体方程式の考え方が用いられる。

他には、星間雲の研究に関して Black & Bodenheimer (1975), 一般の宇宙物理的な流体について Vaidya et al. (2015) でもこの節と同じような議論がされている。

^{†24} ただし、これらの研究では主要な金属元素の電離まで考慮されている一方、 H_2 分子は完全に解離している ($y = 1 - x$) として考慮していないようである。

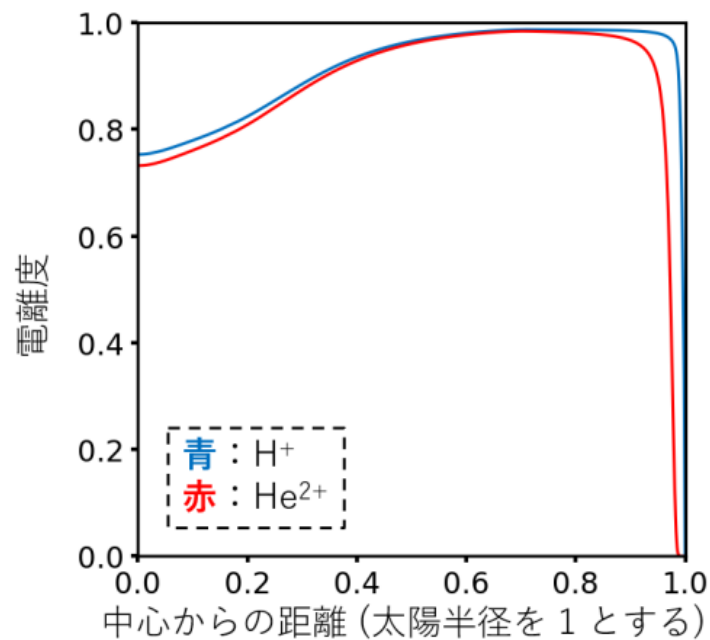


図 3.7 サハの式を仮定して計算された太陽内部の電離度：水素の電離とヘリウムの 1 階、2 階電離を考慮して、サハの式を連立させて計算した値。サハの式に現れる分配関数は基底状態だけを考慮した。温度と密度の構造には Christensen-Dalsgaard et al. (1996) の値を用いた。

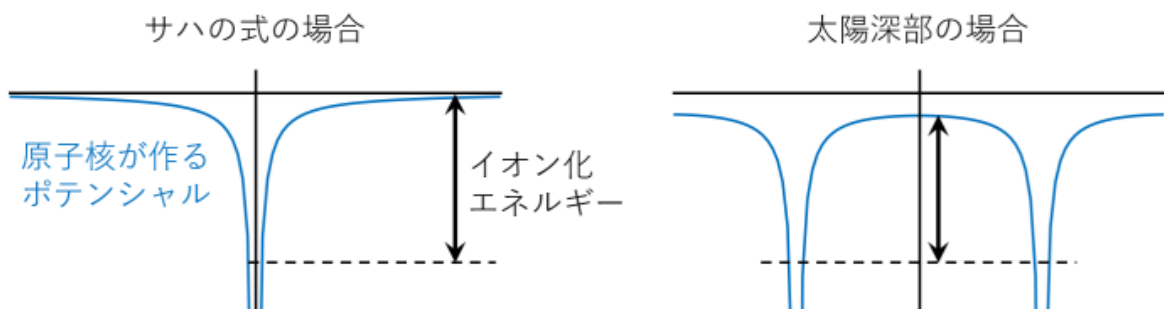


図 3.8 サハの式が仮定している束縛ポテンシャルと太陽深部のポテンシャルのイメージ

3.4.4 [トピック] 太陽中心の圧力電離

図 3.7 は、太陽内部の水素とヘリウムの電離度を、単純にサハの式を連立させることによって計算したものである。表面付近では部分電離の状態だが、表面から離れると殆ど完全電離の状態になっている。しかし、 $0.5R_{\odot}$ (R_{\odot} は太陽半径) より内側の領域では再び電離度が低くなっている。この内側の領域ではサハの式を適用することはできず、実際には水素やヘリウムは完全電離の状態にあると考えられている。

詳しくは付録 3.B.5 で説明しているが、サハの式において、水素原子内の電子は図 3.8 の左の

ように、独立した原子を想定したポテンシャルによって束縛されていると仮定されている。しかし、太陽深部のように密度が高くなってくると、大雑把には図の右のように、近隣の原子のポテンシャルの重ね合わせに束縛されていると考える必要がある。その結果、イオン化エネルギーが小さくなり、サハの式の場合より電離しやすい状況になっている。このような仕組みによる電離を圧力電離 (pressure ionization) と言う。

圧力電離が起きる条件を大雑把に見積もる。簡単のために、純粋な水素気体を考える。水素の束縛電子軌道の半径は、その軌道の主量子数 (付録 5.B.6 参照) を ν 、ボーア半径を a_0 として、

$$a = a_0 \nu^2 \quad (3.4.35)$$

と見積もれる。一方で、水素の数密度を n_H とすれば、1 個の水素原子が占める体積は $1/n_H$ である。よって、2 つの水素原子間の平均距離は、球の半径を考えることで、

$$d = \left(\frac{3}{4\pi n_H} \right)^{1/3} \quad (3.4.36)$$

と見積もられる。原子間距離より大きな半径を持つ軌道は存在できないと考え、電子が束縛され得る軌道が持つ最大の主量子数は、

$$a < \frac{d}{2} \rightarrow \nu^2 < \left(\frac{3}{4\pi n_H} \right)^{1/3} \frac{1}{2a_0} \quad (3.4.37)$$

と見積もられる。ここに太陽中心の値 $\rho_c \simeq 150 \text{ g/cm}^3$, $n_H \simeq \rho_c/m_p$ を代入すると、 $\nu^2 < 0.13$ を得る。これは、いちばん軌道半径の小さい基底状態の束縛電子すら太陽中心では存在できないことを言っている。つまり、水素原子は完全に電離していなければならない。 $d > a_0$ を満たす条件は、

$$\rho < \frac{3m_p}{4\pi a_0^3} = 3 \text{ g/cm}^3 \quad (3.4.38)$$

である。太陽内部で質量密度がこのオーダーになるのは大体 $0.5R_\odot$ である。

上では水素原子が静止しているのを暗に仮定して考察したが、実際にはそれぞれが勝手な向きに運動している。また、隣の水素との距離が近くなると、量子力学のトンネル効果によって、束縛電子が隣の原子に移動する現象も考える必要が出てくる。Kippenhahn et al. (2012) によると、圧力電離を完璧に記述できる手法はまだ無いらしい。恒星内部の構造を調べる文脈の場合、深部では強制的に完全電離の状態に固定して考えることもあるようだ (Kippenhahn et al., 2012; Christensen-Dalsgaard, 2021)。

3.4.5 放射

高温のプラズマでは、電磁波によるエネルギー輸送の効果も考慮する必要がある。電磁波のように流体の時空間スケールより小さいスケールでの現象は、方程式の粗視化をする際に切り

捨てられたが、温度が高い場合はこの違うスケールの現象が流体のダイナミクスに大きな影響を与えるため、電磁波を巨視的に見た放射場として考え、場合によっては放射輸送方程式というものを解くことで考慮対象に戻す。放射が流体に及ぼす作用は運動量交換とエネルギー交換である。放射場の存在により、新たに放射圧という圧力が流体に加わる。また、エネルギー保存則に放射による加熱および冷却を表す項が加わる。放射輸送について詳しくは第 5 章で説明する。

3.4.6 ポリトロープ

理想気体を考えているときに、更に

$$\frac{p}{\rho^\alpha} = \text{一定} \quad (3.4.39)$$

という関係を仮定して議論する場合がある。この関係は状態方程式ではなく、熱輸送に関する近似的条件とみなすべきである。 α はポリトロープ指数と呼ばれる。例えば、熱伝導が起こる時間スケール^{†25}より短い時間スケールでの現象を調べる場合^{†26}は、流体粒子が断熱的であると仮定して α を断熱指数と同じ値に設定する。逆に、調べたい時間スケールで流体が常に等温と考えられる場合には $\alpha = 1$ に設定する。他にも考える流体の条件に従って適宜値を設定する。

3.4.7 一般的な状態方程式の線形化

地球の外核などの対流問題を扱う場合は、例えば節 4.3.1 で説明する静水圧平衡のような平衡状態での ρ, p, T を基本場 ρ_0, p_0, T_0 として、

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{x}) + \rho_1(\mathbf{x}, t) \quad (3.4.40)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0(\mathbf{x}) + p_1(\mathbf{x}, t) \quad (3.4.41)$$

$$T(\mathbf{x}, t) = T_0(\mathbf{x}) + T_1(\mathbf{x}, t) \quad (3.4.42)$$

のように、場の量を基本場とそこからのずれに分けて考える。そしてそのずれは小さいとして、状態方程式を

$$\rho = \rho(p, T) \quad (3.4.43)$$

$$= \rho_0 + \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial p} \right)_T p_1 + \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial T} \right)_p T_1 \quad (3.4.44)$$

$$= \rho_0(1 + \chi_T p_1 - \alpha T_1) \quad (3.4.45)$$

というように、 p_1, T_1 の 1 次の項までで展開する。 χ_T, α はそれぞれ等温圧縮率、熱膨張率と呼ばれる。 χ_T, α や後に出てくるような熱力学的係数は液体分子の微視的構造に立ち入って理論的

^{†25} 例えば κ を熱伝導率、 L を考えている空間スケールとして L^2/κ が典型的な時間スケールである。

^{†26} ただし熱的緩和時間よりは長くなければならない。

に考察するか、地震波による観測、或いは実験室での測定によって決定されるべき量である^{†27}。

3.4.8 2 成分からなる混合液体

地球の外核は、主成分の Fe に加えて、質量にして 10% 程度の軽元素 (S, Si, O など) が含まれていると考えられている (市川浩樹 & 土屋卓久, 2018)。よって外核の対流の計算では、質量分率 ξ の S と質量分率 $1 - \xi$ の Fe からなる流体と考えることがある (e.g. Jones, 2015)。 ξ のことを組成と呼ぶ。本節の議論は Braginsky & Roberts (1995), Landau & Lifshitz (1987, Chapter VI) を参考にした。

熱力学的関係

組成 ξ の変化を考慮する場合、熱力学第 1 法則は次のように書ける。

$$de = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho + \mu d\xi \quad (3.4.46)$$

μ は化学ポテンシャルと呼ばれる。付録 3.A.6 で説明している量とは異なる定義だが、同様の役割を持つ。エントロピーを T, p, ξ の関数として表した場合、その全微分は

$$ds = \frac{c_p}{T}dT - \frac{\alpha}{\rho}dp + \frac{h^\xi}{T}d\xi \quad (3.4.47)$$

と書ける。 α は熱膨張率、 c_p は定圧比熱である。

$$h^\xi = T \left(\frac{\partial s}{\partial \xi} \right)_{p,T} \quad (3.4.48)$$

は反応熱と呼ばれる。一方で、 ρ を p, s, ξ で表すことにすると、全微分は

$$d\rho = \frac{\alpha}{c_p \tilde{\gamma}} dp - \frac{\alpha \rho T}{c_p} ds - \rho \alpha^\xi d\xi \quad (3.4.49)$$

と書ける。 $\tilde{\gamma}$ はグリユナイゼン定数^{†28}である。

$$\alpha^\xi = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)_{s,p} \quad (3.4.50)$$

は断熱組成膨張率とも呼ぶべき量である。各微分量についての考え方は付録 3.A.5 を参考にしたい。

^{†27} 詳しくは例えば Stacey (2007a), Price (2007) を参照のこと。

^{†28} 定数という名前が付いているが状態量である。断熱指数の表記と混同しないように注意されたい。

組成の保存則

方程式系に未知数 ξ が加わったので、 ξ の時間発展式も必要になる。軽元素についての質量保存則は、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\xi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\xi v_i) = -\frac{\partial i_j}{\partial x_j} \quad (3.4.51)$$

と書ける。右辺は隣の流体粒子との組成のやり取りを表す項であり、組成が一様になろうとする向きに働く。質量保存則を用いて左辺をラグランジュ微分に変形すると、次のようにも書ける。

$$\rho \frac{D\xi}{Dt} = -\frac{\partial i_j}{\partial x_j} \quad (3.4.52)$$

エントロピー方程式の修正

組成の変化 ξ を考慮しても質量保存則の変更はない。運動量保存則に関しては、状態方程式 $p = p(\rho, s, \xi)$ や、場合によっては応力についての構成則への修正を除けば変更はない。エネルギー保存則に関しても、例えば内部エネルギー保存則 (3.3.11) や全エネルギー保存則 (3.3.20) において熱流束を q_j と書くならば変更はない。しかし、この場合の q_j は、熱伝導によるフラックスと組成の拡散によるフラックスの和であることをこれから説明する。エントロピーについての方程式 (熱輸送の式) は修正を要する。

内部エネルギー保存則 (3.3.11) の左辺は次のように変形できる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho e v_j) = \rho \frac{De}{Dt} \quad (3.4.53)$$

$$= \rho T \frac{Ds}{Dt} + \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \mu \rho \frac{D\xi}{Dt} \quad (3.4.54)$$

$$= \rho T \frac{Ds}{Dt} - p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - \mu \frac{\partial i_j}{\partial x_j} \quad (3.4.55)$$

ただし、1 段目は質量保存則を用いてラグランジュ微分の形に書き換え、2 段目では熱力学第 1 法則 (3.4.46) を用い、3 段目では質量保存則 (3.1.2) と組成の保存則 (3.4.52) を代入した。これと内部エネルギー保存則 (3.3.11) の右辺が等しいことから、熱輸送の式として次を得る。

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = -\frac{\partial q_j^s}{\partial x_j} - i_j \frac{\partial \mu}{\partial x_j} + \Phi + \frac{j^2}{\sigma} - \mathcal{L} \quad (3.4.56)$$

ただし、 Φ は式 (3.3.2) で導入される散逸関数である。また、 $q_j^s = q_j - \mu i_j$ と書いた。上式の形から、 q_j^s は熱伝導のフラックスと解釈できる。つまり、エネルギー保存則に現れる熱流束 q_j は q_j^s と i_j を用いて次のように表される。

$$q_j = q_j^s + \mu i_j \quad (3.4.57)$$

こうして、熱輸送の式には新たに $-i \cdot \nabla \mu$ の項が加わることになる。一般に、組成が一様に近づくことで系全体のエントロピーは増加する。

方程式系を閉じるためには、 μ についての状態方程式が与えられなければならない。例えば、 μ を p, T, ξ の関数として表すことにした場合、

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)_{T,\xi} = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\right)_{p,T} \quad (3.4.58)$$

$$= -\frac{1}{\rho^2} \left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\right)_{p,s} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_{p,\xi} \left(\frac{\partial s}{\partial\xi}\right)_{p,T} \right] \quad (3.4.59)$$

$$= \frac{1}{\rho} \left(\alpha^\xi + \frac{\alpha h^\xi}{c_p} \right) \quad (3.4.60)$$

などと μ の偏微分が計算できる。ただし、適宜マクスウェルの関係式や連鎖律を用いた (付録 3.A.5)^{†29}。新たな微分量

$$\mu_T^\xi = \left(\frac{\partial\mu}{\partial\xi}\right)_{p,T} \quad (3.4.61)$$

を導入すれば、 $\nabla\mu$ は次のように書ける。

$$\nabla\mu = \frac{1}{\rho} \left(\alpha^\xi + \frac{\alpha h^\xi}{c_p} \right) \nabla p - \frac{h^\xi}{T} \nabla T + \mu_T^\xi \nabla\xi \quad (3.4.62)$$

熱流束の閉包則

組成の変化を考えない場合は、熱的緩和時間より十分に長い時間スケールの流体现象を考えるとこの仮定の下で、熱流束 \mathbf{q} は温度の勾配に比例すると考えることができた (フーリエの法則)。 ξ を考える場合は、 \mathbf{q}^s, \mathbf{i} のそれぞれが $\nabla T, \nabla\mu$ に比例すると考える。ただし、流体の応答は等方的 (比例係数がスカラーである) とする。

$$i_j = -\kappa^\xi \frac{\partial\mu}{\partial x_j} - \frac{\beta}{T} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (3.4.63)$$

$$q_j^s = -\beta \frac{\partial\mu}{\partial x_j} - \kappa^s \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (3.4.64)$$

新たな係数 $\kappa^\xi, \beta, \kappa^s$ を導入した。 \mathbf{i} と \mathbf{q}^s の表式に β が共通して現れることは、オンサーガー対称性と呼ばれる。オンサーガー対称性は一般に次の場合に成り立つ (e.g. 沙川貴大, 2022, §3.2)。

^{†29} 内部エネルギーの全微分 (3.4.46) に 2 回ルジャンドル変換を施すことで、ギブスの自由エネルギー $g = e - Ts + pv$ (付録 3.A.3 参照) の全微分は

$$dg = \frac{1}{\rho} dp - s dT + \mu d\xi$$

であることが分かる。 ξ 微分と p 微分の可換性によって、式 (3.4.58) の関係 (マクスウェルの関係式) が分かる。

単位時間あたりに系に流入する熱量や粒子数などを一般にカレントと言い、 J_a (a はラベル) と書く。カレントはアフィニティ F_a により駆動され、単位時間あたりのエントロピー生成 $\dot{\sigma}$ が両者の積の和で表されているとする。

$$\dot{\sigma} = \sum_a J_a F_a \quad (3.4.65)$$

ただし、時間反転に対して符号を変えるようなアフィニティは無いとする。系は平衡状態に近いとし、各カレント J_a がアフィニティ F_a の一次関数であると近似する。

$$J_a = \sum_{a'} L_{aa'} F_{a'} \quad (3.4.66)$$

このときの係数 (オンサーガー係数) $L_{aa'}$ は、次の 2 つの性質を持つ。

- 熱力学第二法則を満たすためには、行列 $L_{aa'}$ の固有値は全て非負でなければならない (半正定値行列でなければならない)。
- 非平衡統計力学のゆらぎの定理からの帰結として、対称性 $L_{aa'} = L_{a'a}$ を持つ (オンサーガーの相反定理)。

式 (3.4.56) を保存則の形に変形すると、次式のようになる。ただし、粘性散逸やオーム散逸は無視する。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho s v_j + \frac{q_j^s}{T} \right) = -\frac{q_j^s}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_j} - \frac{i_j}{T} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \quad (3.4.67)$$

レイノルズの輸送定理 (節 1.5.3 参照) を用い、流体に固定された領域 \hat{V} で上式を積分する。エントロピー生成 σ とは、系のエントロピー増加量から (流入した熱量 / 温度) を引いたものなので、次のように書ける。

$$\dot{\sigma} = \frac{d}{dt} \int_{\hat{V}} \rho s dV - \left(- \int_{\partial \hat{V}} \frac{\mathbf{q}^s}{T} \cdot d\mathbf{S} \right) \quad (3.4.68)$$

$$= \int_{\hat{V}} \left[\mathbf{q}^s \cdot \left(-\frac{1}{T^2} \nabla T \right) + \mathbf{i} \cdot \left(-\frac{1}{T} \nabla \mu \right) \right] dV \quad (3.4.69)$$

$\partial \hat{V}$ は領域 \hat{V} の境界を指す^{†30}。これが任意の領域に対して言えることに留意し、上式の \mathbf{q}^s, \mathbf{i} をカレント、 $-\nabla T/T^2, -\nabla \mu/T$ をそれらに共役なアフィニティと捉えることで、上述したオンサーガー対称性が言える。

^{†30} $d\mathbf{S}$ は境界での外向き法線ベクトルと同じ向きであることを考慮して、表面積分項には負号を付けた。

付録 3.A 熱力学の基礎知識

MHD で使われる熱力学の基礎知識をまとめた。適宜熱力学の教科書も参考にして欲しい。この付録は主に久保亮五 (1998) を参考にし、補足的に Cantwell 氏の講義ノート (Cantwell) も参考にした。熱力学の理論構造を整理したい場合は 清水明 (2021) を薦める。

3.A.1 準静的過程

系がある状態から別の状態へ移る過程でのエネルギーのやり取りを考えるのが熱力学である。系がある状態から別の状態に移ると、一般には一時的に熱的非平衡状態になり、移ってから一定の時間が経過すると平衡状態に落ち着く。平衡状態にある系は、温度 T 、圧力 p 、体積 V などの量によってその性質を記述することができる。このような量を状態量と言う。流体力学では各流体粒子が平衡状態に落ち着くまでの時間スケール (熱的緩和時間) よりずっと長い時間スケールの現象を考えるため、各過程の間中ずっと平衡状態が保たれていると仮定する。このような極限的な過程を準静的過程と言う。準静的過程を考えることによって、熱平衡状態で定義される各状態量の時間微分を考えることができる。

3.A.2 熱力学第 1 法則・第 2 法則

単位質量あたりの内部エネルギーの変化 δe は、系に加えられた熱量 q と系がした仕事 w の差に等しくなる (熱力学第 1 法則)。

$$\delta e = q - w \quad (3.A.1)$$

上式は一般のどのような過程に対しても成り立つ。一方で、準静的過程の微小変化に対して、

$$w = pd \left(\frac{1}{\rho} \right) = pdv \quad (3.A.2)$$

と書ける。 p は圧力で、 $v = 1/\rho$ は比体積、すなわち単位質量あたりの体積である。 q は系への熱の出入りの大きさを表していて、「平衡状態にあるこの系の熱量は q である」などといった状態量 q なるものを考えることはできない。その代わりに、準静的過程の微小変化において、

$$q = Tds \quad (3.A.3)$$

となる状態量 s を考えることができる。 T は系の温度である。 s は単位質量あたりのエントロピーと言う。すると、熱力学第 1 法則は準静的過程の微小変化について、

$$de = Tds - pdv \quad (3.A.4)$$

と書ける。

外界と断熱された系を考えた場合、ある過程が可逆ならば系内のエントロピーの総量は一定に保たれ、不可逆ならばエントロピーの総量は増大する (熱力学第 2 法則)。流体の場合についてこのことを確認してみる。熱伝導率が等方的な場合について、エントロピーの方程式 (3.3.25) を保存則の形に書きなおすと、

$$\Upsilon = \frac{\kappa}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) \quad (3.A.5)$$

という正の値をとる関数を導入して、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho s v_j - \frac{\kappa}{T} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{T} \left(\Upsilon + \Phi + \frac{j^2}{\sigma} - \mathcal{L} \right) \quad (3.A.6)$$

となる。冷却の項 \mathcal{L} が無い状況で断熱的な箱 V に閉じ込められた流体を考え、箱全体に渡って積分すると、 V の境界を貫くフラックスはゼロになるので、

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s dV = \int_V \left\{ \frac{1}{T} \left(\Upsilon + \Phi + \frac{j^2}{\sigma} \right) \right\} dV \quad (3.A.7)$$

となる。この式から、箱内で T の勾配や散逸がある限り箱全体のエントロピーは増え続けることが分かる。

3.A.3 ルジャンドル変換

状態方程式が与えられて

$$p = p(e, v), \quad T = T(e, v) \quad (3.A.8)$$

の形が分かると、エントロピーは e, v の関数として表され、その全微分は熱力学第 1 法則より

$$ds = \frac{1}{T} de + \frac{p}{T} dv = \frac{1}{T} de - \frac{p}{\rho^2 T} d\rho \quad (3.A.9)$$

となる。すなわち $e, v (= 1/\rho)$ が場の量として定義されていれば、 s も e, v を介して場の量になり、

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{T} \frac{\partial e}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2 T} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.A.10)$$

などのように微分が表される。

$$\left(\frac{\partial s}{\partial e} \right)_\rho = \frac{1}{T}, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_e = -\frac{p}{\rho^2 T} \quad (3.A.11)$$

ということである。熱力学では偏微分を書くときに、その関数をどの変数の関数として考えているかを明示するために、固定している変数を添えて表記する。

ここで、

$$f = e - Ts \quad (3.A.12)$$

という量を考える。\$e\$ の全微分は分かっているので、\$f\$ の全微分は

$$df = de - sdT - Tds \quad (3.A.13)$$

$$= Tds - pdv - sdT - Tds \quad (3.A.14)$$

$$= -sdT - pdv \quad (3.A.15)$$

$$= -sdT + \frac{p}{\rho^2}d\rho \quad (3.A.16)$$

となり、状態方程式が与えられて \$s, p\$ が \$T, \rho\$ の関数として表されていれば、\$f\$ も \$T, \rho\$ の関数になることが分かる。\$f\$ はヘルムホルツの自由エネルギーと呼ばれる。

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_\rho = -s, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_T = \frac{p}{\rho^2} \quad (3.A.17)$$

である。上記の第 1 式を式 (3.A.12) に戻すことで、

$$e = f - T \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_v \quad (3.A.18)$$

という関係が分かる。これを (ヘルムホルツの自由エネルギーに関する) ギブス-ヘルムホルツの式と言う。上式は次のようにも変形できる。

$$e = -T^2 \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{f}{T} \right) \right]_v \quad (3.A.19)$$

他には、エンタルピー \$h\$ とギブスの自由エネルギー \$g\$ を考えることもある。それぞれの定義と全微分は次の通りである。

$$h = e + pv, \quad dh = Tds + vdp \quad (3.A.20)$$

$$g = f + pv, \quad dg = -sdT + vdp \quad (3.A.21)$$

すなわち、\$h, g\$ の偏微分は次のようになる。

$$\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_p = T, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{\rho} \quad (3.A.22)$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_p = -s, \quad \left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho} \quad (3.A.23)$$

3.A.4 マクスウェルの関係式

例えば、

$$\left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial e}{\partial s} \right) \right]_s = \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right) \right]_v \quad (3.A.24)$$

というように、偏微分の可換性を使うと、\$e\$ の全微分から

$$\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_s = - \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v \quad (3.A.25)$$

となることが分かる。 v を ρ に変換すると、

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_s = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho \quad (3.A.26)$$

である。 f, h, g の 2 階偏微分についても同じように考えると、

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_T = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \quad (3.A.27)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_p \quad (3.A.28)$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \quad (3.A.29)$$

という関係式が出てくる。

3.A.5 諸微分量の定義と求め方

よく使われる微分量を次に示す。

$$\text{定積比熱} \quad c_v = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_\rho \quad (3.A.30)$$

$$\text{定圧比熱} \quad c_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \quad (3.A.31)$$

$$\text{等温圧縮率} \quad \chi_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T \quad (3.A.32)$$

$$\text{断熱圧縮率} \quad \chi_s = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \quad (3.A.33)$$

$$\text{等温体積弾性率} \quad K_T = -v \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \quad (3.A.34)$$

$$\text{断熱体積弾性率} \quad K_s = -v \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \quad (3.A.35)$$

$$\text{熱膨張率} \quad \alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \quad (3.A.36)$$

$$\text{グリュナイゼン定数} \quad \tilde{\gamma} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial e}\right)_\rho = \frac{\rho}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_s \quad (3.A.37)$$

これらの量^{†31}は互いに独立ではなく、次のような関係を持つ。

^{†31} 英語では比熱 = specific heat、圧縮率 = compressibility、体積弾性率 = bulk modulus、熱膨張率 = volume expansion coefficient、グリュナイゼン定数 = Grüneisen parameter である。

$$K_T = \frac{1}{\chi_T}, \quad K_s = \frac{1}{\chi_s} \quad (3.A.38)$$

$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{\chi_T}{\chi_s} = \frac{K_s}{K_T} = 1 + \alpha \tilde{\gamma} T \quad (3.A.39)$$

$$c_p = c_v + \frac{\alpha^2 T}{\rho \chi_T} \quad (3.A.40)$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{\alpha}{\rho c_v \chi_T} = \frac{\alpha}{\rho c_p \chi_s} \quad (3.A.41)$$

これらの微分量を用いて別の微分量を表したいときには、次のことを知っているると便利である。3つの変数 x, y, z が

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_x dy \quad (3.A.42)$$

という関数関係にあるとき、 z を固定 ($dz = 0$) して dx, dy の比をとると、

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_x / \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y \quad (3.A.43)$$

となる。

例えば式 (3.A.40) の関係は

$$c_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \quad (3.A.44)$$

$$= T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v + T \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (3.A.45)$$

$$= T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (3.A.46)$$

$$= T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p / \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \quad (3.A.47)$$

$$= c_v + \frac{v \alpha^2 T}{\chi_T} \quad (3.A.48)$$

と求まる。1 段目は c_p の定義である。2 段目は $s(v(p, T), T)$ と見て連鎖律を用いた。3 段目はマクスウェルの関係式 (3.A.27)、4 段目は (3.A.43) の関係を用いた。

また例えば、 $(\partial\rho/\partial s)_p$ を求めたいときは、

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p = -\rho^2 \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \quad (3.A.49)$$

$$= \rho^2 \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T / \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \quad (3.A.50)$$

$$= \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p / \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_p \quad (3.A.51)$$

$$= -\frac{\rho\alpha T}{c_p} \quad (3.A.52)$$

というように変形する。1 段目はマクスウェルの関係式 (3.A.28)、2 段目は (3.A.43) の関係、3 段目はマクスウェルの関係式 (3.A.29) を用いた。

恒星の内部構造の文脈では、上で紹介した微分量の代わりに、次のように定義された無次元量が用いられることもある。

$$\tilde{\alpha} = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln p}\right)_T = \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = p\chi_T \quad (3.A.53)$$

$$\delta = -\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_p = -\frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = T\alpha \quad (3.A.54)$$

$$\gamma_{\text{ad}} = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho}\right)_s = \frac{\rho}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{K_s}{p} \quad (3.A.55)$$

$$\nabla_{\text{ad}} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p}\right)_s = \frac{p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \frac{p\alpha}{\rho c_p} = \frac{p\delta}{T\rho c_p} \quad (3.A.56)$$

特に γ_{ad} は断熱指数 (adiabatic index)、 ∇_{ad} は断熱温度勾配 (adiabatic temperature gradient) と呼ばれる。或いは、これらの量と次の関係にある量 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ をチャンドラセカールの断熱指数 (Chandrasekhar's adiabatic exponents) と言う。

$$\Gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho}\right)_s = \gamma_{\text{ad}} \quad (3.A.57)$$

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln T}\right)_s = \frac{1}{\nabla_{\text{ad}}} \quad (3.A.58)$$

$$\Gamma_3 = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho}\right)_s + 1 \quad (3.A.59)$$

これらは次の関係を持つ。

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_3 - 1} = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} \quad (3.A.60)$$

3.A.6 化学ポテンシャル

前節までは、単位質量あたりの粒子数 \tilde{n} は一定の場合を考えていた。 \tilde{n} も変化する場合を考え、状態方程式が

$$e = e(T, v, \tilde{n}), \quad s = s(T, v, \tilde{n}), \quad p = p(T, v, \tilde{n}) \quad (3.A.61)$$

などを与えられた場合、ヘルムホルツの自由エネルギー $f = e - Ts$ も (T, v, \tilde{n}) の関数となり、その全微分は

$$df = -sdT - pdv + \mu d\tilde{n} \quad (3.A.62)$$

となる。ここで、

$$\mu = \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{n}} \right)_{T,v} \quad (3.A.63)$$

は化学ポテンシャルと呼ばれる。 $s(T, v, \tilde{n}), e(T, v, \tilde{n})$ の形が分かっていたら $f = e - Ts$ より $f(T, v, \tilde{n})$ の形も分かり、オイラーの関係式

$$f = -pv + \mu\tilde{n} \quad (3.A.64)$$

を用いると、 $\mu(T, v, \tilde{n})$ の形も決定できる。2つの系で熱を自由にやり取りできるときに、熱平衡状態では2つの系の温度が等しくなった。或いは2つの系が互いに体積を自由に变化させられるときには、熱平衡状態では2つの系の圧力が等しくなった。同様に、2つの系が粒子を自由にやり取りできるときには、熱平衡状態では2つの系の化学ポテンシャルが等しくなる。

例えば、 μ と s の関係は

$$Tds = de - sdT - df \quad (3.A.65)$$

$$= de + pdv - \mu d\tilde{n} \quad (3.A.66)$$

より、

$$\mu = -T \left(\frac{\partial s}{\partial \tilde{n}} \right)_{e,v} \quad (3.A.67)$$

だと分かる。

付録 3.B 統計力学の基礎知識

熱平衡状態にある系の微視的な性質をブラックボックスにして、巨視的な性質を議論するのが熱力学であるが、一方で系が量子力学に従う多数の粒子からなるとして実際にその平均的な性質を計算することで、熱力学と整合する巨視的な性質を議論するのが統計力学である。この章で必要な統計力学の基礎知識をまとめた。適宜統計力学の教科書も参考にして欲しい^{†32}。また、統計力学はしばしば、量子力学による結果と合わせて威力を発揮する。本付録では量子力学から導かれる知見を述べるに留まっている。適宜付録 5.B も参考にして欲しい。

この付録は私が東京大学理学部で受けた講義のノートを基に作成したが、補足的に久保亮五 (1998) も参考にした。

3.B.1 統計力学の原理

統計力学は次の 2 つの原理から出発する。

1 つめは等重率の原理である。孤立した系、すなわち粒子数 N 、体積 V 、系の持つエネルギー E が一定の場合、平衡状態では系の個々の微視的状态はどれも等しい確率で実現される。微視的状态とは例えば次のような意味である。系を構成する N 個の粒子それぞれの運動状態を、その粒子の位置と速度 $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{v}_i)$ で区別するとき、「1 番目の粒子が $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{v}_1)$ にあり、かつ 2 番目の粒子が $(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{v}_2)$ にあり、かつ ... N 番目の粒子が $(\boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{v}_N)$ にあるような状態」が系の微視的状态のうちの一つである。ただし、 N 個の粒子のエネルギーを合計すると E になり、全粒子が占める体積は V でなければならない。そのような拘束条件を満たす微視的状态の総数を $W(E, V, N)$ とすると、個々の微視的状态が実現される確率は $1/W$ になる。 W を状態数と言う。また、系のエネルギーが $E \sim E + \delta E$ の間の値を持つような状態の総数を $W(E)$ としたとき、

$$W(E) = g(E)\delta E \quad (3.B.1)$$

という関係を持つ量 $g(E)$ を状態密度と言う。普通の系では $W(E), g(E)$ は E の増加関数になり、その増加の割合は N が大きいときには急激になる。このような系を統計力学的に正常な系と言う。この節で考える系はみな統計力学的に正常である。

2 つめの原理はボルツマンの原理である。状態数 W が E, V, N の関数として求まっているときに、

$$S(E, V, N) = k_B \ln W(E, V, N) \quad (3.B.2)$$

を統計力学的エントロピーと言う。 k_B はボルツマン定数である。このように定義されたエントロピーは、熱力学におけるエントロピーと整合的に振舞う。例えば、系の温度を熱力学に対応す

^{†32} 例えば Huang (1987) が、熱力学の復習や第 6 章で説明する運動論、統計力学の基礎から高度な内容まで充実している。

るように

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} \quad (3.B.3)$$

と導入すると、この統計力学的温度は熱力学的温度と整合的な量になる。熱力学的温度とは、2つの系(系 I と II)の間でエネルギーのやり取りが自由にできるときに、長い時間が経った平衡状態でこの2つの系の温度が等しくなるような量だった。このことを統計力学的温度でも確認してみる。系 I, II の状態密度をそれぞれ $g_I(E), g_{II}(E)$ と書き、2つの系を合わせた全系の状態密度を $g(E)$ と書く。全系のエネルギーは E_0 で保存されているとする。系 I がエネルギー E_1 を持つ1つの微視的状态にあるとき、系 II はエネルギー $(E_0 - E_1)$ を持つ全ての微視的状态が可能である。よって、系 I が持ちうる全てのエネルギーについて足し合わせることで、

$$g(E_0) = \int_0^{E_0} g_I(E) g_{II}(E_0 - E) dE \quad (3.B.4)$$

となる。等重率の原理より、今足し合わせた個々の微視的状态は等確率で実現されるので、系 I が $E \sim E + \delta E$ の間のエネルギーを持つ確率 $f(E)\delta E$ は

$$f(E)\delta E = \frac{g_I(E)g_{II}(E_0 - E)\delta E}{g(E_0)} \quad (3.B.5)$$

となる。 N が大きいときは、 $g_I(E), g_{II}(E)$ は E の急激な増加関数なので、この確率密度関数 $f(E)$ はとある点 E^* で鋭いピークを持つ。つまり、ほぼ確実に系 I はエネルギー E^* を持つことになる。停留条件は

$$\left. \frac{\partial}{\partial E} \{k_B \ln f(E)\} \right|_{E=E^*} = 0 \quad (3.B.6)$$

なので、式 (3.B.5) とエントロピーの定義より、

$$\frac{\partial S_I^*}{\partial E} - \frac{\partial S_{II}^*}{\partial E} = 0 \quad (3.B.7)$$

が実現されることになる。ここで統計力学的温度の定義を思い出すと、2つの系が等温になっていることが分かる。

3.B.2 カノニカル分布と分配関数

ある系(系 I)は周りの環境と自由にエネルギーのやり取りができ、平衡状態で等温に保たれているとする。このとき、環境は系 I に比べて十分大きなエネルギーを持つ熱浴(系 II)と考えることができる。十分大きなエネルギーを持つので、系 I とのエネルギーのやり取り程度では熱浴のエネルギーは変化しないとみなせる。このとき、系 I と熱浴を合わせた全体の系は一定のエネルギー E_0 を持つ孤立系と考えられる。系 I が $E \sim E + \delta E$ のエネルギーを持つ1つの微視

の状態にある確率 $f(E)\delta E$ ^{†33} は、その状態が実現されているときに熱浴がとりうる状態数に比例するので、

$$f(E)\delta E \propto g_{\text{II}}(E_0 - E)\delta E \quad (3.B.8)$$

となる。 $E_0 \gg E$ なので、 E について展開すると、

$$f(E)\delta E \propto \frac{g_{\text{II}}(E_0 - E)}{g_{\text{II}}(E_0)} \quad (3.B.9)$$

$$= \exp \left[\frac{1}{k_B} \{ S_{\text{II}}(E_0 - E) - S_{\text{II}}(E_0) \} \right] \quad (3.B.10)$$

$$\simeq \exp \left[-\frac{E}{k_B} \frac{\partial S_{\text{II}}(E_0)}{\partial E} \right] \quad (3.B.11)$$

$$= \exp \left(-\frac{E}{k_B T} \right) \quad (3.B.12)$$

となる。言葉で説明すると、環境とのエネルギーのやり取りが自由な系が、平衡状態でエネルギー E の 1 つの微視的状态にある確率は、ボルツマン因子 $\exp[-E/(k_B T)]$ に比例する。このような微視的状态のエネルギーによる確率分布をカノニカル分布と言う。このような事情から、統計力学では、逆温度

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad (3.B.13)$$

を用いることも多い。更に、確率密度を規格化することで

$$f(E) = \frac{\exp(-\beta E)}{Z} \quad (3.B.14)$$

と書ける。規格化定数 Z は、系の N, V が変化しない場合には

$$Z = \int g(E) \exp(-\beta E) dE \quad (3.B.15)$$

となる。系がとりうる全ての微視的状态について和を取るという意味である。エネルギーが離散的な状況を考える場合は、エネルギー E_i を持つ微視的状态の数を g_i として

$$Z = \sum_i g_i \exp(-\beta E_i) \quad (3.B.16)$$

と書ける。 Z は分配関数または状態和と呼ばれる。

内部エネルギー、すなわち系のエネルギーの期待値は、

$$\langle E \rangle = \sum_i E_i \cdot \frac{g_i \exp(-\beta E_i)}{Z(\beta, V, N)} \quad (3.B.17)$$

$$= -\frac{1}{Z(\beta, V, N)} \frac{\partial}{\partial \beta} Z(\beta, V, N) \quad (3.B.18)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(\beta, V, N) \quad (3.B.19)$$

^{†33} 前節で考えた $f(E)$ とは違う確率密度を考えていることに注意されたい。

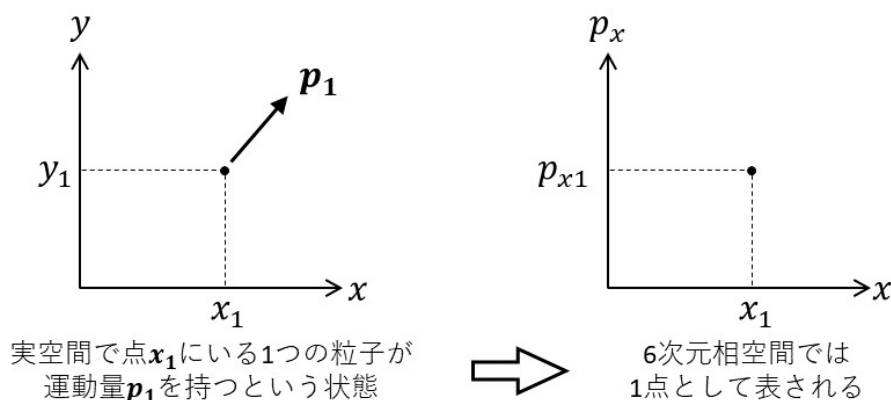


図 3.9 相空間の概念

というように、分配関数を用いて計算できる。ここで上式とギブス-ヘルムホルツの式 (3.A.19) を見比べると、

$$F(T, V, N) = -k_B T \ln Z(T, V, N) \quad (3.B.20)$$

という関数は熱力学的ヘルムホルツの自由エネルギー f に対応することが分かる。上式で導入される F を統計力学的ヘルムホルツの自由エネルギーと言う。つまり、分配関数が求まれば F も求まり、平衡状態で実現される圧力 p やエントロピー S は熱力学に倣って、

$$p(T, V, N) = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T, N}, \quad S(T, V, N) = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V, N} \quad (3.B.21)$$

と求まる。

3.B.3 単原子分子理想気体

温度 T 、体積 V 、粒子数 N が一定で、質量 m の単原子分子からなる気体の平衡状態を考える。このとき、各分子間の相互作用がなく、各分子はポテンシャルに縛られないと考えると理想気体の状態方程式が導き出せる。

まず、分配関数を求めたいが、この系の微視的状态を数え上げるときには相空間というものを考える。図 3.9 で示したように、とある 1 つの粒子が座標 \mathbf{x} にいて運動量 \mathbf{p} を持つ、という状態は 6 次元相空間 $dx dy dz dp_x dp_y dp_z$ 中の 1 点として表される。古典力学においては、この相空間中の点は連続的、すなわち 2 点の間には必ず別の点があるので、このままではまだ数え上げることはできない。しかし、量子力学では自由粒子の状態は、相空間の 6 次元体積 $h^3 = (2\pi\hbar)^3$ 中に 1 つの割合で存在すると考えられる^{†34}。 $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$ はプランク定数と呼ばれる、長さ \times 運動量 (角運動量) の次元を持つ物理定数である。この考え方を用いて、 h^3 を相空間の

^{†34} 詳しくは 199 ページの脚注で述べる。

最小単位に設定し、この最小単位の個数で数え上げる。更に、 N 個の分子からなる気体を考える場合は、各分子が各座標で各運動量を持つ、という 1 つの微視的状态は、 $6N$ 次元の相空間

$$d\Gamma = dx_1 dx_2 \dots dx_N dy_1 \dots dz_N dp_{x1} dp_{x2} \dots dp_{xN} dp_{y1} \dots dp_{zN} \quad (3.B.22)$$

を考えると、1 点として表せる。このときには、 $6N$ 次元体積 $(2\pi\hbar)^{3N}$ を最小単位として数え上げる。ただし、各分子を識別することはできないので、 $N!$ で割る必要がある^{†35}。

分子の持つエネルギーは運動エネルギー $(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m$ だけなので、系のエネルギー E は

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{p_{xi}^2 + p_{yi}^2 + p_{zi}^2}{2m} \quad (3.B.23)$$

となる。各微視的状态を $6N$ 次元相空間で数え上げることで分配関数を求めると、

$$Z = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N} N!} \int \exp(-\beta E) d\Gamma \quad (3.B.24)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N} N!} \int \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m}\right) dx_1 \dots dx_{3N} dp_1 \dots dp_{3N} \quad (3.B.25)$$

$$= \frac{V^N}{(2\pi\hbar)^{3N} N!} \int \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m}\right) dp_1 \dots dp_{3N} \quad (3.B.26)$$

$$= \frac{V^N}{N!} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3N/2} \quad (3.B.27)$$

となる。3 段目では座標に関する積分を系の体積 V を用いて表し、4 段目ではガウス積分^{†36}を実行した。よって、ヘルムホルツの自由エネルギーは

$$F = -k_B T \ln Z \quad (3.B.28)$$

$$= -k_B T \ln \left\{ \frac{V^N}{N!} \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3N/2} \right\} \quad (3.B.29)$$

^{†35} この数え方だと、複数の粒子が相空間で同じ最小単位にいるような状態でも $N!$ で割ってしまう。また、このような状態は、パウリの排他律 (節 5.B.9 参照) に従う粒子を考えている場合は排除しなければならない。しかし温度が十分に高く、粒子が様々なエネルギーの値をとりうる場合は、そのような特殊な状態の数は全体の状態数に比べて無視できるので、大雑把に $N!$ で割るだけで計算する。

^{†36} $a > 0$ のとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

となる。この積分はガウス積分と呼ばれる。

となる。ここから、

$$p = -\frac{\partial}{\partial V}(-k_B T \ln V^N) \quad (3.B.30)$$

$$= \frac{Nk_B T}{V} \quad (3.B.31)$$

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \beta^{-3N/2} \quad (3.B.32)$$

$$= \frac{3}{2} Nk_B T \quad (3.B.33)$$

というようにして、単原子分子理想気体の状態方程式が導かれる。

3.B.4 二原子分子理想気体

T, V, N 一定の平衡状態にある二原子分子気体を考える。各分子間の相互作用は無いとして、理想気体を考える。二原子分子が質量 m_1 と m_2 の原子からなるとして、全質量 M 、換算質量 μ 、慣性モーメント I を

$$M = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad I = \mu r^2 \quad (3.B.34)$$

とする。ただし、 r は 2 原子間の距離である。このとき、二原子分子の運動は、重心 (質量 M) の並進運動、重心周り (慣性モーメント I) の回転運動、2 つの原子間距離を微小変化させる運動である分子振動 (換算質量 μ) の 3 つに分解して考えることができる。よって系のエネルギー E は、 N 個の分子の並進運動のエネルギーを E^t 、分子 1 個の回転運動、分子振動のエネルギーをそれぞれ e^r, e^v として、

$$E = E^t + \sum_{i=1}^N (e_i^r + e_i^v) \quad (3.B.35)$$

となる。回転運動の慣性モーメント I は、分子振動によって r が変化するのに伴って変化する。また、回転のエネルギーが大きくなると遠心力によって r が大きくなるのに伴って変化する。しかし、今は一定の距離 r_0 で近似する。一方で、分子振動の有効ポテンシャルも遠心力によって変化するが、回転していないときのポテンシャルで考える。すると、3 種の運動は全て互いに独立なので、分配関数は、 N 個の分子の並進運動の自由度による分配関数を Z_t 、1 個の分子の回転運動、分子振動の自由度による分配関数をそれぞれ z_r, z_v として、

$$Z = Z_t (z_r z_v)^N \quad (3.B.36)$$

となる。つまり、ヘルムホルツの自由エネルギーは

$$F = -k_B T \ln Z_t - Nk_B T \ln z_r - Nk_B T \ln z_v \quad (3.B.37)$$

$$= F_t + Nf_r + Nf_v \quad (3.B.38)$$

である。ここで、 Z_t, F_t は前節で求めた単原子分子理想気体の場合の m を M に換えたものである。つまり、内部エネルギー $\langle E \rangle$ は、単原子分子理想気体の場合のものに、二原子分子の回転運動と分子振動の自由度による寄与を加えたものになる。 f_r, f_v は二原子分子 1 個についての考察をした結果求まるので、 V には依らない。そのため、圧力 p は単原子分子理想気体の場合と同じになる。

i) 分子回転

量子力学によると、回転運動のエネルギー e^r は

$$e_j^r = \frac{\hbar^2}{2I} j(j+1) \quad (3.B.39)$$

$$\text{ただし, } j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.B.40)$$

という飛び飛びの値しか持ち得ない (付録 5.B.5 参照)。 \hbar はディラック定数である。そして、 e_j^r のエネルギーを持つ状態は $(2j+1)$ 個存在する。

H_2 分子の回転の分配関数を考える場合には、もう少し話が複雑になる。各 H 原子はスピンと呼ばれる運動をする。H 原子はこのスピンによって 2 つの状態を持ち得る。その 2 つの状態を $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ と書くことにする。 H_2 分子全体としては、各 H 原子のスピンによって $2 \times 2 = 4$ 通りの状態が考えられる。そのうち、

$$|\uparrow\uparrow\rangle, \quad |\downarrow\downarrow\rangle, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) = |\mathcal{A}\rangle \quad (3.B.41)$$

の 3 つの独立な状態^{†37}は原子の置換について対称、すなわち 2 つの矢印を入れ替えても元の状態と同じになる。このような状態の H_2 分子をオルト水素と言う。反対に、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) = |\mathcal{B}\rangle \quad (3.B.42)$$

という状態は原子の置換について反対称、すなわち 2 つの矢印を入れ替えると元の状態に負号を付けた状態になる。このような状態の H_2 分子をパラ水素と言う。

エネルギー e_j^r を持つ重心周りの回転運動の状態のうちの 1 つを $|j, m\rangle$ と書く。ただし、 m は $-j, \dots, 0, \dots, j$ の $(2j+1)$ 通りの値をとる。 j が偶数、すなわち $j = 2k, k = 0, 1, 2, \dots$ のときは、状態 $|2k, m\rangle$ は原子の置換について対称になり、 j が奇数、すなわち $j = 2k+1, k = 0, 1, 2, \dots$ のときは、状態 $|2k+1, m\rangle$ は原子の置換について反対称になるという性質を持つ (付録 5.B.9 参照)。

^{†37} 1 つ目の原子が $|\uparrow\rangle$ かつ 2 つ目の原子が $|\downarrow\rangle$ という状態を $|\uparrow\downarrow\rangle$ と書くことにする。このとき、例えば $|\uparrow\downarrow\rangle$ は $|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle$ のことであり、2 原子全体としての状態は $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ の 4 状態を基底としたヒルベルト空間で考えることができる (つまりベクトルと同じような方法論を用いることができる) というのが量子力学の法則のひとつである。つまり、(3.B.41) の 3 つ目のような状態を考えられることが量子力学の特徴であり、日常的な感覚とのずれでもある。

「スピンを考慮した H_2 分子が回転運動をする」という全体の状態 $|\text{spin}, j, m\rangle$ を考えたとき、 $|\text{spin}, j, m\rangle$ は原子の置換について反対称でなければならない^{†38}。よって、

$$|\uparrow\uparrow, 2k+1, m\rangle, \quad |\downarrow\downarrow, 2k+1, m\rangle, \quad |\mathcal{A}, 2k+1, m\rangle, \quad |\mathcal{B}, 2k, m\rangle \quad (3.B.43)$$

という状態しか許されない。

分配関数は、オルト水素の場合とパラ水素の場合に分けて考えて、

$$z_r = z_o + z_p \quad (3.B.44)$$

$$z_o = \sum_{k=0}^{\infty} 3\{2(2k+1)+1\} \exp\left[-\frac{\hbar^2}{2Ik_B T}(2k+1)(2k+2)\right] \quad (3.B.45)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 3(4k+3) \exp\left[-\frac{2\Theta_r}{T}(2k^2+3k+1)\right] \quad (3.B.46)$$

$$z_p = \sum_{k=0}^{\infty} \{2(2k)+1\} \exp\left[-\frac{\hbar^2}{2Ik_B T}(2k)(2k+1)\right] \quad (3.B.47)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (4k+1) \exp\left[-\frac{2\Theta_r}{T}(2k^2+k)\right] \quad (3.B.48)$$

$$\text{ただし,} \quad \Theta_r = \frac{\hbar^2}{2Ik_B} \quad (3.B.49)$$

となる。ここで、 $r_0 = 7.4 \times 10^{-11}$ m を使うと、 $\Theta_r = 88$ K となるので、プラズマの高温を考える場合は $T \gg 2\Theta_r$ である。よって、 z_o, z_p は k について連続的とみなして、和を積分に置き換えることで、

$$z_o = \int_0^{\infty} 3(4k+3) \exp\left[-\beta \frac{\hbar^2}{I}(2k^2+3k+1)\right] dk \quad (3.B.50)$$

$$= \frac{3I}{\beta \hbar^2} \int_0^{\infty} e^{-x} dx \quad (3.B.51)$$

$$= \frac{3I}{\beta \hbar^2} \quad (3.B.52)$$

$$z_p = \int_0^{\infty} (4k+1) \exp\left[-\beta \frac{\hbar^2}{I}(2k^2+k)\right] dk \quad (3.B.53)$$

$$= \frac{I}{\beta \hbar^2} \int_0^{\infty} e^{-x} dx \quad (3.B.54)$$

$$= \frac{I}{\beta \hbar^2} \quad (3.B.55)$$

^{†38} 量子力学による考察で、2つの粒子が識別できないということから、この世の粒子はフェルミ粒子とボース粒子に分類できることが分かる。同種の粒子からなる系全体の状態 $|\psi\rangle$ を考えたとき、フェルミ粒子は系を構成する2粒子を交換するという操作について反対称 (操作後の状態が $-|\psi\rangle$) でなければならない、ボース粒子は同じ操作について対称 (操作後の状態が変わらず $|\psi\rangle$) でなければならない (付録 5.B.9 参照)。電子や陽子、中性子などはフェルミ粒子で、光子などはボース粒子である。

となる。つまり、1 分子の回転運動の内部エネルギーへの寄与は

$$\langle e^r \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln z_r = k_B T \quad (3.B.56)$$

である。これは、回転の自由度を 2 として、エネルギー等分配則に従う結果である。

低温の H_2 分子雲などを考える場合は、最後の近似をせずに内部エネルギーへの寄与を求めることで、 T について非線形な (比例しない) 効果も考慮するようだ (e.g. Boley et al., 2007)。

ii) 分子振動

分子振動は、いちばん簡単な近似としては調和振動子 (ばねにつながれた重りの運動) に近似することができる。量子力学によると、角振動数 ω の調和振動のエネルギー e^v は

$$e^v = \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad (3.B.57)$$

$$\text{ただし, } \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (3.B.58)$$

という飛び飛びの値しか持ち得ない (付録 5.B.4 参照)。それぞれのエネルギーの値を持つ状態は 1 つずつ存在する。よって、分配関数は

$$z_v = \sum_{\nu=0}^{\infty} \exp \left[-\beta \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \right] \quad (3.B.59)$$

$$= \frac{\exp(-\beta \hbar \omega / 2)}{1 - \exp(-\beta \hbar \omega)} \quad (3.B.60)$$

となる。ただし、無限等比級数の和の公式を用いた。1 分子の分子振動の内部エネルギーへの寄与は

$$\langle e^v \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln z_v \quad (3.B.61)$$

$$= \frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{\hbar \omega}{\exp \{ \hbar \omega / (k_B T) \} - 1} \quad (3.B.62)$$

となる。

ここで、 $\Theta_v = \hbar \omega / k_B$ として、 $T \gg \Theta_v$ の場合は、上式の第 2 項の分母を $\beta \hbar \omega$ について展開することで、

$$\langle e^v \rangle \simeq \frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{\hbar \omega}{1 + \beta \hbar \omega - 1} \quad (3.B.63)$$

$$= \frac{1}{2} \hbar \omega + k_B T \quad (3.B.64)$$

$$\simeq k_B T \quad (3.B.65)$$

となる。振動の自由度を 1、振動ポテンシャルへの割り当てを 1 として、エネルギー等分配則に従う結果である。 H_2 分子の場合、分子振動の角振動数として、分光測定での実測値

$\omega = 7.84 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ (Dickenson et al., 2013) を使うと、 $\Theta_v = 6.0 \times 10^3 \text{ K}$ となる。よって、太陽の表面 ($\approx 6000 \text{ K}$) などのプラズマを考えるとときには式 (3.B.65) の近似は使えない。

流体力学への応用の場合、内部エネルギーの温度依存性を議論したいので、温度に依らない 3.B.62 の第 1 項は考えない。即ち第 1 項が消えるような点を内部エネルギーの原点にとって、

$$\langle e^v \rangle (T) = \frac{\hbar\omega}{\exp\{\hbar\omega/(k_B T)\} - 1} \quad (3.B.66)$$

と考える。

3.B.5 サハの式

節 3.4.2 で述べたサハの式を導出する。サハの式は気体の電離度を求めるときに使われる式である。原子核に電子が束縛されている状況を考える。原子核から電子を無限遠に引き離れたときの電子のポテンシャルを原点にとると、束縛されている、すなわち力学的エネルギー E (= 運動エネルギー + ポテンシャル) が負の電子は飛び飛びのエネルギーの値 E_k ($k = 1, 2, \dots$) しか持ち得ない。 E_k の値をとる状態の数を g_k と書くことにする。逆 2 乗則で与えられるクーロン力によって水素原子内に束縛された電子を考えた場合、

$$E_k = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 k^2} \quad (3.B.67)$$

$$g_k = 2k^2 \quad (3.B.68)$$

である (付録 5.B.6 参照)。ただし、 m_e は電子質量、 e は素電荷、 ϵ_0 は真空の誘電率で、 g_k には電子のスピンがとりうる 2 状態も考慮されている。H 原子に束縛された電子が E_k の最小値 E_1 のエネルギーを持っている状態を基底状態と言う。一方、基底状態以外の状態を励起状態と言う。励起状態を考えずに、基底状態のみを考えると、H 原子が基底状態にある確率は

$$w_a = g_1 \exp(-\beta E_1) \quad (3.B.69)$$

に比例し、電離して H^+ と自由電子 ($E > 0$) になっている確率は

$$w_i = g_e \sum_{E>0} \exp(-\beta E) \quad (3.B.70)$$

$$= g_e V \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \quad (3.B.71)$$

に比例する。 $g_e = 2$ は電子のスピンについての自由度である。 \sum は自由電子のとりうる全ての運動の状態についての和という意味で、単原子分子理想気体の場合と同じように 6 次元相空間上で数え上げることで、2 段目のように書ける。ここで、 V は 1 つの自由電子が占める平均的

な体積のことで、電子の数密度の逆数 $V = 1/n_e$ である。基底状態の H 原子の数密度を $n_{\text{HI},g}$ 、 H^+ イオンの数密度を n_{HII} とすると、平衡状態では

$$\frac{n_{\text{HII}}}{n_{\text{HI},g}} = \frac{w_i}{w_a} \quad (3.B.72)$$

なので、

$$\frac{n_{\text{HII}}n_e}{n_{\text{HI},g}} = \frac{g_e}{g_1} \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_{\text{H}}}{k_B T}\right) \quad (3.B.73)$$

となる。ただし、 $\chi_{\text{H}} = |E_1| = 13.6 \text{ eV}$ は水素の第 1 イオン化エネルギーと呼ばれる。ここで、励起状態の H も考慮した H の数密度を n_{HI} とすると、平衡状態では、

$$\frac{n_{\text{HI},g}}{n_{\text{HI}}} = \frac{g_1}{U_{\text{HI}}} \quad (3.B.74)$$

となる。 U_{HI} は H の内部自由度についての分配関数、すなわち今の場合電子配置についての分配関数である。ただし、分配関数を計算するときのボルツマン因子 $\exp(-\beta E)$ の E は、基底状態のエネルギーを原点にとる。この式を式 (3.B.73) に代入することで、

$$\frac{n_{\text{HII}}n_e}{n_{\text{HI}}} = \frac{g_e}{U_{\text{HI}}} \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_{\text{H}}}{k_B T}\right) \quad (3.B.75)$$

となる。 $T \leq 10^4 \text{ K}$ 、すなわち $k_B T \leq 0.06\chi_{\text{H}}$ 程度の温度のプラズマを考える場合は、H の励起状態 E_2 となる確率の基底状態 E_1 に対する比は

$$\frac{2^2 \cdot \exp(-\beta E_2)}{\exp(-\beta E_1)} = 4 \exp\left(-\frac{3\chi_{\text{H}}}{4k_B T}\right) \leq 10^{-5} \quad (3.B.76)$$

となるので、H に関しては基底状態の可能性だけを考慮して $U_{\text{HI}} \simeq g_1$ と近似することがある。

上記の近似を行い、 $n_{\text{HII}} = n_e$ として、電離度

$$x = \frac{\rho_{\text{HII}}}{\rho_{\text{HI}} + \rho_{\text{HII}}} = \frac{n_{\text{HII}}}{n_{\text{HI}} + n_{\text{HII}}} \quad (3.B.77)$$

を図 3.10 にプロットした。ただし、 $n_0 = n_{\text{HI}} + n_{\text{HII}}$ である。

もっと一般に、原子 X が電離して X^+ になる場合の電離度を考える場合は、サハの式は

$$\frac{n_{\text{XII}}n_e}{n_{\text{XI}}} = \frac{U_{\text{XII}}g_e}{U_{\text{XI}}} \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_{\text{X}}}{k_B T}\right) \quad (3.B.78)$$

となる。 $U_{\text{XI}}, U_{\text{XII}}$ はそれぞれ粒子 X、 X^+ の内部自由度 (電子配置) についての分配関数である。ただし、分配関数を求めるときの因子 $\exp(-\beta E_k)$ の E_k は、基底状態のエネルギーを原点にとる。 χ_{X} は考えている電離反応に関するイオン化エネルギー、つまり基底状態の電子のうち 1 個を無限遠まで引き離すのに必要なエネルギーの最小値である。ただし、H 原子の場合に考えたように、 $k_B T \ll \chi_{\text{X}}$ の温度のプラズマを考える場合は分配関数を基底状態の数で近似す

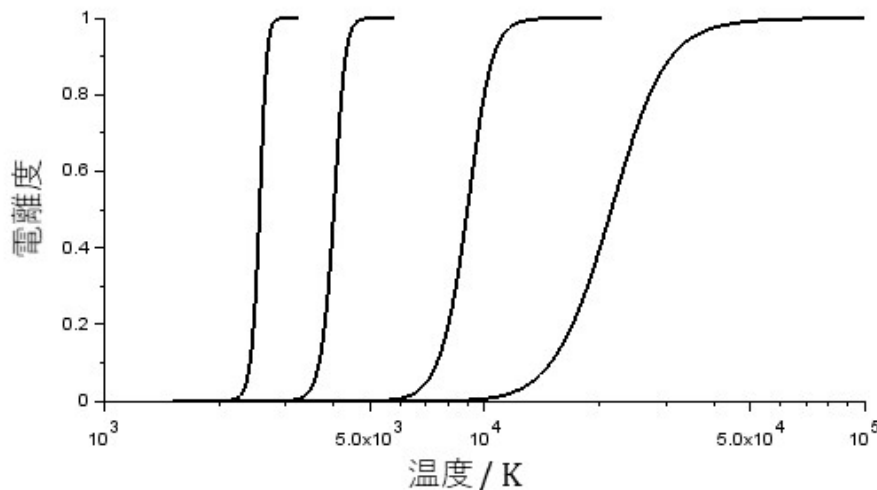


図 3.10 H 原子の電離度：左の曲線からそれぞれ $n_0 = 1, 10^{10}, 10^{20}, 10^{25} /\text{m}^3$ の場合。

ることが多い。また、分配関数を近似的に計算することもある^{†39}。例えば Irwin (1981) は、原子や分子の内部自由度による分配関数を

$$\ln U = \sum_{i=0}^5 a_i (\ln T)^i \quad (3.B.79)$$

と展開したときの係数 a_i を計算している。

3.B.6 大分配関数

系の体積 V と粒子数 N は一定で、エネルギー E を環境と自由にやり取りし、平衡状態で等温に保たれている場合には、系の微視的状态はカノニカル分布に従うと説明した。本節では、 E に加え、 N も環境と自由にやり取りできる場合を考える。節 3.B.2 でカノニカル分布を導いたときの考え方を発展させて、注目する系を系 I、環境を熱浴かつ粒子浴である系 II として、系 I, II を合わせると一定のエネルギー E_0 、一定の粒子数 N_0 を持つ孤立系になっているとして統計力学の原理を適用する。系 I が $E \sim \delta E, N \sim \delta N$ のエネルギーと粒子数を持つ 1 つの微視的状态にある確率 $f(E, N)\delta E\delta N$ は、その状態が実現されているときに系 II がとりうる状態数に比例するので、

$$f(E, N)\delta E\delta N \propto g_{\text{II}}(E_0 - E, N_0 - N)\delta E\delta N \quad (3.B.80)$$

^{†39} 高温 ($T > 10^4$ K) 高密度 ($n > 10^{17} \text{ cm}^{-3}$) のプラズマを考える場合は、束縛電子の分配関数を求める際に、主量子数 n の打ち切り数によって電離度の結果が大きく変わるため、 n をどこまで考慮するか考察が必要となる (e.g. 西川亘, 2012)。この問題は節 3.4.4 で説明している圧力電離とも関係する話題である。

である。 $E_0 \gg E, N_0 \gg N$ なので、 E, N について展開すると、

$$f(E, N) \delta E \delta N \propto \frac{g_{\text{II}}(E_0 - E, N_0 - N)}{g_{\text{II}}(E_0, N_0)} \quad (3.B.81)$$

$$= \exp \left[\frac{1}{k_B} \{ S_{\text{II}}(E_0 - E, N_0 - N) - S_{\text{II}}(E_0, N_0) \} \right] \quad (3.B.82)$$

$$\simeq \exp \left[-\frac{E}{k_B} \frac{\partial S_{\text{II}}(E_0, N_0)}{\partial E} - \frac{N}{k_B} \frac{\partial S_{\text{II}}(E_0, N_0)}{\partial N} \right] \quad (3.B.83)$$

$$= \exp [-\beta(E - \mu N)] \quad (3.B.84)$$

となる。ここで、

$$\mu = -T \frac{\partial S_{\text{II}}(E_0, N_0)}{\partial N} \quad (3.B.85)$$

はその環境の統計力学的化学ポテンシャルである。これは、熱力学における化学ポテンシャルと整合する量である。このような、系の微視的状态の E, N による確率分布をグランドカノニカル分布と言う。確率分布の規格化定数 Ξ を計算すると、

$$\Xi(T, V, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_i \exp [-\beta(E_i - \mu N)] \quad (3.B.86)$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} Z(T, V, N) \exp (\beta \mu N) \quad (3.B.87)$$

となる。 Ξ を大分配関数と言う。絶対活動度 $\lambda = \exp (\beta \mu)$ を用いて、

$$\Xi(T, V, \lambda) = \sum_{N=0}^{\infty} \lambda^N Z(T, V, N) \quad (3.B.88)$$

と書くこともある。ここで、

$$J(T, V, \mu) = -k_B T \ln \Xi(T, V, \mu) \quad (3.B.89)$$

という関数はグランドポテンシャルと呼ばれる。グランドポテンシャルを用いると、熱平衡状態で実現される圧力 p とエントロピー S は、

$$S(T, V, \mu) = - \left(\frac{\partial J}{\partial T} \right)_{V, \mu} \quad (3.B.90)$$

$$p(T, \mu) = - \left(\frac{\partial J}{\partial V} \right)_{T, \mu} \quad (3.B.91)$$

と計算できる。また、粒子数とエネルギーの期待値は、

$$\langle N \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi(\beta, V, \mu) \quad (3.B.92)$$

$$= \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \Xi(\beta, V, \lambda) \quad (3.B.93)$$

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \Xi(\beta, V, \mu) + \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi(\beta, V, \mu) \quad (3.B.94)$$

のようにして計算できる。

3.B.7 ボース-アインシュタイン分布

エネルギー ε_i を持つ 1 つの状態に粒子が n_i 個属する状況を考える。このとき、大分配関数は

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{\sum n_i=N\}} \prod_i \exp[-\beta(\varepsilon_i - \mu)n_i] \quad (3.B.95)$$

$$= \prod_i \left(\sum_{n_i} \exp[-\beta(\varepsilon_i - \mu)n_i] \right) \quad (3.B.96)$$

$$= \prod_i \Xi_i \quad (3.B.97)$$

と計算できる。ここで、 Ξ_i は各微視的状态ごとの大分配関数である。ボース粒子の場合、各状態に $0 \sim \infty$ 個の粒子が属することができるので、

$$\Xi_i = \sum_{n_i=0}^{\infty} \exp[-\beta(\varepsilon_i - \mu)n_i] \quad (3.B.98)$$

$$= \frac{1}{1 - \exp[-\beta(\varepsilon_i - \mu)]} \quad (3.B.99)$$

となる。一方で、フェルミ粒子の場合は、1 つの状態に属することができる粒子数は 0 か 1 なので、

$$\Xi_i = 1 + \exp[-\beta(\varepsilon_i - \mu)] \quad (3.B.100)$$

となる。例えば \pm という複号があった場合は、上の符号 (この場合 $+$) がボース粒子、下の符号 (この場合 $-$) がフェルミ粒子の場合を指すことにすると、系全体の大分配関数、グランドポテンシャル、粒子数の期待値はそれぞれ、

$$\Xi = \prod_i [1 \mp \exp[-\beta(\varepsilon_i - \mu)]]^{\mp 1} \quad (3.B.101)$$

$$J = \pm k_B T \sum_i \ln \{1 \mp \exp[-\beta(\varepsilon_i - \mu)]\} \quad (3.B.102)$$

$$\langle N \rangle = \sum_i \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_i - \mu)] \mp 1} \quad (3.B.103)$$

$$= \sum_i \langle n_i \rangle \quad (3.B.104)$$

と計算できる。

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_i - \mu)] \mp 1} \quad (3.B.105)$$

はエネルギー ε_i を持つ 1 つの状態に属する粒子数の期待値であり、平均占有率と呼ばれる。この平均占有率のエネルギーに対する分布は、ボース粒子の場合はボース-アインシュタイン分布、フェルミ粒子の場合はフェルミ-ディラック分布と呼ばれる。

3.B.8 黒体放射と光子

高温のプラズマガスの中を微視的にみると、様々な過程により電磁波が放射されたり吸収されたりしている。例えば、電子がイオンに衝突^{†40}すると、それに伴って電磁波が放射される (制動放射、自由-自由放射)。また例えば、原子や分子に束縛された電子が励起状態や基底状態に遷移 (束縛-束縛遷移) するのに伴って電磁波が吸収されたり放射されたりする。このように放射された電磁波を巨視的に見ると、電磁波の粗視化された強度を各点において適切に定義することによって巨視的な放射場を定義することができるが、この放射場は光子と呼ばれる、

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad (3.B.106)$$

$$p = E/c \quad (3.B.107)$$

のエネルギーと運動量を持ったボース粒子が集まった理想気体と考えられる。 $h, \hbar = h/(2\pi), c$ はそれぞれプランク定数、ディラック定数、光速で、 ν は電磁波の振動数、 $\omega = 2\pi\nu$ は角振動数である。電磁波の放射は光子の生成、電磁波の吸収は光子の消滅である。

物質が十分に「不透明」であり、物質と光子の間で十分に衝突が起こっている場合、物質と光子気体は局所的に熱平衡状態にあると考えることができる^{†41}。熱平衡状態にある放射場のことを黒体放射と言う。物質と光子が衝突すると運動量を交換するので、物質は放射場から圧力を受けることになる。これを放射圧と言う。

光子は物質に放射吸収されてその数が自由に変化するので、光子数の保存則を考えることはできない。熱平衡における光子数は、考える領域の体積 V と、環境の温度 T が与えられれば決まる^{†42}。このことは、光子気体は粒子数を変えるにもかかわらず、大分配関数 Ξ ではなく分配関数 Z で対応できることを言っている。その代わりに化学ポテンシャル μ をゼロとしてグランドカノニカル分布を考える。平均占有率はボース-アインシュタイン分布で $\varepsilon_i = \hbar\omega_i$, $\mu = 0$ とし、

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega_i) - 1} \quad (3.B.108)$$

となる。この分布を特にプランク分布と言う。光子 1 つの微視的状态は放射場の固有モードと

^{†40} ここで言う「衝突」とは、複数の粒子が接近することで、クーロン相互作用のような粒子間相互作用によってその軌道を変える、すなわち粒子同士で運動量を交換する現象を指す。「散乱」もほぼ同じ意味で用いる。

^{†41} 不透明度の定義や不透明じゃない状況での放射場の考え方は第 5 章で説明する。

^{†42} 光子ではない普通のボース気体ならば、更に環境の化学ポテンシャル μ にも依るはずである。

捉えて状態数を数え上げる。放射場の分散関係は波数ベクトルを $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ として、

$$\omega = c|\mathbf{k}| \tag{3.B.109}$$

である。一辺 L で体積 $V = L^3$ の箱を考え、周期的境界条件^{†43}を課す。定在波の条件は

$$k_x = \frac{2\pi l}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi m}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n}{L}; \quad l, m, n \text{ は整数} \tag{3.B.110}$$

なので、波数空間 $d^3k = dk_x dk_y dk_z$ の単位体積あたりの固有振動の数は、

$$\delta l \delta m \delta n = \frac{L^3}{(2\pi)^3} dk_x dk_y dk_z \tag{3.B.111}$$

である。よって、波数 $k = |\mathbf{k}|$ が $k \sim k + dk$ である状態数は、これを波数空間中の半径 k の球殻で合計することで、

$$\frac{V}{(2\pi)^3} \cdot 4\pi k^2 \cdot dk \cdot 2 = \frac{V k^2}{\pi^2} dk \tag{3.B.112}$$

と計算できる^{†44}。ただし、電磁波の横波の自由度 2 を乗じた。電磁波の振動数 $\nu = ck/(2\pi)$ に換算すると、振動数が $\nu \sim \nu + d\nu$ である状態数 $g(\nu)d\nu$ は、

$$g(\nu)d\nu = \frac{8\pi V \nu^2}{c^3} d\nu \tag{3.B.113}$$

と書ける。振動数が $\nu \sim \nu + d\nu$ である光子数 $n(\nu)d\nu$ は、プランク分布を用いて、

$$n(\nu)d\nu = \frac{g(\nu)d\nu}{\exp(\beta h\nu) - 1} \tag{3.B.114}$$

なので、振動数が $\nu \sim \nu + d\nu$ の光子によるエネルギー密度 $u(\nu)d\nu$ は、

$$u(\nu)d\nu = \frac{h\nu n(\nu)d\nu}{V} \tag{3.B.115}$$

$$= \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(\beta h\nu) - 1} \tag{3.B.116}$$

^{†43} $\mathbf{A}(x+L, y, z) = \mathbf{A}(x, y+L, z) = \mathbf{A}(x, y, z+L) = \mathbf{A}(x, y, z)$ という条件のことを言う。

^{†44} このように、体積 L^3 の大きな箱を考えて周期的境界条件を課し、各固有モードを 1 つの微視的状态とする数え方は量子力学において基本的な考え方である。光子がこの考え方を用いて量子化された自由電磁波であることは付録 5.B.10 で説明する。また、量子力学では物質粒子も場の量 (波動関数) として表されるが、付録 5.B.12 では、自由粒子の微視的状态を数え上げる際に同様の手法を用いる。光子の運動量は $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ なので、式 (3.B.111) より、

$$\delta l \delta m \delta n = \frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3} dp_x dp_y dp_z$$

となる。上式は光子の運動量空間の体積要素 d^3p 中の状態数を表す。実空間中の箱 L^3 を考えていることを考慮すると、相空間の体積要素 $d^3x d^3p$ 内に $d^3x d^3p / (2\pi\hbar)^3$ 個の割合で状態があることになる。これは言い換えると、相空間中の体積 $(2\pi\hbar)^3$ 内に 1 個の状態があるということである。光子以外の粒子でもこの数え方をする限り同様のことが言える。節 3.B.3 で説明した状態の数え上げ方も同じ考えに基づくものである。

となる。 $u(\nu)$ は普通は u_ν と書かれ、(黒体放射の) 放射エネルギー密度 (radiation energy density) と呼ばれる。

放射を考えるとときには、ある方向に放射によって輸送されるエネルギーを単位時間、単位立体角、単位面積、単位振動数あたりに換算した放射強度 (specific intensity) を考える。黒体放射は全方向 (全立体角 4π) に等方的で、光子の速さは c なので、黒体放射の放射強度は

$$B_\nu(T) = \frac{u_\nu c}{4\pi} \quad (3.B.117)$$

$$= \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (3.B.118)$$

となる。これはプランクの法則と呼ばれ、 $B_\nu(T)$ の形はプランク関数と呼ばれる。

宇宙空間で観測された太陽からの放射のスペクトルは、約 6000 K の黒体放射に近似できることが知られている (図 3.11)。ただし、図 3.11 の縦軸は、太陽の方角から来る光を観測したときに、単位時間、単位面積、単位波長あたりに受け取るエネルギーを表す。破線は $B_\lambda \Omega$ をプロットしたものである。ここで B_λ とは、単位波長 ($\lambda = c/\nu$) あたりの放射強度であり、 B_ν との間に

$$B_\lambda d\lambda = B_\nu d\nu \quad (3.B.119)$$

$$\text{ただし, } d\nu = \frac{c}{\lambda^2} d\lambda \quad (3.B.120)$$

という関係を持つ。 Ω は地球から太陽を見込む立体角であり、

$$\Omega \simeq \pi \left(\frac{\text{太陽半径}}{\text{太陽と地球の間の距離}} \right)^2 \quad (3.B.121)$$

と近似的に計算できる。

B_ν を全振動数で積分した全放射強度は、

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu d\nu \quad (3.B.122)$$

$$= \frac{2\pi^4 k_B^4}{15c^2 h^3} T^4 \quad (3.B.123)$$

$$= \frac{\sigma}{\pi} T^4 \quad (3.B.124)$$

となる^{†45}。これはシュテファン-ボルツマンの法則と呼ばれる。ここで、

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \quad (3.B.125)$$

^{†45} 計算の途中で

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

という積分公式を用いる。

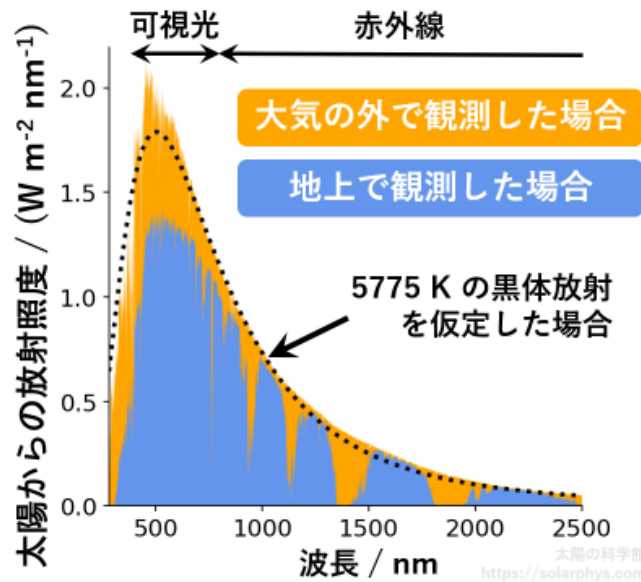


図 3.11 地上または観測衛星によって得られる太陽からの放射スペクトルと 5775 K の黒体放射：U.S. Department of Energy (DOE)/NREL/ALLIANCE が提供する標準モデル ASTM G-173 の “extraterrestrial” と “direct normal” を表示している。

はシュテファン-ボルツマン定数と呼ばれる。 u_ν を全振動数で積分した全エネルギー密度 u を考える場合は、

$$u(T) = \frac{4\sigma}{c} T^4 \tag{3.B.126}$$

となる。

放射が等方的な場合、放射圧は全エネルギー密度を 3 で割ったものになる (節 5.1.1 参照)。つまり、黒体放射による放射圧 p は、

$$p(T) = \frac{4\sigma}{3c} T^4 \tag{3.B.127}$$

である。温度の 4 乗に比例するので、温度の高い状況だと放射圧を考慮しなければならない。

4

MHD 流体の性質

MHD 流体の性質の中で、よく目にすると思われるものをピックアップする。本章の骨格は Priest (2014), Galtier (2016) を参考にした。MHD 流体の教科書については本書のまえがきで紹介しているが、日本語の教科書としては 柴田一成 et al. (2023) を強く薦める。他に MHD 流体についてのレビューには、例えば Ogilvie (2016) がある。

本章はまだ未完成の節が多い。

4.1 無次元数

流体力学の系は少数のパラメータによって特徴づけられる。保存則の各項の寄与の大きさを概算するには、方程式の無次元化を行うのが便利である。この操作によって、方程式系の相似性が明らかになる。

方程式の無次元化 (磁気レイノルズ数を例に)

第 2 章や第 3 章で説明した方程式を用いて数値計算を行う場合や、方程式に現れる各項の大きさを比べる場合には、方程式の無次元化をする。例えば、誘導方程式 (2.5.14) を無次元化する際は次のように考える。対象とする系の典型的な長さ L_0 、流速 V_0 、磁場強度 B_0 を決める。これらの値を用いて各変数を次のように無次元化する。

$$\mathbf{x} = L_0 \mathbf{x}' \quad (4.1.1)$$

$$\mathbf{v} = V_0 \mathbf{v}' \quad (4.1.2)$$

$$t = \frac{L_0}{V_0} t' \quad (4.1.3)$$

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{B}' \quad (4.1.4)$$

例えば \mathbf{x}' は L_0 を単位にして表した無次元の座標値ということである。上式を式 (2.5.14) に代入することで、無次元の誘導方程式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} = \nabla' \times (\mathbf{v}' \times \mathbf{B}') + \frac{1}{R_m} \nabla'^2 \mathbf{B}' \quad (4.1.5)$$

$$\text{ただし, } R_m = \frac{L_0 V_0}{\eta} \quad (4.1.6)$$

無次元である R_m は磁気レイノルズ数と呼ばれる。上式を見ると、 $R_m \gg 1$ であるような系では磁気拡散項が無視できることが分かる。つまり、 R_m は対象とする系で磁気拡散の効果がどのくらい小さいかの指標になる。磁気レイノルズ数のような無次元数を用いることで、方程式の各項の寄与の大きさを比べることができる。太陽のような L_0 の大きい系を考える場合も、実験室の L_0 が小さい系を考える場合も、 R_m が同じならば同じ誘導方程式に従うのである。このように、流体力学では空間やその他の物理量のスケール (L_0, V_0, B_0) や輸送係数 (η) 自身の絶対値ではなく、それらの量の間比 (R_m) が系を特徴づける。

磁気レイノルズ数については節 4.2 も参照されたい。以下、よく用いられる無次元数を紹介する。

運動方程式に関する無次元数

レイノルズ数

$$Re = \frac{\text{移流項}}{\text{粘性項}} = \frac{L_0 V_0}{\nu} \quad (4.1.7)$$

ν は動粘性率である。流れの一種の「激しさ」の指標と解釈できる。流れがゆっくりなときは、系は整然とした流れの状態 (層流, laminar flow) になるが、流れが激しい場合はしばしば様々なスケールの流れが乱雑に起きている状態 (乱流, turbulence) となる。いつ乱流が起きるのかは問題設定に依るが、典型的には $Re \gtrsim 10^4$ の場合には乱流状態にある可能性が高い。地球の外核の対流は 10^8 程度のオーダーである (e.g. Aurnou et al., 2015)。太陽対流層の場合は、例えば 10^{11} のように計算できる^{†1}。いずれの場合も乱流状態にあると考えられる。

プラズマベータ

$$\beta = \frac{\text{ガス圧}}{\text{磁気圧}} = \frac{\text{内部エネルギー}}{\text{磁気エネルギー}} = \frac{2c_s^2}{\gamma c_A^2} = \frac{2\mu_0 p_0}{B_0^2} \quad (4.1.8)$$

p_0 は気体の圧力の典型的な値で、 γ は比熱比、 $c_s = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ は音速、 $c_A = B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_0}$ はアルベーン波速度である。波については節 4.4 を参照して欲しい。プラズマベータは、気体と磁場のどちらが系のダイナミクスを支配しているかの指標である。詳しくは節 4.2 を参照して欲しい。

マッハ数

$$M = \frac{V_0}{c_s} = \sqrt{\frac{1}{\gamma} \frac{\text{移流項}}{\text{圧力項}}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma(\gamma-1)} \frac{\text{運動エネルギー}}{\text{内部エネルギー}}} \quad (4.1.9)$$

流れの速さの指標である。

^{†1} 例えば粘性係数 μ にブラギンスキーの値 (6.4.73) を使い、対流層の値として表 6.2 のものを用いて動粘性係数 $\nu = \mu / \rho$ を計算した。対流のスケールには $L_0 = 10^7$ m, $V_0 = 100$ m s⁻¹ を用いて計算した。

アルベーンマッハ数

$$M_A = \frac{V_0}{c_A} = \sqrt{\frac{\text{移流項}}{\text{ローレンツ項}}} = \sqrt{\frac{\text{運動エネルギー}}{\text{磁気エネルギー}}} \quad (4.1.10)$$

流れの速さの指標である。

ロスビー数

$$Ro = \frac{\text{移流項}}{\text{コリオリ項}} = \frac{V_0}{2L_0\Omega} \quad (4.1.11)$$

Ω は座標系の回転の角速度である。コリオリの力が系にどれだけ影響するかの指標である。小さいほど影響が大きい。太陽対流層内部の熱対流では 1 に近いオーダーであると考えられている (e.g. Hanasoge et al., 2015)。対して、地球の外核の対流では 10^{-7} から 10^{-5} 程度である (e.g. Aurnou et al., 2015)。この意味で、地球外核は高速回転系とされる。

エクマン数

$$E = \frac{\text{粘性項}}{\text{コリオリ項}} = \frac{Ro}{Re} = \frac{\nu}{L_0^2\Omega} \quad (4.1.12)$$

回転系における粘性の大きさの指標である。

エルサッサー数

$$\Lambda = \frac{\text{ローレンツ項}}{\text{コリオリ項}} \cdot R_m = \frac{B_0^2}{\rho_0\mu_0\eta\Omega} \quad (4.1.13)$$

ρ_0 は質量密度のスケールである。回転系における磁場の強さの指標である。

レイリー数

$$Ra = \frac{\alpha g \Delta T L_0^3}{\tilde{\kappa} \nu} \quad (4.1.14)$$

α は熱膨張率、 g は重力加速度、 ΔT は温度差のスケールである。 $\tilde{\kappa}$ は熱拡散率 (thermal diffusivity) であり、節 3.3.3 で導入した熱伝導率 κ との間には $\tilde{\kappa} = \kappa / \rho c_p$ (ρ は質量密度、 c_p は定圧比熱) という関係がある。レイリー数は熱対流の考察で用いられる。問題設定にもよるが、レイリー数がおおよそ 10^3 よりも大きな値になると熱対流が起きる。詳しくは節 4.6 を参照して欲しい。

修正レイリー数

$$Ra^* = RaE = \frac{\alpha g \Delta T L_0}{\tilde{\kappa} \Omega} \quad (4.1.15)$$

回転系における熱対流を調べる際に用いられることがある。

エネルギー保存則に関係する無次元数

ペクレ数

$$Pe = \frac{\text{内部エネルギーの移流}}{\text{熱伝導}} = \frac{L_0 V_0}{\tilde{\kappa}} \quad (4.1.16)$$

プラントル数

$$Pr = \frac{\text{粘性散逸}}{\text{熱伝導}} = \frac{Pe}{Re} = \frac{\nu}{\tilde{\kappa}} \quad (4.1.17)$$

磁気プラントル数

$$P_m = \frac{\text{粘性散逸}}{\text{オーム散逸}} = \frac{R_m}{Re} = \frac{\nu}{\eta} \quad (4.1.18)$$

ヌッセルト数

$$Nu = \frac{\text{熱対流によるエネルギーフラックス} + \text{熱伝導によるエネルギーフラックス}}{\text{熱伝導によるエネルギーフラックス}} \quad (4.1.19)$$

$$= 1 + \frac{F_c L_0}{\kappa \Delta T} \quad (4.1.20)$$

F_c は熱対流によるエネルギーフラックス (エンタルピーフラックス) の見積もりである。熱対流の大きさの尺度として用いられる。

4.2 磁場

MHD 流体において、磁場が従う基本的な法則や、磁場が流体に与える作用の考え方について説明する。

4.2.1 磁気拡散

まず、磁気レイノルズ数が小さい場合 ($R_m \ll 1$) の極限を考える。つまり、流体が殆ど動かない場合を考えるということである。このとき、誘導方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (4.2.1)$$

これは磁場の空間変化が無くなるような方向に磁場が拡散する効果を表す (節 1.5.1 参照)。磁気拡散と呼ばれる。拡散時間は $\tau_d = L_0^2/\eta$ と見積もられる。

例えば地球の外核は液体金属から成る。 L_0 を地球の外核半径 3500 km とし、 $\eta \sim 1 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ (Stacey, 2007a) とすると、 $\tau_d \sim 10^{13} \text{ s} \sim 10$ 万年と見積もられる。或いはマントルはもっと磁気拡散率が大きいので、拡散時間はもっと短い値になる。35 億年前の岩石からも地磁気の名残が見つかっており、いちばん古いものでは 42 億年前の岩石からも検出されている (Tarduno et al., 2015)。上述したように、地磁気は「放っておくと」10 万年のスケールで地球から抜けていってしまうため、10 億年のスケールで維持されるためのメカニズムが存在するはずである。現在では外核の対流を起源とする説が有力である (e.g. Roberts & King, 2013; Wicht & Sanchez, 2019)。これは地球ダイナモ理論 (geodynamo theory) と呼ばれる。

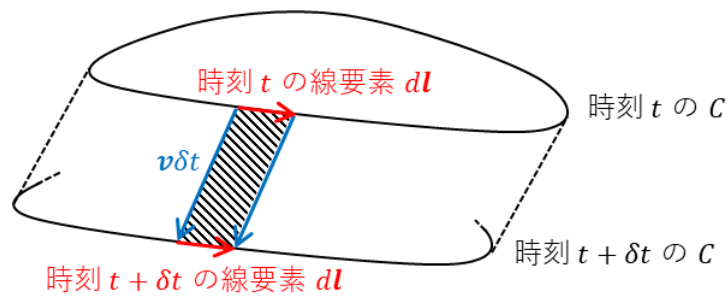


図 4.1 流体に固定された閉曲線の時間発展

4.2.2 磁力線凍結定理

前節とは逆に、 $R_m \gg 1$ の極限を考える。つまり、誘導方程式の磁気拡散項を無視する。この場合の MHD 方程式系は理想 MHD (ideal MHD) と呼ばれる。例えば太陽黒点の上空を $L_0 \sim 10^7$ m の空間スケールで考える場合は、典型的には $R_m \sim 10^7$ のオーダーになるため、この近似が良く成り立つ。誘導方程式は次のように書ける^{†2}。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{4.2.2}$$

流体に固定されて流体と共に動く閉曲線 \hat{C} と \hat{C} によって張られる曲面 \hat{S} を考える。このとき、次の定理が成り立つ (e.g. Davidson, 2001, §2.7.2)。

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\hat{S}} \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \cdot d\mathbf{S} \tag{4.2.3}$$

この式が成り立つことを説明する。上式の左辺は曲面 \hat{S} を貫く磁束、つまり \hat{S} を貫く磁力線の本数と解釈できる。曲線 \hat{C} が時間 δt の間に図 4.1 のように動いたとする。このときの \hat{S} を貫く磁束の変化量 $\delta\Phi$ は、磁場自身が時間変化することによる変化と \hat{S} が動くことによる効果に分けることができる。

$$\delta\Phi = \delta t \int_{\hat{S}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \delta\Phi_{\text{側面}} \tag{4.2.4}$$

磁力線が分岐・合流しないこと ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) を考慮すると、 $\delta\Phi_{\text{側面}}$ は図の時刻 t での \hat{S} と時刻 $t + \delta t$ での \hat{S} に挟まれた筒状の領域の側面 (\hat{S} 以外の面) を外向きに貫く磁束に相当する。図の斜線で表した面の面積を持ち、面に垂直外向きであるような面要素は $\delta\mathbf{S} = (\mathbf{v}\delta t) \times d\mathbf{l}$ と書ける

^{†2} 節 3.2.6 で説明した渦度方程式は、ローレンツ力と粘性が無視できるほど小さい場合、この誘導方程式と同じ形になる。また、渦度 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ は磁場と同じ非発散の場である。つまり、本節で説明する磁力線についての定理は、そのような場合の渦線 (渦度ベクトルを流線のように繋げた曲線) に対しても成り立つ。

ことを考慮すると、

$$\delta\Phi_{\text{側面}} = \int_{\text{側面}} \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{S} \quad (4.2.5)$$

$$= \delta t \int_{\hat{C}} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) \quad (4.2.6)$$

$$= -\delta t \int_{\hat{C}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (4.2.7)$$

$$= -\delta t \int_{\hat{S}} \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} \quad (4.2.8)$$

と計算できる。故に、式 (4.2.3) が成り立つことが分かる。

式 (4.2.3) と (4.2.2) より、流体に固定された曲面を貫く磁束は時間的に一定に保たれることが分かる。このことが任意の曲面について言えることから、磁力線が流体に固定されていて流体と共に動くと考えることができる。これを磁力線凍結定理またはアルベーンの定理と言う。

磁力線が流体に固定されていることは次の式変形からも確認できる (e.g. Priest, 2014, §2.6.2.2)。ベクトル解析の公式と質量保存則 (3.1.1) を用いると、式 (4.2.2) は次のように変形できる。

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} \quad (4.2.9)$$

ここで、流体に固定された線要素 $\delta\mathbf{l}$ を考える。この線要素の一端はその座標 \mathbf{x}_0 での流体の速度 $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$ で動き、もう一端は速度 $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{l})$ で動く。後者をテイラー展開すると、

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{l}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + (\delta\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + \mathcal{O}(|\delta\mathbf{l}|^2) \quad (4.2.10)$$

と書ける。よって、この線要素 $\delta\mathbf{l}$ の流体に沿った時間発展は

$$\frac{D\delta\mathbf{l}}{Dt} = (\delta\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (4.2.11)$$

と書ける。この式は式 (4.2.9) と同形である。故に、初めに \mathbf{B}/ρ と $\delta\mathbf{l}$ が平行ならば、その後も平行であり続ける。

このように、理想 MHD 流体は磁力線凍結という性質を持つため、磁力線という机上の概念が流体粒子の位置や速度という物理的な概念と結びつき、実体を帯びる。つまり、「磁力線の速度」を考えることに意味がある。

R_m がそれ程大きくない場合には、磁場は流体に対して拡散的に動く。例えば地球の外核では $R_m \leq 100$ と考えられ、磁気拡散の効果は無視できない。また、太陽のようなプラズマでも、例えば磁気リコネクション (節 4.11 参照) のような現象では、小さなスケールでの磁気拡散が本質的な役割を担う。

4.2.3 磁気圧と磁気張力

節 3.2.2 でマクスウェルの応力を考えたときと同じ式変形をすると、ローレンツ力は次のように変形できる。

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \quad (4.2.12)$$

更に、磁力線に沿った位置変数 s を導入し、 $\hat{\mathbf{s}}$ を磁場方向の単位ベクトルとすると、上式の第 1 項は次のように書ける (e.g. Priest, 2014, §2.7)。

$$\frac{B}{\mu_0} \frac{d}{ds} (B\hat{\mathbf{s}}) = \frac{B}{\mu_0} \frac{dB}{ds} \hat{\mathbf{s}} + \frac{B^2}{\mu_0} \frac{d\hat{\mathbf{s}}}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \hat{\mathbf{s}} + \frac{B^2}{\mu_0} \frac{\hat{\mathbf{n}}}{R_c} \quad (4.2.13)$$

$\hat{\mathbf{n}}$ は磁場に垂直な方向 (磁力線が曲がっている方向) の単位ベクトルで、 R_c は磁力線の曲率半径である。上式の第 1 項と式 (4.2.12) の第 2 項の磁場に平行な成分は打ち消し合うので、ローレンツ力は結局次のように書ける。

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{B^2}{\mu_0} \frac{\hat{\mathbf{n}}}{R_c} - \nabla_{\perp} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \quad (4.2.14)$$

∇_{\perp} は勾配の磁場に垂直な成分という意味である。磁力線凍結定理と併せて考えると、上式の各項について次のような解釈ができる。第 1 項は磁気張力と呼ばれる。磁力線が曲がっていた場合、流体にはその湾曲を戻そうとする向きに力が働く。第 2 項の括弧の中身 $B^2/(2\mu_0)$ は磁気圧と呼ばれる。磁力線は互いになるべく離れようとする性質を持つ。磁場が存在すると、流体は通常の圧力 (ガス圧) に加えて磁気圧を持つ。磁気圧に磁場と垂直な方向の勾配があると、流体は正味の力を受ける。

4.2.4 磁束管

太陽の対流層^{†3}は熱対流で流体がかき混ぜられているため、凍結定理によって流れの強い領域から磁場が掃き出されることで、磁場の強い領域と弱い領域があることが期待される。つまり、磁力線は束になって存在しているということである。実際に太陽表面で見られる磁場は、黒点に代表されるように、まとまって存在していることが確認される。或いはもっと細かいスケールで表面を見ると、粒状斑^{†4}の縁にまとまった磁場が観測される。そのような状態の磁場を考えるには磁束管 (flux tube) という概念が有用である。この節は (Priest, 2014, §2.9, §3.2) を参考にした。主に太陽物理学における文脈で磁束管の物理についてまとめられた本には Ryutova (2015) がある。

^{†3} 太陽対流層とは太陽半径を $R_{\odot} = 70$ 万 km として大体 $0.7R_{\odot} < r < R_{\odot}$ の領域のことである。

^{†4} 太陽表面で観測される対流のセル (細胞状の構造) のこと。

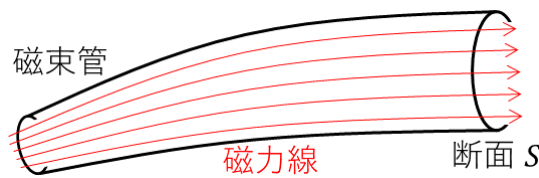


図 4.2 磁束管

磁束管の基本的性質

図 4.2 のように、空間にある閉曲線を考えて、その曲線を通る磁力線によってできる曲面を考える。この局面が包む領域のことを磁束管と言う。理想 MHD の場合は磁束管も流体に凍結している。特に、対象とする系の磁場の殆どが磁束管の内部に存在し、外部には磁場が無いと考えられる場合は孤立した磁束管と呼ばれる。太陽のような磁気レイノルズ数の大きいプラズマを考える場合、系の磁場が孤立した磁束管であるとみなして議論を進めることはしばしば有用である。

磁束管の断面 S を貫く磁束

$$F_M = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.2.15)$$

はどのような断面を考えても一定である。よって F_M は磁束管を特徴づける量であり、強度と呼ばれる。磁束管の基本的な性質をまとめる^{†5}。

1. 磁束管が細くなると (断面積 S が小さくなると) 磁束管内の平均磁場強度 $\bar{B} = F_M/S$ は大きくなり、太くなると小さくなる。
2. 簡単のために質量密度と磁場強度が一様の円筒状の磁束管を考える。理想 MHD を考え、磁束管内の流体の質量が一定に保たれるような領域の長さを磁束管の長さと呼ぶことにする。磁束管の半径が a から λa に、長さが l から $\lambda^* l$ に変化する状況を考える。それに伴って磁場強度が B_0 から B に、磁束管内の質量密度が ρ_0 から ρ に変化したとする。このとき、質量保存則 $\rho_0 \pi a^2 l = \rho \pi (\lambda a)^2 (\lambda^* l)$ より

$$\rho = \frac{\rho_0}{\lambda^2 \lambda^*} \quad (4.2.16)$$

が言え、磁束の保存則 $B_0 \pi a^2 = B \pi (\lambda a)^2$ より

$$B = \frac{B_0}{\lambda^2} \quad (4.2.17)$$

が言える。つまり、磁束管の長さが変化しない ($\lambda^* = 1$) とすると、 B/ρ は一定値に保たれることが分かる。このことは式 (4.2.9) の議論からも分かる。

^{†5} 渦度 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ も $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ を恒的に満たすため、渦線によって形成される渦管を考えることがある。

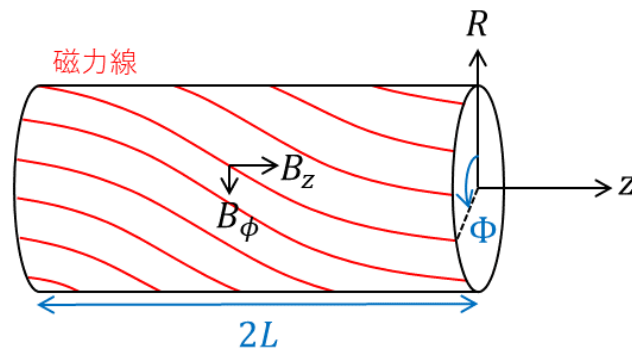


図 4.3 捻じれた磁束管の模式図

3. 質量密度が変化しない ($\lambda^2 \lambda^* = 1$) 場合は、 $B = \lambda^* B$ であることが分かる。つまり、流体が圧縮・膨脹せずに時間発展する場合は、磁束管が伸びると (細くなることで) 磁場強度が大きくなり、縮むと小さくなる。

磁束管の捻じれ

円筒状の磁束管を考え、この円筒に沿って円筒座標 (R, ϕ, z) を考える (図 4.3)。磁場の成分は円筒の軸方向の成分 B_z と方位角の向きの成分 B_ϕ のみ持ち、両者は円筒の半径 R のみに依存するとする。このとき、磁力線の方程式は $Rd\phi/dz = B_\phi/B_z$ と書けるので、磁束管の長さ $2L$ あたりに磁力線が捻じれる角度 Φ は次のように書ける。

$$\Phi(R) = \int_{\text{長さ } 2L \text{ の磁束管}} d\phi = \int_0^{2L} \frac{B_\phi(R)}{RB_z(R)} dz = \frac{2LB_\phi(R)}{RB_z(R)} \quad (4.2.18)$$

磁束管の磁場が、ローレンツ力をゼロにするような形状をしている場合を考える。

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = 0 \quad (4.2.19)$$

この場合の磁場形状はフォースフリー磁場と呼ばれ、節 4.3.2 で説明するように、流体の速度が十分に小さく、プラズマベータが小さいような系では運動方程式で支配的な項はローレンツ項になるため、ゼロ次近似的に成り立つことが期待される。上式を円筒座標で書き下すと、次のようになる (付録 1.B 参照)。

$$\frac{d}{dR} \left(\frac{B_\phi^2 + B_z^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B_\phi^2}{\mu_0 R} = 0 \quad (4.2.20)$$

上式の第 1 項は磁気圧で第 2 項は磁気張力を表す。磁場強度が R の関数として

$$B^2 = f(R) \quad (4.2.21)$$

と与えられたとすると、上式の解は次のように書ける。

$$B_\phi^2 = -\frac{R}{2} \frac{df}{dR}, \quad B_z^2 = B^2 - B_\phi^2 \quad (4.2.22)$$

ただし、 B_ϕ^2, B_z^2 がゼロ以上の値を取るという条件から、 df/dR がゼロ以下でかつ $f(R)$ は $R \rightarrow \infty$ で R^{-2} かそれより遅くゼロに近づく必要がある。特に $f \propto R^{-2}$ の場合は $B_z = 0$ であり、方位角方向の磁力線から成る磁束管を表す。或いは磁束管の捻じれ Φ が R に依らず一様であった場合は、与えられた Φ と $R = 0$ での磁場強度 B_0 に対して式 (4.2.20) の解は次のように書ける。

$$B_\phi = \frac{B_0 \Phi R / (2L)}{1 + \Phi^2 R^2 / (2L)^2}, \quad B_z = \frac{B_0}{1 + \Phi^2 R^2 / (2L)^2} \quad (4.2.23)$$

半径 a のフォースフリーで捻じれ Φ が一様な磁束管が、表面 $R = a$ での磁場強度を一定 $B(a) = B^{(0)}$ に保ちながら更に捻じれていく (Φ が大きくなっていく) 状況を考える。 $R = 0$ での磁場 B_0 と $B^{(0)}$ の関係は式 (4.2.23) より

$$B_0 = B^{(0)} \sqrt{1 + \frac{\Phi^2 a^2}{(2L)^2}} \quad (4.2.24)$$

と書ける。 $B^{(0)}$ は、仮に $\Phi = 0$ のときの一様な磁場強度とも解釈できる。上式を見ると、 Φ が大きくなるにつれて B_0 も大きくなるのが分かる。これは磁束管が捻じれると中心軸の方を向いた磁気張力が大きくなるため、磁束管の中心でそれと釣り合う磁気圧も大きくならなければならないためと解釈できる。このとき、磁束管の半径 a は、次の磁束保存則を満たすように変化する。

$$2\pi \int_0^a R B_z dR = \pi (a^{(0)})^2 B^{(0)} \quad (4.2.25)$$

$a^{(0)}$ は、仮に $\Phi = 0$ のときの磁束管の半径である。式 (4.2.23) を代入して計算すると、次のように書ける。

$$\sqrt{1 + \frac{\Phi^2 a^2}{(2L)^2}} \ln \left(1 + \frac{\Phi^2 a^2}{(2L)^2} \right) = \frac{\Phi^2 (a^{(0)})^2}{(2L)^2} \quad (4.2.26)$$

上式を解いて a を Φ の関数として表すと図 4.4 のようになる。つまり、磁束管が捻じれる程その半径は大きくなる。

4.2.5 ポテンシャル磁場

例えば地上 (対流圏) では電流は無いとみなせる^{†6}ので、アンペールの法則 (2.5.9) より、 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ が言える。よって、ヘルムホルツの定理 (節 1.4.7 参照) より、地上で観測される地磁気は

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\nabla \Psi(\mathbf{x}) \quad (4.2.27)$$

と導入されるスカラーポテンシャル Ψ を用いて記述される。このような場合の磁場構造はポテンシャル磁場と呼ばれる。太陽コロナの静的で大域的な磁場構造も大雑把にはポテンシャル磁

^{†6} 例えば送電線のような人工物による影響や雷のような瞬間的な現象は無視する。

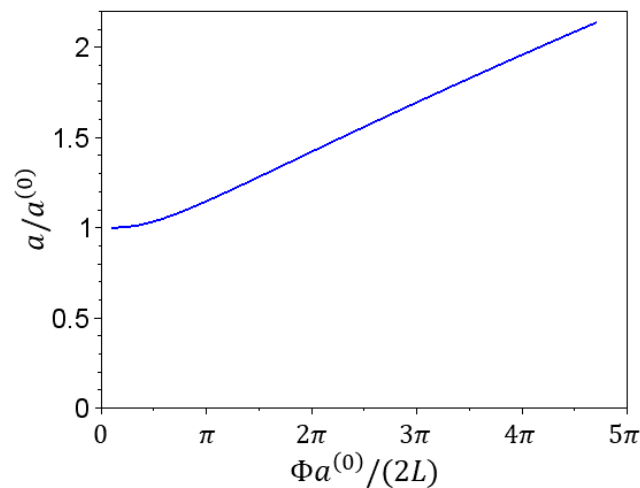


図 4.4 磁束管の半径 a と一様な捻じれ Φ の関係

場で表せると考えられているが、活動領域と呼ばれる磁力線が複雑に絡まった領域まで再現しようとする、節 4.3.2 で説明するフォースフリー磁場として考える必要がある。

ポテンシャル磁場は次の性質を持つ (e.g. Priest, 2014, §3.3)。

- $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ より、スカラーポテンシャル Ψ はラプラス方程式に従う^{†7}。

$$\nabla^2 \Psi = 0 \tag{4.2.28}$$

- 磁場 \mathbf{B} の境界に垂直な成分 (法線成分) B_{norm} が全ての境界で与えられれば、ラプラス方程式を解くことで領域内でのポテンシャル磁場は一意に決まる。
- ポテンシャル磁場は同じ境界条件を満たす磁場構造の中で最小のエネルギーを持つ。つまり、境界での B_{norm} が同じであり、かつ領域 (V) 内に電流が存在するような場合の磁気エネルギー $\int_V B^2 / (2\mu_0) dV$ は、電流が存在しない場合より必ず大きくなる。

最後の性質については次のようにして分かる。 \mathbf{B}_0 をある特定の境界条件 B_{norm} を満たすポテンシャル磁場とする。また、 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ は \mathbf{B}_0 と同じ境界条件 B_{norm} を満たす非ポテンシャル磁場とする。つまり、境界での \mathbf{B}_1 の法線成分はゼロである。 \mathbf{B} による磁気エネルギーは

$$W = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \int_V \frac{B_0^2 + 2\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1 + B_1^2}{2\mu_0} dV \tag{4.2.29}$$

である。 \mathbf{B}_0 はポテンシャル磁場なのでスカラーポテンシャルを用いて書くと、上式の真ん中の項は次のように計算できる。

$$\int_V \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1 dV = - \int_V (\nabla \Psi_0) \cdot \mathbf{B}_1 dV = - \int_V \nabla \cdot (\Psi_0 \mathbf{B}_1) dV = - \int_{\partial V} \Psi_0 \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S} \tag{4.2.30}$$

^{†7} 極座標でのラプラス方程式の球面調和関数展開による解き方は、付録 1.C.4 の球面調和関数の項で説明している。

B_1 の法線成分がゼロであることから、上式はゼロであることが分かる。よって、

$$W = \int_V \frac{B_0^2 + B_1^2}{2\mu_0} dV \geq \int_V \frac{B_0^2}{2\mu_0} dV \quad (4.2.31)$$

であることが言える。

4.2.6 [トピック] 地球の双極子磁場

地球内部由来の地磁気の表現方法と観測結果を紹介する。この節は Lowrie (2011, Chapter 7) を参考にした。

既に述べたように、地磁気に影響を及ぼすような電流が地上には無いとみなすと、地上で観測される磁場はポテンシャル磁場であると考えられる。実際には人工物起因の磁場が地磁気の観測に影響を及ぼすこともあるが、そのような局所的な磁場構造は切り捨てて、地球全体の大域的な磁場構造に注目する。スカラーポテンシャルは地球内部に起因する成分 Ψ_i と地球外部に起因する成分 Ψ_e に分かれる。

$$\Psi = \Psi_i + \Psi_e \quad (4.2.32)$$

Ψ_i は主に外核の対流に起因すると考えられていて、典型的には 30000 nT から 60000 nT 程度の大きさの磁場を与える。 Ψ_e は例えば電離圏に流れる電流が原因のひとつに挙げられる。そのような磁場は磁気嵐の時には 1000 nT 程度のオーダーになり得るが、静穏時には数十 nT 程度と考えられる。静穏時の時間平均的な磁場構造に注目し、外部起因の磁場は無視する。

地球内部起因の磁場は地球中心から無限遠に離れるとゼロになる必要がある。 Ψ_i についてのラプラス方程式を、無限遠でゼロになるという境界条件の下で解くと、次式を得る。解き方は付録 1.C.4 の球面調和関数の項を参照のこと。

$$\Psi_i(r, \theta, \phi) = R \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} [g_n^m \cos(m\phi) + h_n^m \sin(m\phi)] \mathcal{P}_n^m(\cos \theta) \quad (4.2.33)$$

R は地球半径である。ルジャンドル陪関数には慣習として、部分的に規格化された (シュミット流に規格化された) もの $\mathcal{P}_n^m(x)$ が用いられる。付録 1.C.4 で定義されている一般的なルジャンドル陪関数 $P_n^m(x)$ との間には次の関係がある。

$$\mathcal{P}_n^m(x) = \sqrt{\frac{\varepsilon_m (n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(x) \quad (4.2.34)$$

$$\text{ただし, } \varepsilon_m = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ 2 & (m \neq 0) \end{cases} \quad (4.2.35)$$

いくつかの n, m に対する具体的な関数形は表 4.1 に示した。

表 4.1 一般的な定義のルジャンドル陪関数 $P_n^m(\cos \theta)$ と部分的に規格化されたルジャンドル陪関数 $\mathcal{P}_n^m(\cos \theta)$ の具体例

n	m	$P_n^m(\cos \theta)$	$\mathcal{P}_n^m(\cos \theta)$
1	0	$\cos \theta$	$\cos \theta$
1	1	$\sin \theta$	$\sin \theta$
2	0	$1/2 \cdot (3 \cos^2 \theta - 1)$	$1/2 \cdot (3 \cos^2 \theta - 1)$
2	1	$3 \sin \theta \cos \theta$	$\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta$
2	2	$3 \sin^2 \theta$	$\sqrt{3}/2 \cdot \sin^2 \theta$
3	0	$1/2 \cdot \cos \theta (5 \cos^2 \theta - 3)$	$1/2 \cdot \cos \theta (5 \cos^2 \theta - 3)$
3	1	$3/2 \cdot \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1)$	$\sqrt{6}/4 \cdot \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1)$
3	2	$15 \sin^2 \theta \cos \theta$	$\sqrt{15}/2 \cdot \sin^2 \theta \cos \theta$
3	3	$15 \sin^3 \theta$	$\sqrt{10}/4 \cdot \sin^3 \theta$

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ より、地球表面で磁場を積分すると、

$$\int_{\text{地球表面}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \int_{\text{地球表面}} \frac{\partial \Psi_i}{\partial r} dS = 0 \tag{4.2.36}$$

となる必要がある。 $m \geq 1$ の項については $d\phi$ で \cos, \sin を一周に渡って積分することでゼロになり、 $m = 0$ かつ $n \geq 1$ の項については、ルジャンドル多項式の

$$\int_{-1}^1 \mathcal{P}_n^0(x) dx = 0 \quad (n \geq 1 \text{ のとき}) \tag{4.2.37}$$

という性質よりゼロになる。一方で $n = 0$ の項は θ, ϕ に依らないので、全立体角で積分すると有限の値になる。従って、 $n = 0$ の係数はゼロである必要がある。以上のことを踏まえると、内部起因のポテンシャルは次のように表せる。

$$\Psi_i(r, \theta, \phi) = R \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} [g_n^m \cos(m\phi) + h_n^m \sin(m\phi)] \mathcal{P}_n^m(\cos \theta) \tag{4.2.38}$$

展開係数 g_n^m, h_n^m はガウス係数と呼ばれ、磁場と同じ次元を持つ。

地表 ($r = R$) の様々な緯度 ($\pi - \theta$)、経度 (ϕ) の地点で実際に観測された地磁気のデータから、磁気嵐などの影響があると思われるものを取り除き、残ったデータを用いて逆問題を解くことで、ガウス係数が推定される。実際に定期的にガウス係数を推定して公開しているプロジェクトとしては、例えば “World Magnetic Model” (WMM)^{†8} や “International Geomagnetic Reference Field” (IGRF)^{†9} がある。IGRF では、 $n = 13$ までの項を考慮してガウス係数を推定している。2015 年の地磁気モデルである IGRF2015 の係数値を表 4.2 に示す。

^{†8} <https://www.ngdc.noaa.gov/geomag/WMM/DoDWMM.shtml>

^{†9} <https://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html>

表 4.2 IGRF2015 の $n = 1, 2, 3$ についてのガウス係数 (Thébault et al., 2015)

n	m	g_n^m (nT)	h_n^m (nT)
1	0	-29442.0	—
1	1	-1501.0	4797.1
2	0	-2445.1	—
2	1	3012.9	-2845.6
2	2	1676.7	-641.9
3	0	1350.7	—
3	1	-2352.3	-115.3
3	2	1225.6	244.9
3	3	582.0	-538.4

表を見ると、 g_1^0 の成分が卓越していることが分かる。 $(n, m) = (1, 0)$ の項は Ψ_i に

$$\Psi_i \propto \frac{1}{r^2} \cos \theta = \frac{\hat{z} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (4.2.39)$$

と寄与する項であり、図 4.5 に示したような磁場構造を与える。このような磁場構造は双極子と呼ばれる。Thébault et al. (2015) の Figure 1 (特に inclination/伏角の図) を見ると確かに極方向の双極子構造が卓越していることが想像できる。図 4.5 のような磁場構造が地球付近の宇宙空間に存在しているわけではなく、実際に存在する磁場の内の地球内部に起因する成分を取り出すと図のような構造が卓越することに注意して欲しい。実際の地球磁気圏は太陽風の影響を受け、太陽と反対方向に長い尾を持つような構造をしている。

図 4.5 の双極子は z 方向を向いているが、一般に $\hat{\mathbf{m}} = (m_x, m_y, m_z)$ の方向を向いている双極子を表すポテンシャルは次のように書ける。

$$\Psi_i \propto \frac{\hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (4.2.40)$$

$$= \frac{1}{r^2} (m_z \cos \theta + m_x \sin \theta \cos \phi + m_y \sin \theta \sin \phi) \quad (4.2.41)$$

$$= \frac{1}{r^2} [m_z \mathcal{P}_1^0(\cos \theta) + m_x \mathcal{P}_1^1(\cos \theta) \cos \phi + m_y \mathcal{P}_1^1(\cos \theta) \sin \phi] \quad (4.2.42)$$

つまり、 g_1^0, g_1^1, h_1^1 の項まで考慮すると、地磁気を z 軸からずれた向きの双極子と捉えることができる。IGRF によって決定された双極子軸の向きについては Thébault et al. (2015) の Figure 3 を見て欲しい。磁極が 100 年のスケールで変化していることが示されている。

IGRF のガウス係数を用いて計算した外核-マントル境界 (CMB, $r = 3480$ km) における磁場の r 成分の分布を図 4.6 に示す。上段の 1960 年の分布は展開次数として $n = 10$ までが考慮されている。対して、下段の 2020 年の分布は $n = 13$ まで考慮されているため、上段よりも細かい構造まで示されている。もっと高次の成分については、地殻の磁化の影響を強く受けてい

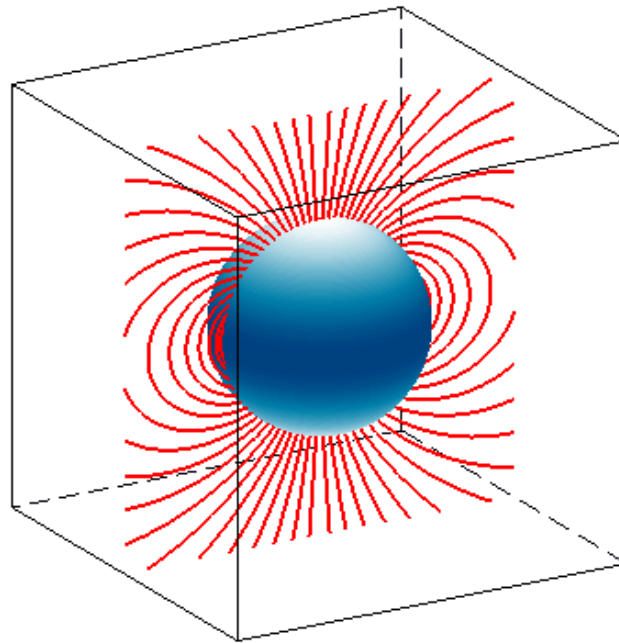


図 4.5 双極子磁場：赤い曲線は磁力線を表す。球面の色は等 r 面上で比較した磁場強度を表し、強度が大きいほど色が薄い。 z 軸周りの回転について対称の構造をしていて、赤道に行くほど強度は弱く、球面に対して水平になる。極と赤道の強度の比は $2:1$ であり、 r^{-3} に比例して小さくなる。

るため、地上での観測結果をそのまま CMB に外挿することはできないが、 $n \leq 13$ の成分についてはこの影響は弱いと考えられている (e.g. Roberts & King, 2013)。CMB では、磁場の強い領域 (パッチ) がいくつも存在しており、南北どちらの半球にも両極性のパッチが混在している。図では高次数の成分を考慮していないため、大きなスケールの構造が強調されているが、実際にはもっと細かいスケールのパッチが存在しているかもしれないという指摘もある (Roberts & King, 2013, Figure 4)。図に矢印で示したパッチが分かりやすいが、各パッチは 100 年の時間スケールで移動している。このような変化は永年変化 (secular variation) と呼ばれる。

4.2.7 磁気ヘリシティ

例えば太陽大気における磁力線の「絡まり具合」の指標として、磁気ヘリシティという量が使われる。磁気ヘリシティの意味や性質について説明する。この節は Berger & Field (1984) を参考にした。

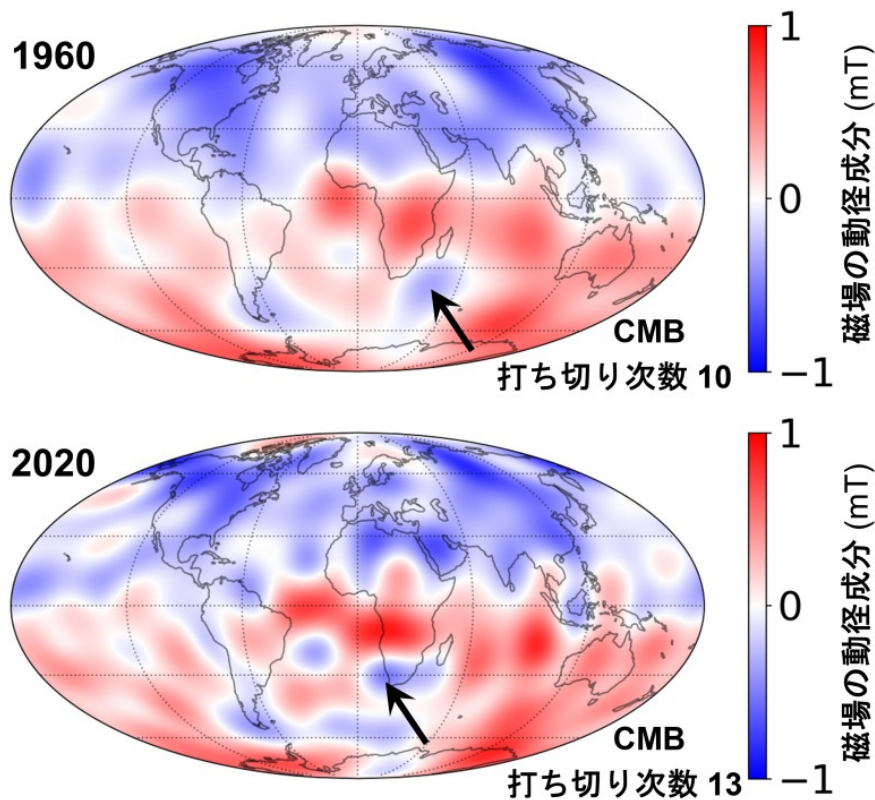


図 4.6 外核-マントル境界 (CMB) における磁場の r 成分：DGRF1960 と IGRF2020 の値。1960 年の分布は $n = 10$ まで、2020 年の分布は $n = 13$ まで考慮されている。

定義と保存性

空間に固定されたある領域 V を考える。 V の表面を横切る磁力線は無いとする。例えば孤立系を考えて V をその孤立系を覆う領域とする場合には、このことが成り立つ。 V に渡って積分した次の量を磁気ヘリシティと言う。

$$H = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV \tag{4.2.43}$$

\mathbf{A} はベクトルポテンシャルである ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$)。 H はゲージ変換 (付録 2.A.1 参照) に対して不変である。例えば $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$ とゲージ変換をした場合、 H の変化量 δH は

$$\delta H = \int_V \nabla\chi \cdot \mathbf{B} dV = \int_{\partial V} \chi \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{4.2.44}$$

と書けるが、境界 ∂V で $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ の場合は上式はゼロになる。

ファラデーの法則 (2.1.3)、スカラーポテンシャルと電場の関係式 (2.A.3) およびオームの法

則 (2.4.2) を用いると、 H の時間変化は次のように表せる。

$$\frac{dH}{dt} = \int_V \left(\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dV \quad (4.2.45)$$

$$= - \int_{\partial V} [\eta \mathbf{j} \times \mathbf{A} - (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{A} + \phi \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{S} - 2 \int_V \eta \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} dV \quad (4.2.46)$$

理想 MHD ($\eta \rightarrow 0$) で境界 ∂V を貫く流速がゼロ ($\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0$) の場合は、 H は保存されることが分かる。太陽大気で有限の η を考える場合も、上式の最後の項による磁気ヘリシティの散逸は磁場の散逸に比べてずっと遅いので、実質的に保存されると考えられることが Berger (1984) によって示されている。

磁力線のトポロジーとの関係

幾つかの孤立した磁束管から構成される系を考える。この系を覆う領域 V で積分した磁気ヘリシティは、複数の磁束管の関係性から決まる相互ヘリシティと、磁束管内の磁力線の捻じれによって決まる自己ヘリシティに分けることができる (Berger & Field, 1984)。

例えば図 4.7 の (A) のように絡まった 2 つの磁束管を考える。各磁束管は捻じれがゼロであり、磁力線は全て軸に沿った向きであるとする。また、簡単のために各磁束管の断面積は十分に小さいとする。このとき、片方の磁束管 T_1 で積分した磁気ヘリシティは次のように計算できる。

$$\int_{T_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dl dS = \int_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \int_{T_1 \text{の断面}} B dS \quad (4.2.47)$$

$$= F_1 \int_{S_1} \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.2.48)$$

$$= F_1 \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.2.49)$$

$$= F_1 F_2 \quad (4.2.50)$$

C_1 は磁束管 T_1 が描くループ、 S_1 は C_1 が張る面を意味する。 F_1 は磁束管 T_1 の強度である。もう一方の磁束管 T_2 は S_1 を正の向き (右ねじの関係の向き) に 1 回貫いているため、3 段目に現れる磁束は 4 段目では T_2 の強度を用いて表されている。磁束管 T_2 に渡って積分した磁気ヘリシティも同様にして表されるため、系全体の磁気ヘリシティは次のように書ける。

$$H = 2F_1 F_2 \quad (4.2.51)$$

このように、2 つの磁束管が絡まっている場合に生じる磁気ヘリシティを相互ヘリシティと言う。図 4.7 の (A) のような磁束管の絡み方は、絡み数 (linking number) が +1 であると表現される。図の (B) の磁束管の絡み数は -1 である。一般に絡み数が L_{12} である 2 つの磁束管の間の相互ヘリシティは

$$H = 2L_{12} F_1 F_2 \quad (4.2.52)$$

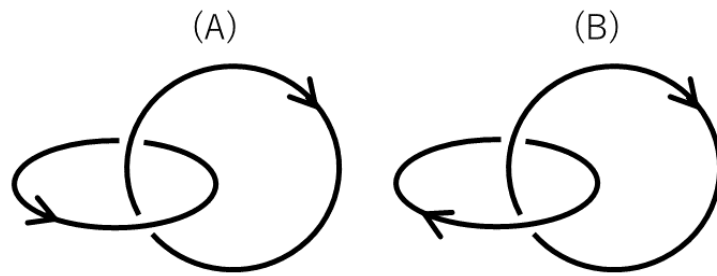


図 4.7 絡み数が +1 の磁束管 (A) と絡み数が -1 の磁束管 (B)

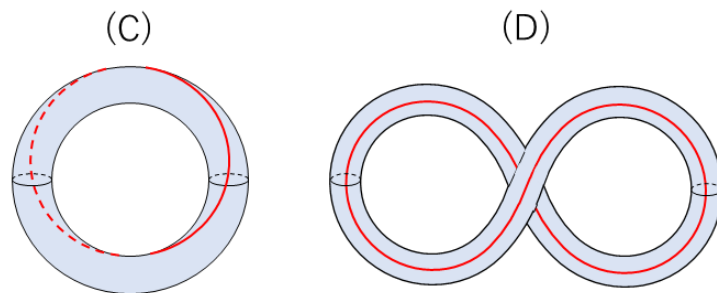


図 4.8 ひねり数が +1 の磁束管：赤い曲線は磁束管表面の磁力線の内の 1 つを表す。

と表される。

磁束管は他の磁束管と絡まっていなくても自身の磁気ヘリシティを持つ。これは自己ヘリシティと呼ばれる。図 4.8 に示した磁束管 (C) と (D) はどちらもひねり数 (writhing number) が +1 であるというトポロジーを持つ。すなわち、(C) を一回ひねって 8 の字の形にすれば、(D) と同様の投影になる。(C) の円環型磁束管の状態は “twisted” と表現されることがある。対して、(D) の状態は “writhed” と表現される。一般に、ある磁束管があったとき、その磁束管を上手く曲げることで、(D) のように磁力線の内の 1 つが捻じれる (twisted) ことなく全ての部分で手前に位置するように投影することができたとき、図 4.9 の左のような交差の数 N_+ から右のような交差の数 N_- を引いたものがひねり数 W になる。

$$W = N_+ - N_- \tag{4.2.53}$$

このとき、磁束管の自己ヘリシティは、強度を F として次のように表される (e.g. Berger & Field, 1984)。

$$H = WF^2 \tag{4.2.54}$$

以上のように、磁気ヘリシティは磁束管のトポロジーを表す。理想気体の場合に磁気ヘリシティが全空間 V 内で保存されることは、磁力線のトポロジーが変化しないことと関係がある。更には太陽大気で有限の η を考える際にも磁気ヘリシティの散逸は無視できるため、例えば磁気拡散によって磁力線がつなぎ変わる現象である磁気リコネクション (節 4.11 参照) を考える場

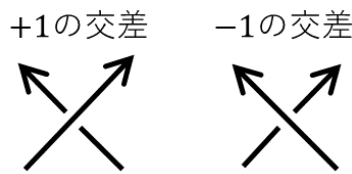


図 4.9 ひねり数に +1 として寄与する交差と -1 として寄与する交差

合にも、その前後で磁気ヘリシティは保存されるとみなせる。つまり、例えば磁力線がつながり変わったことで相互ヘリシティが解消されたなら、それを補うように磁束管はよじれて自己ヘリシティを増やすわけである。このことは太陽フレアやプロミネンスの噴出によって磁場構造がどのように変化するかを考える際に有用である。

相対磁気ヘリシティ

前の小節で磁気ヘリシティを太陽大気で考えることの有用性を述べた。前の小節までで述べてきた磁気ヘリシティは境界を磁力線が貫かないような領域で定義されたものだったが、太陽大気に現れる磁力線は表面を貫いて内部と繋がっているため、太陽大気のみで磁気ヘリシティを考えることができない。そのため、太陽大気を考える場合は代わりに相対磁気ヘリシティ (relative magnetic helicity) H_R が用いられる。太陽内部から大気に現れる磁束管は閉じているはずだが、注目する磁束管群が全て含まれる領域を V_∞ とし、 V_∞ を太陽内部 V_{int} と太陽大気 V_{atm} に二分する。両者の境界 (太陽表面) は S と書くことにする。 H_R は次のように表される。

$$H_R = \int_{V_\infty} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{B}_p) dV \tag{4.2.55}$$

$$= \int_{V_\infty} (\mathbf{A} + \mathbf{A}_p) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_p) dV \tag{4.2.56}$$

\mathbf{B}_p は太陽内部では \mathbf{B} と同じであり、太陽大気では S での \mathbf{B} の法線成分を境界条件とするポテンシャル磁場であるような仮想的な磁場を指す。また、 \mathbf{A}_p はそのような磁場を与えるベクトルポテンシャルである。 H_R について次のことが示されている (詳しくは Berger & Field, 1984)。

- H_R はゲージ変換に対して不変である。
- H_R は太陽内部での磁場構造 $\mathbf{B}(\mathbf{x} \in V_{\text{int}})$ に依らない。このことについての簡単な説明は図 4.10 を参照。
- 磁気ヘリシティの散逸を無視する場合、 H_R は次の保存則を満たす。

$$\frac{dH_R}{dt} = 2 \int_S [(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_p)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_p)\mathbf{B}] \cdot d\mathbf{S} \tag{4.2.57}$$

つまり、上式の右辺は太陽表面を通して大気に流入する相対ヘリシティのフラックスを表す。特に第 1 項は \mathbf{v} の法線成分に依存する項であり、凍結した磁場構造が流速に従って

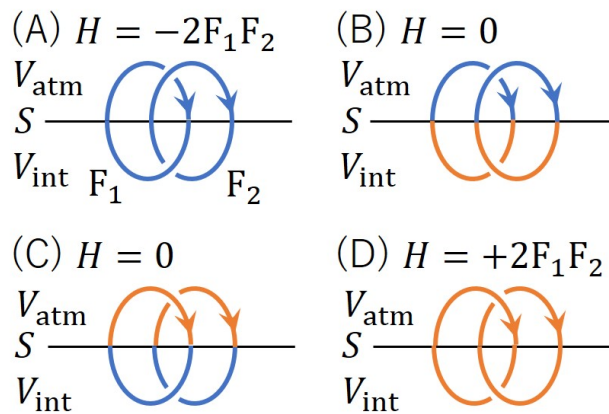


図 4.10 相対磁気ヘリシティの説明：(A) と (C)、(B) と (D) はそれぞれ V_{int} での磁場が同じであり、(A) と (B)、(C) と (D) はそれぞれ V_{atm} での磁場が同じであるとする。(C)、(D) の V_{atm} での磁場がポテンシャル磁場であるとし、これを基準に (A)、(B) の相対磁気ヘリシティを考える。(A) の (相互) 磁気ヘリシティから (C) を引いたものと、(B) から (D) を引いたものはどちらも $H_R = -2F_1F_2$ であり、相対磁気ヘリシティは V_{int} での磁場に依らないことが分かる。

大気中出现することで磁気ヘリシティが流入する効果を表す。ベクトルポテンシャル \mathbf{A}_p は $\mathbf{A}_p \cdot d\mathbf{S} = 0$ を満たす^{†10}ので、第 2 項は \mathbf{v} の表面内の成分に依存する項であり、磁力線の表面に突き刺さった部分が表面の流体の動きによってかき混ぜられることによって生じる磁気ヘリシティを表す。

4.3 平衡

理想化された状況をいくつか考えることで、定常状態の MHD 流体が取り得る解の性質についての見識を深める。運動方程式 (3.2.28) において $\partial/\partial t = 0$ とすると、次のようになる。

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} \tag{4.3.1}$$

ただし、粘性項は小さいとして無視した。上式を節 4.1 で説明したように無次元化すると、次のように書ける。

$$\frac{\gamma V_0^2}{c_s^2} \rho'(\mathbf{v}' \cdot \nabla')\mathbf{v}' = -\nabla' p' + \frac{2}{\beta} \mathbf{j}' \times \mathbf{B}' + \frac{L_0}{H_0} \rho' \mathbf{g}' \tag{4.3.2}$$

$$\text{ただし, } c_s = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}, \quad \beta = \frac{2\mu_0 p_0}{B_0^2}, \quad H_0 = \frac{p_0}{\rho_0 g_0} \tag{4.3.3}$$

^{†10} クーロンゲージ $\nabla \cdot \mathbf{A}_p = 0$ が用いられている。S として平面か球面を考える場合は $\mathbf{A}_p \cdot d\mathbf{S} = 0$ を満たす。

μ_0 は真空の透磁率、 L_0 は系の空間スケールで、他のゼロの添え字が付いた量はそれぞれの文字が通常意味する物理量の典型的なスケールである。 γ は比熱比、 c_s は音速 (節??参照)、 β はプラズマベータ、 H_0 はスケールハイト (節 4.3.1 参照) である。上式を見ると、音速に比べて流体の速度が十分に小さいような系を考える場合、移流項は圧力項に比べて無視できる。同様に、

$$\frac{\text{移流項}}{\text{ローレンツ項}} = \frac{V_0^2}{B_0^2/(\mu_0\rho_0)} = \frac{V_0^2}{c_A^2} \quad (4.3.4)$$

$$\frac{\text{移流項}}{\text{重力項}} = \frac{V_0^2}{gL_0} \quad (4.3.5)$$

と書けるので、流速がアルベーン波速度 c_A (節??参照) に比べて十分に遅い場合、移流項はローレンツ項に対して無視でき、或いは L_0 を自由落下することで得る速度 $\sqrt{2gL_0}$ に比べて十分に遅い場合は重力項に対して無視できる。以下の議論では基本的に移流項を無視できる場合を考える。圧力項とローレンツ項の大きさの関係はプラズマベータによって決まる。スケールハイトに比べて小さい空間スケールの系を考える場合は重力項は圧力項に対して無視できる。各項を無視したときの平衡解の性質について説明する。

4.3.1 静水圧平衡

磁場のない場合の静水圧平衡

まず、プラズマベータが大きい場合を考える。これは例えば太陽内部が該当する。ただし、簡単のために曲率は考えず、鉛直方向 (z 方向) 負の向きに重力が働いているとする^{†11}。運動方程式の水平成分から $\partial p/\partial x = 0, \partial p/\partial y = 0$ が分かるので、この場合 p は z のみの関数になる。運動方程式の鉛直成分は

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -\frac{mg}{k_B T} p \quad (4.3.6)$$

と書ける。ただし、理想気体の状態方程式 (3.4.2) を用いた。 m は対象とする流体を構成する粒子の平均質量である。この式から ρ, T もやはり、 z のみの関数であることが言える。上式を解くと、 $z = 0$ のときの圧力を p_0 として、

$$p(z) = p_0 \exp \left[- \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \right] \quad (4.3.7)$$

$$\text{ただし, } H(z) = \frac{k_B T(z)}{mg(z)} \quad (4.3.8)$$

となる。特に温度と重力加速度が z に依らず一様な場合、上式は次のように書ける。

$$p(z) = p_0 \exp \left(-\frac{z}{H} \right) \quad (4.3.9)$$

^{†11} 重力は非回転 $\nabla \times \mathbf{g} = 0$ の場なので、この場合は $\partial g/\partial x = 0, \partial g/\partial y = 0$ が言える。つまり、重力加速度は z のみの関数でなければならない。

つまり、圧力は z と共に指数関数的に減少し、 H は圧力が $1/e = 0.37$ 倍になる高さを表す。このような平衡状態を静水圧平衡と言い、この流体は重力成層しているなどと表現される。 H はスケールハイトと呼ばれ、重力成層の厚さのスケールになる。

このとき、質量密度は次のように成層している。

$$\frac{\rho(z)}{\rho_0} = \frac{T_0}{T(z)} \exp \left[- \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \right] \quad (4.3.10)$$

ρ_0, T_0 は $z = 0$ の高度での密度と温度である。温度が z と共に上昇する場合は密度は圧力よりも早く減少する。一方で、温度が z と共に減少する場合、密度の減少率は圧力よりも小さい。温度の高度分布はエネルギー収支のバランス (エネルギー保存則) によって決定される。

鉛直な磁場があるときの重力成層

次に、プラズマベータが大きいとは言えない系を考える (e.g. Priest, 2014, §3.1.3)。まず、殆ど鉛直方向の磁場 \mathbf{B} が存在する場合を考える。つまり、ローレンツ力はほとんど水平にしか働かず、磁力線はほぼ真つすぐなため磁気張力は無視できる。このとき、運動方程式の鉛直成分は前段落の場合と変わらないので、流体は相変わらず重力成層をしている。しかし、運動方程式の水平成分 (例えば x 成分) は次のように変更される。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0 \quad (4.3.11)$$

つまり、この場合は前段落とは違い、一般に p は水平方向に一様ではない。上式と y 方向の運動方程式から、適当な z のみの関数 $f(z)$ を用いて

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} = f(z) \quad (4.3.12)$$

と表せることが分かる。つまり、ガス圧 p と磁気圧 $B^2/(2\mu_0)$ を併せた全圧力は z のみに依存し、特定の高度に注目すると、全圧力が一定になるようにしてガス圧と磁気圧が分布する。例えば磁場が強い領域ではガス圧は小さくなるという塩梅である。

水平な磁場があるときの重力成層

水平方向の磁場 $\mathbf{B}(y, z) = B(y, z)\hat{\mathbf{x}}$ が存在する場合を考える。運動方程式の x 成分より、 p は x 方向に一様であることが分かる。 y 方向の運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(p(y, z) + \frac{[B(y, z)]^2}{2\mu_0} \right) = 0 \quad (4.3.13)$$

なので、全圧力 p_t は z のみの関数になる。 z 方向の運動方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial p_t}{\partial z} = -\rho g = -\frac{mg}{k_B T} p = -\frac{mg}{k_B T} \frac{\beta}{\beta + 1} p_t \quad (4.3.14)$$

例えば太陽内部や大気の局所的な現象を調べる場合を想定し、 T, β, g が z に依らないと仮定すると、上式の解は次のようになる。

$$p_t(z) = p_t(0) \exp\left(-\frac{z}{H_B}\right) \quad (4.3.15)$$

$$\text{ただし, } H_B = \frac{\beta + 1}{\beta} \frac{k_B T}{mg} = \frac{p_0 + B_0^2/(2\mu_0)}{\rho_0 g} \quad (4.3.16)$$

$p = \beta p_t/(\beta + 1), B^2/(2\mu_0) = p_t/(\beta + 1)$ および状態方程式を用いれば、各量は次のように成層することが分かる。

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{z}{H_B}\right), \quad B = B_0 \exp\left(-\frac{z}{2H_B}\right), \quad \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{H_B}\right) \quad (4.3.17)$$

H_B は磁気圧を考慮に入れて修正されたスケールハイトである。このような重力成層中の不安定性については磁気浮力の節 ?? で説明する。

4.3.2 フォースフリー磁場

運動方程式 (4.3.2) の各項のスケールを再考する。プラズマベータ β が小さい場合は圧力項はローレンツ項に対して無視できる。また、対象とする系の鉛直方向の空間スケールが H/β (H はスケールハイト) に比べて小さい場合は、重力項がローレンツ項に対して無視できる。例えば太陽コロナの活動領域上空における典型的な値

$$T = 10^6 \text{ K}, \quad n = 10^{15} \text{ m}^{-3}, \quad B = 10^{-3} \text{ T} \quad (4.3.18)$$

を代入すると、

$$\beta = \frac{2\mu_0 n k_B T}{B^2} = 0.03, \quad \frac{H}{\beta} = \frac{k_B T}{mg\beta} = 2 \times 10^6 \text{ km} > R_\odot \quad (4.3.19)$$

となる。ただし、平均分子質量は $m = 0.6m_p$ (m_p は陽子質量)、重力加速度は太陽中心から $1.1R_\odot$ での値 $g = 274 \text{ m s}^{-2}/1.1^2$ を用いた。このような領域では式 (4.3.2) の中でローレンツ項が卓越している。ローレンツ項と釣り合うことのできる項が無い場合、磁場はローレンツ力がゼロになるような形状を取る。つまり、次式が良い精度で成り立つ。

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0 \quad (4.3.20)$$

この条件を満たすような磁場形状をフォースフリー磁場 (force-free field) という。

式 (4.3.20) は電流が磁場に平行であることを言っている。アンペールの法則 (2.5.9) より、電流は磁場の回転であるため、磁場の回転が磁場自身と平行である。つまり、式 (4.3.20) は次のように書き換えられる。

$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B} \quad (4.3.21)$$

係数 α は一般には場所によって異なる値を取るが、次の拘束条件を満たさなければならない。上式の発散を取ってベクトル解析の公式を用いると、次式を得る。

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \alpha = 0 \quad (4.3.22)$$

つまり、 α は磁力線に沿って一定値を取らなければならない。

線形フォースフリー磁場

一般には α は磁力線をまたいで変化するが、 α が系内全ての点で一定の値を取るという仮定を課すと、式 (4.3.21) の回転を取ってベクトル解析の公式を用い、右辺に式 (4.3.21) を再帰的に代入することで、次式を得る。

$$(\nabla^2 + \alpha^2)\mathbf{B} = 0 \quad (4.3.23)$$

この場合、上式を満たす 2 つの解の重ね合わせもまた上式の解になる。このように、 α を定数と仮定した際の形状を特に線形フォースフリー磁場という。上式はベクトルヘルムホルツ方程式と呼ばれる型の式であり、解析的に解く手法が存在する。

任意の非発散ベクトル場 ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) は次のように、2 つのスカラーポテンシャル T, P を用いて表すことができる。これを直交座標 (x, y, z) におけるトロイダル-ポロイダル分解という。

$$\mathbf{B} = \nabla \times (T\hat{z}) + \nabla \times [\nabla \times (P\hat{z})] \quad (4.3.24)$$

このように表したときに、 T が司る成分をトロイダル場、 P が司る成分をポロイダル場という。上式で表された \mathbf{B} は自動的に非発散になる。線形フォースフリー磁場の場合、 T, P に次の拘束条件を与えても一般性を失わない (詳しくは Nakagawa & Raadu, 1972)。

$$T = \alpha P \quad (4.3.25)$$

$$(\nabla^2 + \alpha^2)P = 0 \quad (4.3.26)$$

つまり、 α の値と適切な境界条件が与えられれば、 P に関する上式のヘルムホルツ方程式を解くことで \mathbf{B} が決定される。

例えば Seehafer (1978) は、観測された光球の磁場マップ (マグネトグラム) から、線形フォースフリー磁場の仮定の下で上空の活動領域の磁場を計算するために、次の解を得た。直交座標系で

$$0 \leq x \leq L_x, \quad 0 \leq y \leq L_y, \quad 0 \leq z < \infty \quad (4.3.27)$$

の領域を考える。平面 $z = 0$ は光球を想定している。鉛直境界面で $B_z = 0$ であり、 $z \rightarrow \infty$ ですみやかに $P \rightarrow 0$ になるという境界条件の下で、グリーン関数法を用いて式 (4.3.26) を解くこ

とで、次の解が得られる。

$$B_x = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{C_{mn}}{\lambda_{mn}} \exp(-r_{mn}z) \cdot \left[\alpha \frac{\pi n}{L_y} \sin\left(\frac{\pi m x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{L_y}\right) - r_{mn} \frac{\pi m}{L_x} \cos\left(\frac{\pi m x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{L_y}\right) \right] \quad (4.3.28)$$

$$B_y = - \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{C_{mn}}{\lambda_{mn}} \exp(-r_{mn}z) \cdot \left[\alpha \frac{\pi m}{L_x} \cos\left(\frac{\pi m x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{L_y}\right) + r_{mn} \frac{\pi n}{L_y} \sin\left(\frac{\pi m x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{L_y}\right) \right] \quad (4.3.29)$$

$$B_z = \sum_{m,n=1}^{\infty} C_{mn} \exp(-r_{mn}z) \sin\left(\frac{\pi m x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{L_y}\right) \quad (4.3.30)$$

$$\text{ただし, } \lambda_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right) \quad (4.3.31)$$

$$r_{mn} = \sqrt{\lambda_{mn} - \alpha^2} \quad (4.3.32)$$

光球磁場の B_z 成分が分かれば、そのデータをサイン関数の積で展開したときの係数として C_{mn} が求まる。すると、上式より各点における \mathbf{B} が計算できる。

フォースフリー磁場の性質

非線形のものも含めたフォースフリー磁場の性質を説明する。フォースフリー磁場についてより詳しくは、例えば [Wiegelmann & Sakurai \(2021\)](#) や [Priest \(2014\)](#) の節 3.4 を参考にして欲しい。

節 4.2.5 で、境界での磁場の法線成分が与えられているとき、領域内の磁気エネルギーを最小にする磁場構造がポテンシャル磁場であることを述べた。それと似た定理として、次の 2 つがある (e.g. [Sakurai, 1989](#))。

1. 境界 ∂V での磁場の法線成分 B_{norm} に加え、領域 V で定義した磁気ヘリシティ $H = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV$ の値が与えられたとする。ただし、 \mathbf{A} はベクトルポテンシャルである ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$)。この条件の下で磁気エネルギー $W = \int_V B^2 / (2\mu_0) dV$ が極値を取るような磁場構造は線形フォースフリー磁場である。
2. 境界 ∂V での磁場の法線成分 B_{norm} に加え、磁場の接続性が与えられたとする。磁場の接続性とは、境界のある点から伸びる磁力線がどの境界に再び突き刺さっているかの関係性である。この条件の下で磁気エネルギー $W = \int_V B^2 / (2\mu_0) dV$ が極値を取るような磁場構造は (一般に非線形な) フォースフリー磁場である。

定理 1 について

領域内の磁場構造を $\mathbf{A}, \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A} + \delta\mathbf{A}, \mathbf{B} + \delta\mathbf{B}$ と微小変化させたときに、 W がどのように変化するかを考える。ただし、 $\delta\mathbf{B} = \nabla \times \delta\mathbf{A}$ である。また、境界での B_{norm} を変化させてはならないので、境界での $\delta\mathbf{A}$ は境界面に垂直でなければならない (接成分はゼロである)。 W の変化量 δW は $\delta\mathbf{B}$ について 2 次以上の微小量を見捨てることで、次のように計算できる。

$$2\mu_0\delta W = \int_V 2\mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{B} dV \quad (4.3.33)$$

対して、磁気ヘリシティの変化量は

$$\delta H = \int_V (\delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{B}) dV \quad (4.3.34)$$

と書けるが、今は磁気ヘリシティが一定に保たれるような変化を考えているので、これはゼロである。上式に定数 α_0 を乗じたものを式 (4.3.33) の右辺から引き、 $\delta\mathbf{B}$ を消去し、ベクトル解析の公式を用いて変形すると次式を得る。

$$2\mu_0\delta W = \int_V [2\mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{B} - \alpha_0(\delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{B})] dV \quad (4.3.35)$$

$$= \int_V \nabla \cdot (-2\mathbf{B} \times \delta\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{A} \times \delta\mathbf{A}) dV + 2 \int_V (\nabla \times \mathbf{B} - \alpha_0\mathbf{B}) \cdot \delta\mathbf{A} dV \quad (4.3.36)$$

第 1 項は発散定理より境界での表面積分に置き換わり、 $\delta\mathbf{A}$ が境界面に直交することよりゼロになる。第 2 項は定数 α_0 に対するフォースフリー磁場の条件 (4.3.21) が満たされる場合にゼロになる。

定理 2 について

磁場を次のように表すことにする。

$$\mathbf{B} = \nabla f \times \nabla g = \nabla \times (f\nabla g) \quad (4.3.37)$$

このときの f, g はオイラーポテンシャルと呼ばれる (Stern, 1966)。上式より、 $\mathbf{B} \cdot \nabla f = 0, \mathbf{B} \cdot \nabla g = 0$ が分かる。つまり、 f, g は磁力線に沿って一定値を取る。境界での f, g の値は固定されている。これは磁力線の接続性を指定することに対応する。そのような条件の下で領域内での各ポテンシャルの値を $\delta f, \delta g$ だけ変化させた場合に W がどのように変化するかを考える。ベクトル解析の公式を用いて変形することで、変化分 δW は次のように計算できる。

$$2\mu_0\delta W = \int_V 2\mathbf{B} \cdot (\nabla\delta f \times \nabla g + \nabla f \times \nabla\delta g) dV \quad (4.3.38)$$

$$= 2 \int_V \nabla \cdot [(\delta f \nabla g - \delta g \nabla f) \times \mathbf{B}] dV + 2 \int_V (\delta f \nabla g - \delta g \nabla f) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) dV \quad (4.3.39)$$

第 1 項は発散定理より境界での表面積分に置き換わり、境界において $\delta f = 0, \delta g = 0$ であることからゼロになる。第 2 項がゼロになる条件は次のように書ける。

$$\nabla f \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0 \quad \text{かつ} \quad \nabla g \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0 \quad (4.3.40)$$

このとき、次式が成り立つ。

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = [(\nabla g \cdot (\nabla \times \mathbf{B}))\nabla f - [\nabla f \cdot (\nabla \times \mathbf{B})]\nabla g] = 0 \quad (4.3.41)$$

つまり、このときの磁場はフォースフリー磁場である。

4.3.3 テイラー-プラウドマンの定理と温度風平衡

地球外核では、コリオリ力に対する移流項の大きさを表すロスビー数が小さな値を取る。例えば、対流の空間スケールとして 100 km を採用すると、 $Ro \sim 10^{-5}$ と計算される (節 4.6.7)。また、粘性項もコリオリ項に対して小さい (エクマン数 $E \sim 10^{-15}$)。浮力項やローレンツ項もコリオリ項に対してやや小さいと考えられる (Wicht & Sanchez, 2019, Figure 10)。よって、運動方程式の中で、大まかにはコリオリ項と傾圧項が支配的だと近似できる。このような力のバランスによる流れを地衡流 (geostrophic flow) という。

地球外核はほとんど静水圧平衡 (節 4.3.1) かつ断熱温度勾配 (節 4.6.1) になっているとして、節 4.6.5 で説明している非弾性近似の下での運動方程式 (4.6.74) を考える。運動方程式に $\nabla \times$ を作用させて得られる渦度方程式 (節 3.2.6) は次のように書ける。ただし、粘性項は無視した。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) + 2\nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) \\ = -\nabla \times \left(\frac{\alpha T_{a1}}{c_p} \mathbf{g} \right) + \nabla \times \left[\frac{1}{\rho_a \mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right] \end{aligned} \quad (4.3.42)$$

$\boldsymbol{\Omega}$ は自転の角速度ベクトルであり、添え字 a は背景場、添え字 1 はそこからのずれを表す。上で述べたように、コリオリ項以外を無視し、節 4.6.6 で説明しているブシネスク近似における質量保存則 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ も用いると、次式を得る。

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0 \quad (4.3.43)$$

上式は、自転軸の方向に流れ場が一様であることを表す。これをテイラー-プラウドマンの定理という。外核ではこの定理が強く働いているため、対流は自転軸方向に長い柱状の様式であると考えられている (詳しくは Jones, 2015)。

太陽対流層の熱対流について、流速を 100 m s^{-1} (節 4.6.3)、空間スケールを 10^7 m とし、平均的な自転角速度として $\Omega_{\odot} = 2.7 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ を用いると、 Ro は 1 のオーダーになる。つまり、 $Ro \ll 1$ の領域とは言えない。一方で、太陽対流層には差動回転 (differential rotation) と呼ばれる流れも存在する^{†12}。流れ場を極座標の ϕ 方向で平均した自転速度は子午面内の各点で

^{†12} 差動回転については節 4.7.5 も参照されたい。

異なる。日震学によって観測に基づいて推定された差動回転の分布を図 4.11 に示す。赤道は $\Omega_{\odot}/(2\pi) = 430$ nHz より速く回転し、極は遅く回転している。つまり、 Ω_{\odot} で回転する座標系で見れば、赤道には地球でいう東向き、極には逆向きの平均流がある。

非弾性近似の下での渦度方程式 (4.3.42) の ϕ 成分に経度方向一周に渡る平均操作 $\langle \rangle$ を施すと、次のように書ける。ただし、系は平均的に定常とした^{†13}。

$$[\nabla \times \langle \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \rangle]_{\phi} - 2(\boldsymbol{\Omega}_{\odot} \cdot \nabla) \langle v_{\phi} \rangle = -\frac{g}{c_p r} \frac{\partial \langle s_1 \rangle}{\partial \theta} + \left[\nabla \times \left\langle \frac{1}{\rho_a \mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right\rangle \right]_{\phi} \quad (4.3.44)$$

この流れに対するロスビー数は、例えば次のように計算できる。

$$Ro_{DR} \sim \frac{0.8R_{\odot}(\Omega_{\text{赤道}} - \Omega_{\odot})}{2 \cdot 0.4R_{\odot} \cdot \Omega_{\odot}} \sim \frac{40}{430} \sim 0.09 \quad (4.3.45)$$

よって、慣性項に対してコリオリ項が卓越している。対流層の大部分ではローレンツ項の寄与も小さく、コリオリ項とエントロピー項がつりあっていると考えられている (e.g. Miesch, 2005; Hotta, 2018)。これを温度風平衡 (thermal wind balance) という。図 4.11 を見ると、差動回転の等値線は自転軸方向に対して傾いており、 $(\boldsymbol{\Omega}_{\odot} \cdot \nabla) \langle v_{\phi} \rangle < 0$ であることが分かる。つまり、 $\partial \langle s_1 \rangle / \partial \theta < 0$ であり、極が赤道に比べて温められている。 $s_1 \sim c_p T_1 / T_a$ (節 4.6.5 参照) とすると、赤道と極の温度差は次のように見積もられる。

$$\left| \frac{\partial \langle T_1 \rangle}{\partial \theta} \right| \frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi r \Omega_{\odot} |\partial \langle v_{\phi} \rangle / \partial z|}{g} T_a \quad (4.3.46)$$

図 4.11 の中緯度から $|\partial \langle v_{\phi} \rangle / \partial z| \sim 3 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ と見積もり、 $r \sim 0.9R_{\odot}$ 、 $T_a \sim 1 \times 10^6 \text{ K}$ 、 $g \sim 274 \text{ m s}^{-2}/0.9^2$ として計算すると、上式の値は 5 K となる。

4.4 波

4.5 不安定性

4.6 熱対流

重力の働いている系が上側から冷やされると、熱対流が発生する。実際に、太陽対流層では熱対流が起きており、太陽の差動回転や磁場の生成機構の理解のための重要な因子である。本節では、熱対流を扱う際によく用いられる諸々の手法を紹介する。

^{†13} 浮力項について、気体を想定して $\alpha = 1/T_a$ とした。

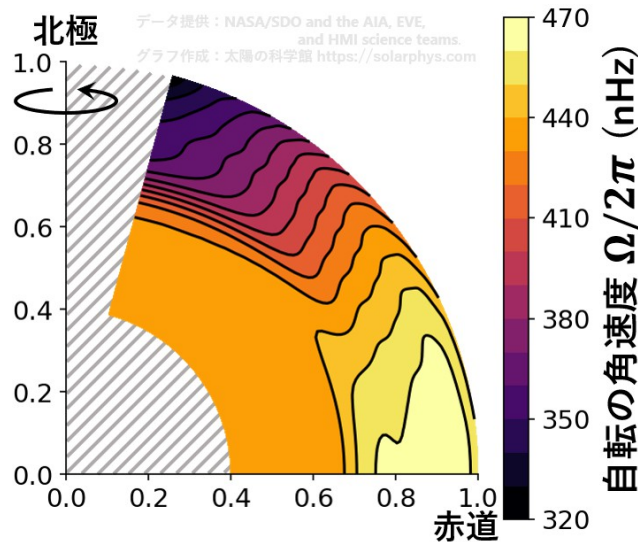


図 4.11 日震学によって観測に基づいて推定された太陽内部の差動回転の様子：データ提供 NASA/SDO and the AIA, EVE, and HMI science teams.

4.6.1 断熱温度勾配

z 軸負の向きに重力 g が働いている状況を考える。節 4.3.1 で静水圧平衡を説明したが、流体はいつでも厳密な力学的平衡 ($\mathbf{v} = 0$) を達成できるわけではない。条件が満たされない場合は対流が発生し、 $\mathbf{v} \neq 0$ の状態に向かう。対流が発生しない条件を考える (e.g. Landau & Lifshitz, 1987, §4)。

$z = z_0$ での圧力とエントロピーを p, s とし、 $z = z_0 + \delta z$ ($\delta z > 0$) での圧力とエントロピーを p', s' と書く。 δz は十分に小さく、次式が成り立つ。

$$s' - s \simeq \frac{ds}{dz} \delta z \tag{4.6.1}$$

内部の密度が一様とみなせる程度の大きさの、物質に固定された領域を考え、これをパーセル (parcel, blob) と呼ぶ。この考え方は熱対流を考える際によく用いられる。 $z = z_0$ の高さにあったパーセルが、何らかの要因で断熱的 ($Ds/Dt = 0$) に $z = z_0 + \delta z$ まで移動したとする。移動したパーセル内部の密度 $\rho(p', s)$ が周りの密度 $\rho(p', s')$ より大きい場合、パーセルには元の位置に戻ろうとする力が働くはずである。逆の場合はパーセルに正味の浮力が働いて、パーセルの変位は更に大きくなるであろう。つまり、熱伝導のような散逸現象を無視した場合、熱対流の起きない条件は次のように書ける^{†14}。

$$\rho(p', s') - \rho(p', s) \simeq \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dz} \delta z < 0 \tag{4.6.2}$$

^{†14} 散逸現象を考慮したうえで詳細な熱対流発生条件を考えるには、節??の考え方が用いられる。

付録 3.A.5 の知識を用いることで、上式は次のように書き換えられる。

$$\frac{\rho\alpha T}{c_p} \frac{ds}{dz} > 0 \quad (4.6.3)$$

c_p は定圧比熱、 α は熱膨張率である (付録 3.A.5 参照)。普通の流体では $\alpha > 0$ なので、次式を得る。

$$\frac{ds}{dz} > 0 \quad (4.6.4)$$

つまり、エントロピーが重力に逆行すると大きくなる場合には熱対流は起きない。

上の条件を温度勾配についての条件に焼き直す。エントロピーを T, p の関数と見て偏微分を計算することで、次式を得る。

$$\frac{ds}{dz} = \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz} - \frac{\alpha}{\rho} \frac{dp}{dz} \quad (4.6.5)$$

更に、静水圧平衡の関係 $dp/dz = -\rho g$ を用いると、対流が起きない条件は次のように書ける。

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{g\alpha T}{c_p} \quad (4.6.6)$$

上式はシュバルツシルトの判定条件 (Schwarzschild criterion) と呼ばれる。右辺は断熱温度勾配と呼ばれ、エントロピーの勾配がゼロのときの温度勾配である。重力の向きに温度勾配があり、その絶対値が断熱温度勾配の絶対値を超える場合に対流が起きる。高度を表す変数として z の代わりに圧力 $p(z)$ を用いることにすれば、上の条件は次のようにも書き換えられる。

$$\frac{d \ln T}{d \ln p} < \frac{p\alpha}{\rho c_p} \equiv \nabla_{\text{ad}} \quad (4.6.7)$$

恒星の内部構造の文脈では、しばしば ∇_{ad} が断熱温度勾配と呼ばれる。理想気体の場合は、比熱比を γ 、気体の平均分子質量を m として $c_p = \gamma k_B / [(\gamma - 1)m]$, $\alpha = 1/T$ なので、上の条件は次のようになる。

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{mg}{k_B} \quad \text{または} \quad \frac{d \ln T}{d \ln p} < \frac{\gamma - 1}{\gamma} \quad (4.6.8)$$

4.6.2 混合距離理論

恒星内部の熱対流の流速や運ばれるエネルギーフラックスを見積もるための理論に混合距離理論 (mixing length theory) がある (e.g. Hansen et al., 2004; Kippenhahn et al., 2012)。現在広く認知されている太陽の内部構造モデル (Christensen-Dalsgaard et al., 1996, Model S) では、対流層での熱対流のモデル化にこの理論が用いられている。この節は Kippenhahn et al. (2012) の Chapter 7 を参考にした。

節 4.6.1 のパーセルの考え方を再び用いる。熱対流をたくさんのパーセルの上下運動と捉える。上昇を始めたパーセルは距離 l だけ移動した後に周囲と混ざり合ってアイデンティティを失う。この l を混合距離 (mixing length) という。更に、次の 4 つの仮定を課す。

1. 熱対流の流速は音速よりも遅いため、パーセルは周囲と圧力平衡を保ちながら上昇する。
2. パーセル内の密度や温度の周囲との差は十分に小さい。
3. 上向きに運ばれるエネルギーフラックスにはエンタルピーフラックスと拡散近似を施した放射輸送によるフラックスを考える^{†15}。
4. パーセルの大きさは混合距離と同程度である。

問題設定

問題設定と分かっている量、求めたい量について整理する。まず、状態方程式が与えられれば既知となる 3 つの量を導入する。

$$c_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p, \quad \delta = - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p = -\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T, \quad \nabla_{\text{ad}} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right)_s \quad (4.6.9)$$

c_p は定圧比熱、 ∇_{ad} は断熱温度勾配と呼ばれる。 h は単位質量当たりのエンタルピー $h = e + p/\rho$ である。付録 3.A.5 の知識を用いると、これらの量の間には恒等的に次の関係があることが分かる。

$$\nabla_{\text{ad}} = \frac{p\delta}{\rho c_p T} \quad (4.6.10)$$

節 3.4.2 で説明しているような、電離度がサハの式によって決定される部分電離水素プラズマの場合、地道に偏微分を計算すると、これらの量は次のように表されることが分かる (e.g. Kippenhahn et al., 2012, §14.3)^{†16}。 x は電離度、 χ_{H} は水素のイオン化エネルギー、 m_p は陽子質量である。

$$c_p = \left[\frac{5}{2}(1+x) + \frac{1}{2}x(1-x^2)\Phi_{\text{H}}^2 \right] \frac{k_B}{m_p} \quad (4.6.11)$$

$$\delta = 1 + \frac{1}{2}x(1-x)\Phi_{\text{H}} \quad (4.6.12)$$

$$\nabla_{\text{ad}} = \frac{2+x(1-x)\Phi_{\text{H}}}{5+x(1-x)\Phi_{\text{H}}^2} \quad (4.6.13)$$

$$\text{ただし, } \Phi_{\text{H}} = \frac{5}{2} + \frac{\chi_{\text{H}}}{k_B T} \quad (4.6.14)$$

恒星中心からの距離 (半径) を r とし、圧力 $p(r)$ の分布は静水圧平衡に従っているとする。半径を r ではなく p によって表したときの温度勾配を

$$\nabla = \frac{d \ln T}{d \ln p} \quad (4.6.15)$$

^{†15} 全エネルギー保存則 (3.3.20) の $\nabla \cdot (\)$ の中身に注目する。散逸項と電磁場の項は小さいとして無視すると、運動エネルギーのフラックス $\rho v^2 \mathbf{v}/2$ 、エンタルピーフラックス $(\rho e + p)\mathbf{v}$ が残る。これらに加え、節 5.4.1 で説明している拡散近似を施した放射輸送によるフラックスも考慮する。混合距離理論では、運動エネルギーのフラックスの平均値が他の 2 つの平均値に比べて無視できると仮定する。

^{†16} ただし、放射圧 (節 5.1.6, 5.4.1 参照) は、太陽対流層においては無視できるほど小さいので考えていない。

と書くことにする。また、次の (圧力) スケールハイトを導入する。

$$H_p = -\frac{dr}{d \ln p} = \frac{p}{\rho g} \quad (4.6.16)$$

g は重力加速度である。

恒星の光度を L とすると、仮定 3 より、上向き (r が正の向き) に運ばれるエネルギーフラックスの平均値は次のように書ける。

$$F_{\text{conv}} + F_{\text{rad}} = \frac{L}{4\pi r^2} \quad (4.6.17)$$

ただし、エンタルピーフラックスを F_{conv} と書いた。放射によるフラックス F_{rad} は、節 5.4.1 で説明しているように、

$$F_{\text{rad}} = \frac{16\sigma T^4}{3\rho\kappa H_p} \nabla \quad (4.6.18)$$

と書ける。ただし、 σ はシュテファン-ボルツマン定数、 κ はロスランド平均不透明度である。

さて、状態方程式や光度 L のような系の基本情報に加え、注目する半径 r における g, p, T, ρ, κ や混合距離 l の値が与えられたときに、実現する温度勾配 ∇ や熱対流の流速 v 、エンタルピーフラックス F_{conv} の平均的な大きさを見積もるのが混合距離理論の役割である。

エネルギー輸送に関する考察

まず、パーセル内部の温度 T_i と周囲の温度 T の平均的な差 $\Delta T = \langle T_i - T \rangle$ を見積もる。パーセルは周囲と等温の状態から上昇を始め、上昇する過程で差が生まれると考える。以下、上昇するパーセルに注目するが、下降するパーセルに関しても並列の議論が行える。平均として $l/2$ だけ上昇したパーセルを考えることで、次のように見積もられる。

$$\frac{\Delta T}{T} \sim \frac{1}{T} \frac{d}{dr} (T_i - T) \frac{l}{2} \quad (4.6.19)$$

$$= \left(\frac{d \ln T_i}{d \ln p} - \frac{d \ln T}{d \ln p} \right) \frac{d \ln p}{dr} \frac{l}{2} \quad (4.6.20)$$

$$= (\nabla - \nabla_i) \frac{l}{2H_p} \quad (4.6.21)$$

ただし、パーセル内部の温度勾配を ∇_i と書いた。これも、最後には求まっているべき量である。

次に、パーセル内の密度の周囲との平均的な差 $\Delta \rho$ を見積もる。仮定 1 と 2 より、次のように書ける。

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \sim \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \frac{\Delta T}{T} = -\delta \frac{\Delta T}{T} \quad (4.6.22)$$

これと式 (4.6.21) を用いると、単位質量あたりに働く浮力 f は次のように書ける。

$$f = -\frac{\Delta \rho}{\rho} g \sim g \delta (\nabla - \nabla_i) \frac{l}{2H_p} \quad (4.6.23)$$

この f による仕事 $1/2 \cdot f \cdot l/2$ の半分程度がパーセルの運動エネルギー $v^2/2$ に使われるとして、熱対流の流速 v を次のように見積もる。

$$v^2 \sim g\delta(\nabla - \nabla_i) \frac{l^2}{8H_p} \quad (4.6.24)$$

これより、再び仮定 1, 2 を用いることで、エンタルピーフラックスは次のように書ける。

$$F_{\text{conv}} \sim \rho c_p \Delta T v \quad (4.6.25)$$

$$\sim \rho c_p T \sqrt{g\delta} \frac{l^2}{4\sqrt{2}} H_p^{-3/2} (\nabla - \nabla_i)^{3/2} \quad (4.6.26)$$

パーセル内部の温度勾配 ∇_i についての関係式を求めるため、パーセルの熱収支を調べる。パーセル内部の状態量は一様であるとし、パーセルの表面積、体積、境界層の厚さのスケールをそれぞれ S, V, d とする。パーセル全体に渡る熱輸送の式は次のようになる。

$$V \rho T \frac{Ds_i}{Dt} = -S \cdot \frac{16\sigma T^3}{3\rho\kappa} \frac{\Delta T}{d} \equiv -SF_{\text{loss}} \quad (4.6.27)$$

F_{loss} は放射によってパーセルが失う熱量のフラックスであり、節 5.4.1 で説明しているフラックスにおいて、 ∇T の大きさを $\Delta T/d$ で見積もった。上式の左辺は次のように変形できる。

$$V \rho T \frac{Ds_i}{Dt} = V \rho T \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \cdot v \frac{dp}{dr} + V \rho T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \cdot v \frac{dT_i}{dr} \quad (4.6.28)$$

$$= V \delta v \frac{p}{H_p} - V \rho c_p v \frac{T \nabla_i}{H_p} \quad (4.6.29)$$

$$= \frac{V \rho c_p T v}{H_p} (\nabla_{\text{ad}} - \nabla_i) \quad (4.6.30)$$

ただし、1 段目では連鎖律を用い、ラグランジュ微分において $\partial/\partial t = 0$ とし、仮定 1 も用いた。3 段目への変形では式 (4.6.10) を用いた。因みに、放射輸送の時間スケールが熱対流のそれに比べて長い場合は、パーセルは断熱的に上昇すると考えられるが、確かに上式をゼロとすると $\nabla_i = \nabla_{\text{ad}}$ であることが分かる。上式と式 (4.6.21) を式 (4.6.27) に代入することで、次式を得る。

$$\frac{\nabla_i - \nabla_{\text{ad}}}{\nabla - \nabla_i} = \frac{24\sigma T^3}{\rho^2 \kappa c_p l v} \quad (4.6.31)$$

ただし、仮定 4 より $d = l/3, S = 4\pi l^2, V = 4\pi l^3/3$ とした。

解の分類

式 (4.6.17), (4.6.18), (4.6.26), (4.6.31) を連立させることで、未知数 $F_{\text{conv}}, F_{\text{rad}}, \nabla, \nabla_i$ を決定できる。実現している温度勾配 ∇ が断熱温度勾配 ∇_{ad} よりどれだけ急峻かの度合である超断熱率 (superadiabaticity)

$$w = \nabla - \nabla_{\text{ad}} \quad (4.6.32)$$

を導入し、式整理を行うと、 w に関する次の方程式が得られる。

$$\left[\sqrt{w + U^2} - U \right]^3 + \frac{8}{9}U(w - W) = 0 \quad (4.6.33)$$

$$\text{ただし, } U = \frac{12\sigma T^3}{\rho^2 \kappa c_p l^2} \sqrt{\frac{8H_p}{g\delta}} \quad (4.6.34)$$

$$W = \nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}} \quad (4.6.35)$$

$$\nabla_{\text{rad}} = \frac{3\rho\kappa H_p L}{64\pi\sigma r^2 T^4} \quad (4.6.36)$$

∇_{rad} は光度 L から要請されるエネルギーフラックスを全て放射輸送で運ぶと仮定した場合に必要な温度勾配である。無次元量 U, W によって解の特徴が決まる。解 w が決まれば、パーセル内部の超断熱率 $w_i = \nabla_i - \nabla_{\text{ad}}$ は

$$w_i = 2U^2 \left[\sqrt{1 + \frac{w}{U^2}} - 1 \right] \quad (4.6.37)$$

と計算でき、流速やエンタルピーフラックスは次式によって見積もられる。

$$v^2 \sim g\delta(w - w_i) \frac{l^2}{8H_p} \quad (4.6.38)$$

$$F_{\text{conv}} \sim \rho c_p T \sqrt{g\delta} \frac{l^2}{4\sqrt{2}} H_p^{-3/2} (w - w_i)^{3/2} \quad (4.6.39)$$

解 w の様子を図 4.12 に示した。 $\log U - \log W$ 平面上に色で示されている。図には $w - w_i$ の等値線を黒い実線で示した。白い点線で示されているのは、式 (4.6.31) の逆数として定義される次の量の等値線である。

$$\Gamma = \frac{\nabla - \nabla_i}{\nabla_i - \nabla_{\text{ad}}} \sim \frac{F_{\text{conv}}}{F_{\text{loss}}} \quad (4.6.40)$$

上式はパーセルが正味として上向きに運ぶ熱量と上昇の過程で失う熱量の比であり、熱対流のある種の効率を表す。図を見ると、 $\Gamma = 1$ を表す直線を境に 2 つのレジームに分かれている。右側 (低 Γ) では、 w の等値線が水平であることから分かるように、 $\nabla \simeq \nabla_{\text{rad}}$ であり、ほとんどの熱量が放射輸送によって運ばれる。左側 (高 Γ) では、 w と $w - w_i$ の等値線が一致していることから分かるように、 $\nabla_i \simeq \nabla_{\text{ad}}$ であり、放射による損失は無視できる。つまり、パーセルは断熱的に移動する。図には白い点線でヌッセルト数

$$Nu = \frac{F_{\text{conv}} + F_{\text{rad}}}{F_{\text{rad}}} \quad (4.6.41)$$

の等値線も示されている。ただし、理想気体を想定して $\nabla_{\text{ad}} = 0.4$ として計算した。高 Γ 領域では、熱対流と放射輸送の輸送量の割合は $W = \nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}}$ によって決まる。図には太陽対流層の大雑把な値も示されているが、高 Γ の領域に属している。

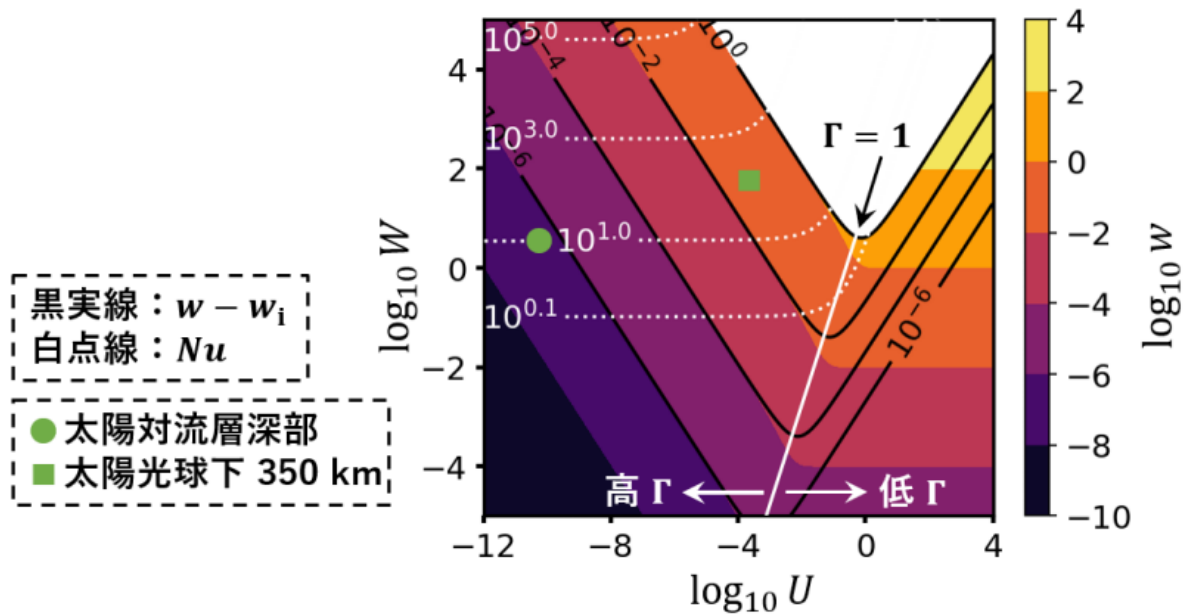


図 4.12 混合距離理論の解：カラーマップは超断熱率 $w = \nabla - \nabla_{\text{ad}}$ を表す。黒い実線は背景とパーセル内部の超断熱率の差 $(w - w_i)$ の等値線であり、白い点線はヌッセルト数 Nu の等値線である。白い実線は $\Gamma = 1$ (本文参照) を表す。 $(w - w_i) > 1$ の領域は仮定 2 に反するため、色をプロットしていない。Model S (Christensen-Dalsgaard et al., 1996) を入力して計算した太陽対流層深部 (0.8 - 0.9 太陽半径程度) と光球下 350 km での $\log U, \log W$ の値も示した。Model S では混合距離が $l = 1.99H_p$ と見積もられている。

4.6.3 [トピック] 太陽対流層の熱対流

太陽中心で核融合によって解放されたエネルギーは、その後表面に向かって運ばれることになる。太陽半径を R_\odot として $r < 0.71R_\odot$ の領域では主に放射輸送、外側の $0.71R_\odot < r < R_\odot$ の領域では熱対流によってエネルギーが運ばれている。前者を放射層、後者を対流層という。上で説明した量を用いると、放射層では $\nabla_{\text{rad}} < \nabla_{\text{ad}}$ であるために、 $\nabla = \nabla_{\text{rad}}$ が実現することで、放射輸送によって $L_\odot / (4\pi r^2)$ が運ばれる。 $\nabla < \nabla_{\text{ad}}$ なので熱対流は起きない。対して、対流層では $\nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}}$ なので、 $\nabla = \nabla_{\text{ad}} + w$ ($0 < w \ll 1$) が実現し、エネルギーのほとんどは熱対流のエンタルピーフラックスによって運ばれることになる。

本節では、混合距離理論による見積もりで対流での熱対流の様子を大雑把に把握してから、その結果を数値シミュレーションと比較し、シミュレーションが直面する問題について簡単に述べる。太陽対流層の熱対流や大規模流についてのレビューには Miesch (2005), Brun & Rempel (2009), Hanasoge et al. (2015), Schumacher & Sreenivasan (2020) がある。特に、粒状斑対流についてのレビューには Nordlund et al. (2009)、超粒状斑についてのレビューには Rincon & Rieutord (2018) がある。

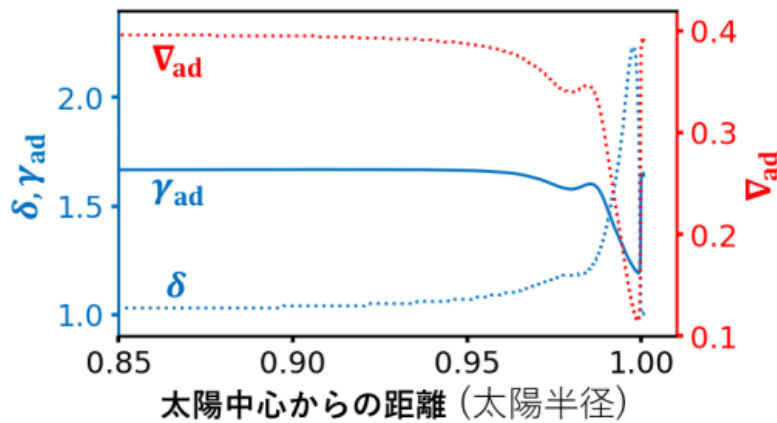


図 4.13 Model S (Christensen-Dalsgaard et al., 1996) で計算された太陽対流層での δ 、断熱指数 γ_{ad} 、断熱温度勾配 ∇_{ad} の値。Model S では $l = 1.99H_p$ とした混合距離理論によって、対流層の熱対流がモデル化されている。

混合距離理論による見積もり

太陽対流層は高 Γ ($\nabla_i = \nabla_{\text{ad}}$) の領域にあることを上で述べた。太陽対流層での各熱力学量の値を図 4.13 にまとめる。深部ではほとんど理想気体の値^{†17}だが、表面付近では部分電離の状態にあるために、電離度の自由度が加わって変動する。ただし、桁で変わることはない。ここではどの量も 1 のオーダーであるとする。混合距離 l はスケールハイト H_p のオーダーであると仮定する。周囲の圧力や密度が大きく変化すれば、パーセルは周囲と混合しながら折り返すことが期待される。これらの仮定の下で、式 (4.6.21), (4.6.22), (4.6.24), (4.6.26) は、1 のオーダーの因子を除いて次のように書ける。

$$\frac{|\Delta T|}{T} \sim \frac{|\Delta \rho|}{\rho} \sim w, \quad \frac{v}{c_s} \sim w^{1/2}, \quad \frac{F_{\text{conv}}}{\rho c_s^3} \sim w^{3/2} \quad (4.6.42)$$

ただし、音速 $c_s = \sqrt{\gamma_{\text{ad}} p / \rho} \sim \sqrt{p / \rho}$ を用いた。このように、熱対流に関する各量は超断熱率 w によってスケールリングされる。

例えば、太陽表面での値として、 $p = 8 \times 10^3 \text{ Pa}$, $\rho = 2 \times 10^{-4} \text{ kg m}^{-3}$ を用いると、音速は $c_s \sim 6 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$ と見積もられる。更に、太陽光度を観測値 $L_{\odot} = 3.85 \times 10^{26} \text{ W}$ として $F_{\text{conv}} = L_{\odot} / (4\pi R_{\odot}^2)$ を代入すると、 $w \sim 1$ と見積もられる。つまり、光球での熱対流 (粒状斑対流) では流速は音速に近い大きさであり、温度の擾乱も自身の絶対値に匹敵する大きさであることが予想される。実際に、光球では 1 km s^{-1} のオーダーの流れが観測され、粒状斑対流の数値計算からは、(深さにも依るが) $\Delta T \sim 4 \times 10^3 \text{ K}$ 程度であることが分かっている (e.g. Nordlund et al., 2009)^{†18}。因みに、表面付近の温度は $5 \times 10^3 - 10^4 \text{ K}$ 程度である。粒状斑対

^{†17} 比熱比を $\gamma \simeq 5/3$ として、 $\delta = 1, \gamma_{\text{ad}} = \gamma, \nabla_{\text{ad}} = (\gamma - 1)/\gamma$ である。

^{†18} 詳しくは参照した文献を読んで欲しいが、粒状斑対流の 3 次元数値計算は太陽表面付近の局所的な領域を想定し

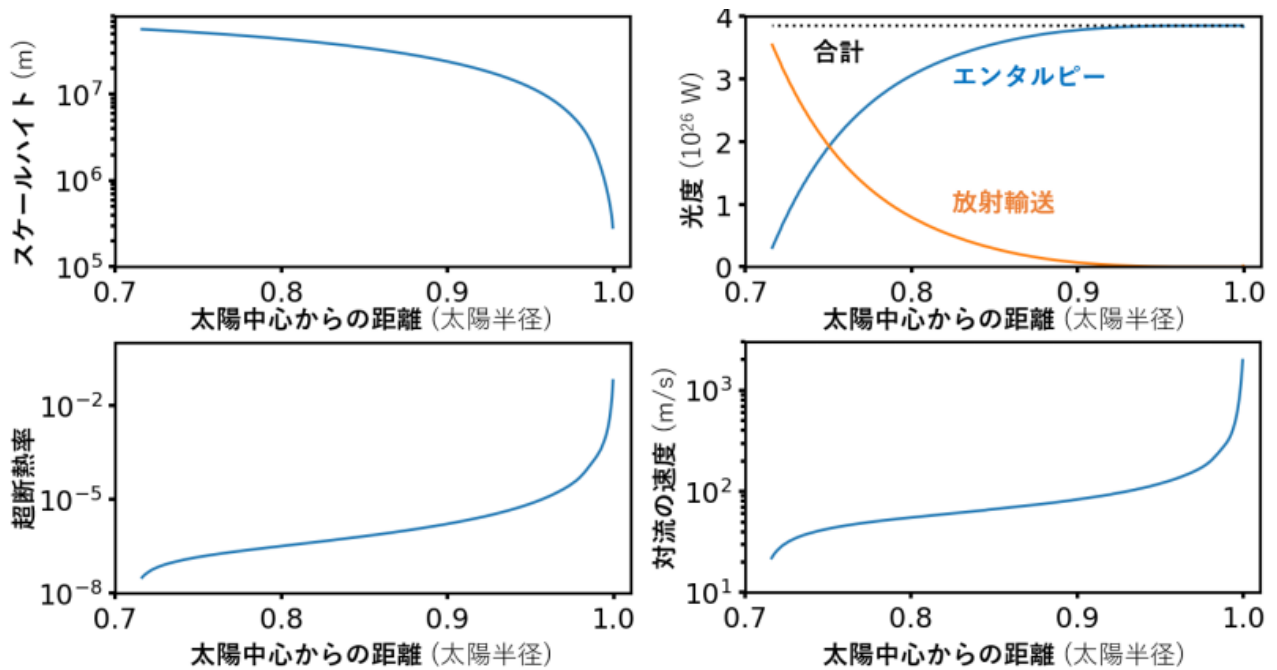


図 4.14 Model S (Christensen-Dalsgaard et al., 1996) のデータを基に計算された、太陽対流層でのスケールハイトと熱対流に関する量の分布。Model S では $l = 1.99H_p$ とした混合距離理論によって、対流層の熱対流がモデル化されている。

流は混合距離理論で課された仮定が満たされているのか怪しい領域であるが、その割には正しい見積もりができています。表面での重力加速度が 274 m s^{-2} であることを用いてスケールハイトを計算すると、 $H_p = p/(\rho g) \sim 1 \times 10^5 \text{ m}$ となるのに対し、観測される粒状斑の水平スケールは 10^6 m 程度である。

対流層内部ではスケールハイト H_p が大きくなるため、粒状斑よりも対流のスケールが大きいと考えられる。Model S (Christensen-Dalsgaard et al., 1996) のデータを基に $l = 1.99H_p$ とした計算された混合距離理論の結果を、スケールハイトの分布と共に図 4.14 に示す。スケールハイトの分布から、深部での熱対流の空間スケール^{†19}は $10^7 - 10^8 \text{ m}$ であることが予想される。深部での超断熱率 (従って温度擾乱の大きさ) は 10^{-7} のオーダーであり、対流の速度は $10 - 100 \text{ m s}^{-1}$ 程度であると見積もられる。対流速度は表面に近づくほど大きくなる。

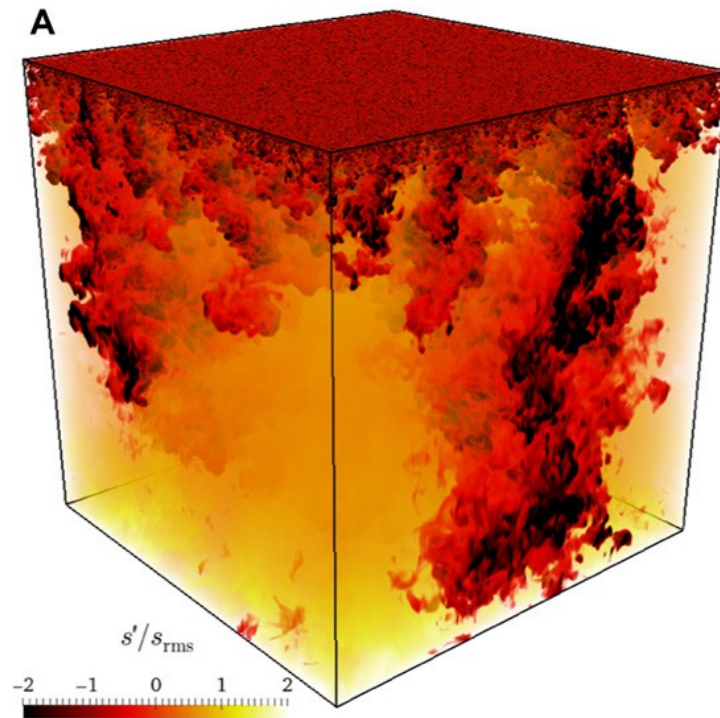


図 4.15 太陽対流層の 3 次元シミュレーション例：ある瞬間のエントロピーの擾乱が色で示されている。Hotta et al. (2019) の Fig. 1, A (licenced under CC BY-NC 4.0)。

3 次元シミュレーション

太陽対流層の数値計算は大きく、全球計算と局所計算に分類できる (具体例は Miesch, 2005; Hanasoge et al., 2015; Rincon & Rieutord, 2018, を参照)。全球計算では対流層全体を模した球殻状の領域で、多くは節 4.6.5 で説明する非弾性近似を施した方程式系が解かれる。局所計算では、例えば粒状斑対流を調べるために、表面付近を模した直方体領域で非弾性近似のような近似が施されていない方程式系が解かれる。表面に近づくほど対流の典型的なスケールが小さくなるので、より高解像の計算が必要になる。今のところ、全球計算では $r = 0.98R_{\odot}$ 程度に計算領域の上限が設定されている。ここでは、太陽対流層の深部から表面までの熱対流を包括的に再現した局所計算の例として Hotta et al. (2019) を紹介する。

Hotta et al. (2019) の計算結果のスナップショットを図 4.15 に示す。図ではエントロピーの擾乱が色で示されている。この計算では、対流層の底 ($r = 0.71R_{\odot}$) から表面の約 700 km 上空 ($r = 1.001R_{\odot}$) までを模した直方体の領域で、非弾性近似の考え方を発展させて開発された音速抑制法 (Hotta et al., 2012) を用いて方程式系が解かれている。放射輸送に関しては、深部

た箱の中で行われる。そのようなシミュレーション結果から求められる吸収線の形は、実際に観測される形を精度よく再現する。このことから、正しく粒状斑対流を再現できていると考えられている。

^{†19} 対流層は乱流状態にあるため、様々な空間スケールの渦が存在する (節 4.7.4 参照)。ここでいう熱対流のスケールとは、運動エネルギーの大部分を担っているスケールのことを指す。

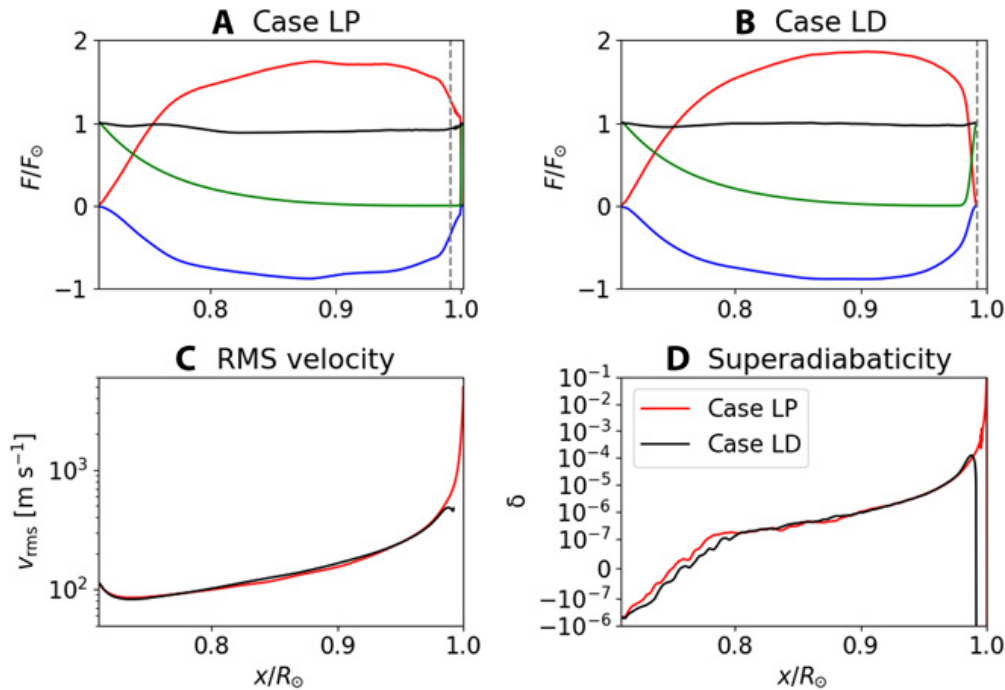


図 4.16 3次元シミュレーションによって再現された熱対流の性質：この研究では、 $r = 1.001R_{\odot}$ まで計算して粒状斑対流を再現した場合 (Case LP) と、計算領域の上限を $r = 0.992R_{\odot}$ に設定して、表面での放射冷却を模した人工的な冷却層を設置した場合 (Case LD) の計算結果を比較している。A, B はそれら 2 つの場合に運ばれるエネルギー量 ($4\pi r^2 F$) の平均的な内訳を表す。赤色がエンタルピーフラックス、緑色が放射輸送によるフラックス、青色が運動エネルギーのフラックス、黒色が合計値である。C は熱対流速度の大きさ、D は超断熱率の平均的な分布を表す。Hotta et al. (2019) の Fig. 3 (licenced under CC BY-NC 4.0)。

では拡散近似 (節 5.4.1) が用いられ、表面付近では (灰色近似を施した) 放射輸送方程式が数値的に解かれている。太陽自転と磁場は考慮されていない。

図 4.15 では、周囲より冷たく、下降流の存在する領域が黒く映っているが、表面から深部にいくほど、パーセルの空間スケールが大きくなっていることが分かる。表面では 10^6 m スケールの粒状斑対流が再現されており、深部では計算領域のスケール (10^8 m) のパーセルが見られる。これは、確かにスケールハイトの数倍である。

図 4.16 には計算で得られた熱対流の平均的な性質がまとめられている。詳しい読み方はキャプションを参照されたい。図の C, D を見ると、熱対流の速度と超断熱率のオーダーは混合距離理論の予想とそれほど変わらないことが分かる。しかし、数値計算では底付近 ($r < 0.75R_{\odot}$) に $w < 0$ の層が存在する。実際の対流層の底付近にも、上からの冷たい下降流に貫かれて対流しているが、局所的には断熱温度勾配を下回っているような層が存在すると考えられている。図の A にはエネルギー輸送の内訳が示されている。混合距離理論ではエンタルピーフラックスと

放射輸送のみを考慮したが、数値計算では運動エネルギーのフラックス ($\rho v^2 v/2$) が負の値を持っている (図の青色)。これは、激しい重力成層下での対流計算で典型的に見られる現象であり^{†20}、下降流が上昇流よりも高い密度を持つために起こる (e.g. Brun & Rempel, 2009)。それを補う分だけ、エンタルピーフラックスが合計値を上回っている。

数値計算が直面する問題

近年の対流層の数値計算は対流速度を過大評価しているのではないかという問題がある。詳しくは、O'Mara et al. (2016) の Introduction を読んで欲しい。例えば、太陽に似せた設定での全球計算ではしばしば、極が速くて赤道が遅く自転するような、太陽とは逆の差動回転が得られてしまう^{†21}。全球計算の結果はロスビー数 $Ro = V/(2L\Omega)$ (V は熱対流の典型的な速度、 L は熱対流の空間スケール、 Ω は自転の平均角速度) に依存して、次の 2 つのレジームに分かれることが知られている (e.g. Gastine et al., 2013)。

- $Ro \ll 1$ の場合、太陽と同じように、赤道が速い差動回転が得られる。
- $Ro \gtrsim 1$ の場合、太陽とは逆の、極が速い差動回転が得られる。

例えば、混合距離理論から見積もられる $r = 0.95R_{\odot}$ での値 $V \sim 120 \text{ m s}^{-1}$, $L \sim H_p \sim 1.2 \times 10^7 \text{ m}$ と太陽自転の値 $\Omega \sim 2.7 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$ を用いると、 $Ro \sim 1.8$ となる。対流層太陽に似せた設定での全球計算では、しばしば後者のレジームに陥ってしまう。これを回避するために、自転を速く設定したり、光度 L を実際より少なくして対流速度を人工的に抑えている研究もある (具体例は O'Mara et al., 2016, を参照)。

日震学^{†22}による対流層内部の対流速度の推定は、研究手法によって結果が異なってしまうのが現状である。実際の対流が数値計算で再現される対流速度より遅いことを示唆する日震学の推定結果もある (詳しくは例えば Hanasoge et al., 2016, 2020)。例えば Hanasoge et al. (2012) は $r \sim 0.96R_{\odot}$ での上限が 1 m s^{-1} 程度であると推定した。対して、Greer et al. (2015) は別の手法により、 $r \sim 0.96 - 0.97R_{\odot}$ で 120 m s^{-1} と見積もった。

^{†20} 対流層は、例えば $r = 0.8R_{\odot}$ での密度が $r = 0.99R_{\odot}$ の 280 倍、 $r = 0.98R_{\odot}$ の 60 倍と、激しい重力成層下にある。

^{†21} 太陽は 1 ヶ月弱で一回転の自転をしているが、赤道が極より速く回転している。この現象を差動回転 (differential rotation) という (節 4.7.5)。コリオリの力の影響で熱対流 (乱流) の統計的性質が変化することで、差動回転が駆動されると考えられている (節??)。

^{†22} 太陽表面で観測される振動の周波数を解析することで、太陽内部の情報を推定する研究手法を日震学 (helioseismology) という。

4.6.4 ブシネスク近似

音速より十分に遅い熱対流を調べるために、次の 2 つの仮定を課して方程式系を単純化する操作をブシネスク近似 (Boussinesq approximation) という (e.g. Braginsky & Roberts, 2007)。

1. 質量密度 ρ と温度 T は考える領域で空間的にはほぼ一様 ρ_0, T_0 である。
2. ρ_0, T_0 からのずれは十分に小さく、 ρ の擾乱は T の擾乱のみに依存し、 p への依存性は無視する。

次の基礎方程式にブシネスク近似を施す。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.6.43)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mathbf{F}^\nu \quad (4.6.44)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \Phi \quad (4.6.45)$$

ただし、粘性項と粘性散逸の項はそれぞれ \mathbf{F}^ν, Φ と書いた。これらの項は近似操作に関与しないので、対象の系に応じて適宜書き換えればよい。各状態量を一様な背景場 (添え字 0) とそこからずれ (添え字 1) に分ける。

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad T = T_0 + T_1 \quad (4.6.46)$$

$$p = p_0 + p_1 = p_0 - \rho_0 \phi_g + \rho_0 \pi_1, \quad s = s_0 + s_1 \quad (4.6.47)$$

ただし、 p の擾乱 p_1 は重力成層による成分 $-\rho_0 \phi_g$ と対流による成分 $\rho_0 \pi_1$ に分ける。 ϕ_g は重力ポテンシャル ($\mathbf{g} = -\nabla \phi_g$) である。

各擾乱が十分に小さいとして線形化した状態方程式 (節 3.4.7 参照) は次のように書ける。

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \chi_T p_1 - \alpha T_1 \quad (4.6.48)$$

χ_T は等温圧縮率、 α は熱膨張率である (付録 3.A.5 参照)。つまり、 ρ_1 を T_1, p_1 の関数と見たとき、 T_1 による変化の大きさ $\delta \rho_T$ は次のように見積もられる。

$$\frac{\delta \rho_T}{\rho_0} \sim \alpha \delta T \equiv \varepsilon_T \quad (4.6.49)$$

δT は T_1 の典型的な大きさである。一方で、 ρ_1 の p_1 による成分の大きさ $\delta \rho_p$ は次のように見積もられる。

$$\frac{\delta \rho_p}{\rho_0} \sim \chi_T p_1 \quad (4.6.50)$$

$$\sim \frac{\phi_g}{c_s^2} \quad (4.6.51)$$

$$\sim \frac{H}{c_s^2/g_0} \equiv \varepsilon_a \quad (4.6.52)$$

ただし、2 段目では、等温圧縮率 χ_T と断熱圧縮率 χ_s のオーダーが同じであることを用い^{†23}、音速 $c_s = 1/\sqrt{\rho_0\chi_s}$ を用いて書き替えた。また、 p_1 の中では重力成層による成分が対流による成分よりも大きいとして見積もった。3 段目では、系の鉛直方向の空間スケール H を導入して $\phi_g \sim g_0 H$ と見積もった。 g_0 は重力加速度のスケールであり、分母の c_s^2/g_0 は密度スケールハイトと呼ばれる。上で述べた 2 番目の仮定は次のように書ける^{†24}。

$$\varepsilon_a \ll \varepsilon_T \ll 1 \tag{4.6.53}$$

例えば、理想気体の場合は $\alpha = 1/T$ なので、 ε_T とは $\delta T/T_0$ のことである。鉛直方向に十分に薄い系を考える場合は、 H が小さいために、上式が成り立つことが期待される。この仮定の下で、式 (4.6.48) は次のように表される。

$$\rho_1 \simeq -\rho_0\alpha T_1 \tag{4.6.54}$$

上の仮定の下で、 $T_0 s_1$ という量は次のように近似できる。

$$T_0 s_1 = c_p T_1 - \frac{\alpha T_0}{\rho_0} p_1 \tag{4.6.55}$$

$$= c_p T_1 \left[1 + \alpha T_0 \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_T}\right) \right] \tag{4.6.56}$$

$$\simeq c_p T_1 \tag{4.6.57}$$

c_p は定圧比熱であり、 $\mathcal{O}(\varepsilon)$ は最大でも ε のオーダーであるという意味で用いる。更に、熱力学第 1 法則と式 (4.6.54), (4.6.57) を用いることで、内部エネルギーの擾乱は次のように書ける。

$$e_1 = T_0 s_1 + \frac{p_0}{\rho_0^2} \rho_1 \tag{4.6.58}$$

$$\simeq \left(c_p - \frac{\alpha p_0}{\rho_0} \right) T_1 \tag{4.6.59}$$

式 (4.6.43) の第 1 項と第 2 項の比は次のように見積もられる。

$$\frac{\text{第 1 項}}{\text{第 2 項}} \sim \frac{\rho_1}{\rho_0} \sim \varepsilon_T \ll 1 \tag{4.6.60}$$

よって、第 2 項の ρ_0 に関する部分のみを残すことで、質量保存則は次のようになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{4.6.61}$$

^{†23} 例えば、理想気体では比熱比を γ (典型的には $\gamma \simeq 5/3$) として $\chi_s = \chi_T/\gamma$ である。

^{†24} 例えば、地球の外核では、 $\alpha \sim 1.5 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $\delta T \sim 1500 \text{ K}$, $c_s \sim 9 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$, $g \sim 8 \text{ m s}^{-2}$, $H \sim 2 \times 10^6 \text{ m}$ (Jones, 2015) を用いれば、 $\varepsilon_T \sim 0.02$, $\varepsilon_a \sim 0.2$ と見積もられ、式 (4.6.53) の条件は満たさない。外核の数値計算で度々用いられる「ブシネスク方程式系」は、本節の近似が施されたものではなく、節 4.6.6 で説明する、いわゆる一般化されたブシネスク近似である。

つまり、非圧縮の流体と同じ式に従う。運動量保存則については、式 (4.6.44) の ρ, p を背景場と擾乱に分け、式 (4.6.54) を代入して、オーダーの小さい項を無視することで、次式のように書ける。

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla\pi_1 - \alpha T_1 \mathbf{g} + \frac{\mathbf{F}^\nu}{\rho_0} \quad (4.6.62)$$

これは、 T_1 に比例する浮力項を除いて ρ を定数 ρ_0 と考えた式である。エネルギー保存則については、式 (4.6.45) に式 (4.6.59) を代入することで、次式のように書ける。

$$\rho_0 \left(c_p - \frac{\alpha p_0}{\rho_0} \right) \frac{DT_1}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi \quad (4.6.63)$$

4.6.5 非弾性近似

一般的な非弾性近似

パーセルが断熱的に移動するとみなせるような効率の良い熱対流の場合、熱対流はエントロピーを一様にしようとする現象であると解釈できる。実際に、太陽対流層での超断熱率は表面付近を除いて 1 よりずっと小さなオーダーであると考えられる (図 4.16)。節 4.6.3 で見積もったように、そのような対流での各状態量の対流による擾乱は、超断熱率と同様に 1 よりずっと小さなオーダーである。このように、超断熱率が小さく、従って対流速度が音速に比べて十分に小さいような熱対流を調べる際は、エントロピーが一様な (adiabatic, isentropic, well-mixed) 状態を基準状態にとり、各状態量を基準状態とそこからの擾乱に分けて表すと便利である。そのように表したうえで、擾乱が小さいとして微量を無視する操作を非弾性近似 (anelastic approximation) という (e.g. Miesch, 2005; Braginsky & Roberts, 2007)。

エントロピー一様な静水圧平衡状態を添え字 a で表す。ここでは自己重力は無視し、重力加速度 \mathbf{g} は静的に与えられたものとする。自己重力を考慮した議論は Braginsky & Roberts (1995) を読んで欲しい。

$$\nabla p_a = \rho_a \mathbf{g} \quad (4.6.64)$$

$$\nabla s_a = 0 \quad (4.6.65)$$

ρ_a, T_a の勾配は次のように書ける。

$$\nabla \rho_a = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \nabla p_a = \frac{\rho_a}{c_s^2} \mathbf{g} \quad (4.6.66)$$

$$\nabla T_a = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \nabla p_a = \frac{\alpha T_a}{c_p} \mathbf{g} \quad (4.6.67)$$

α は熱膨張率、 c_p は定圧比熱、 $c_s = \sqrt{\tilde{\gamma} c_p / \alpha}$ は音速である (付録 3.A.5)。各状態量を基準状態 (添え字 a) とそこからの微小擾乱 (添え字 1) に分ける。

$$\rho = \rho_a + \rho_1, \quad p = p_a + p_1, \quad s = s_a + s_1, \quad T = T_a + T_1, \dots \quad (4.6.68)$$

質量保存則 (4.6.43) に上式の形を代入すると、次のようになる。

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_a \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}) = 0 \quad (4.6.69)$$

第 1 項と第 3 項は第 2 項に比べて小さいので無視すると、次式を得る。

$$\nabla \cdot (\rho_a \mathbf{v}) = 0 \quad (4.6.70)$$

運動量保存則 (4.6.44) については、左辺のラグランジュ微分に ρ_1 が係る項は ρ_a が係る項に比べて小さいので無視する。左辺は基準状態の性質 (4.6.64) を代入して添え字 a の項を除去する。すると、次式を得る。

$$\rho_a \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p_1 + \rho_1 \mathbf{g} + \mathbf{F}^\nu \quad (4.6.71)$$

浮力を陽に表すために、状態方程式の線形化を行う (節 3.4.7)。 ρ を p, s の関数として表すことにすれば、重力項は次のように書き換えられる。

$$\rho_1 \mathbf{g} = \frac{p_1}{c_s^2} \mathbf{g} - \frac{\rho_a \alpha T_a s_1}{c_p} \mathbf{g} \quad (4.6.72)$$

$$= \frac{p_1}{\rho_a} \nabla \rho_a - \frac{\rho_a \alpha T_a s_1}{c_p} \mathbf{g} \quad (4.6.73)$$

ただし、式 (4.6.66) を代入した。上式を式 (4.6.71) に代入すると、上式の第 1 項と傾圧項にライプニッツ則が適用でき、運動方程式は次のように書ける。

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla \left(\frac{p_1}{\rho_a} \right) - \frac{\alpha T_a s_1}{c_p} \mathbf{g} + \frac{\mathbf{F}^\nu}{\rho_a} \quad (4.6.74)$$

熱輸送の式 (3.4.56) は、左辺において $Ds_a/Dt = 0$ を用い、擾乱を基準状態に対して無視することで、次のように書ける。

$$\rho_a T_a \frac{Ds_1}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi \quad (4.6.75)$$

ただし、ジュール散逸などは系に応じて適宜加えればよい。 $\partial T_a / \partial t = 0$ と式 (4.6.67) を用いることで、上式は次のようにも書ける。

$$\rho_a \frac{D}{Dt} (T_a s_1) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho_a \frac{\alpha T_a s_1}{c_p} \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \Phi \quad (4.6.76)$$

式 (4.6.74) に $\rho_a \mathbf{v} \cdot$ を作用させたものと上式を足し合わせることで、非弾性近似における全エネルギー保存則が得られる。上式の右辺第 2 項と浮力項が相殺し、最終的に次のように書ける。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_a v^2 + \rho_a T_a s_1 \right) + \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} \rho_a v^2 \mathbf{v} + (\rho_a T_a s_1 + p_1) \mathbf{v} - \boldsymbol{\tau}^\nu \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q} \right] = 0 \quad (4.6.77)$$

τ_{ij}^ν は粘性応力である^{†25}。

^{†25} 粘性力は粘性応力 τ_{ij}^ν を用いて $F_i^\nu = \partial \tau_{ij}^\nu / \partial x_j$ と表され、散逸関数は $\Phi \equiv \tau_{ij}^\nu \partial v_i / \partial x_j$ という定義である。

質量保存則 (4.6.70)、運動方程式 (4.6.74)、熱輸送の式 (4.6.75) と散逸項の適当な閉包則を与えれば方程式系は閉じ、未知変数 \mathbf{v}, p_1, s_1 が求まる。質量保存則に時間微分項が現れないことは、方程式系が音波 (弾性波) の解を持たないことを意味する。対流速度が音速に比べて小さいので、音波的な擾乱の伝達は対流のダイナミクスに影響を与えないとして除去されている。これが非弾性近似の名前の由来である。閉包則に T_1 が必要な場合は、状態方程式

$$T_1 = \frac{\alpha T_a}{\rho_a c_p} p_1 + \frac{T_a}{c_p} s_1 \quad (4.6.78)$$

より計算される。具体的に方程式系を数値計算 (節 1.5.4) する際には、例えば次の方針が取られる (e.g. Glatzmaier, 1984)。質量保存則を書き換えて式 (4.6.66) を用い、両辺の時間微分を取ること、次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{\mathbf{g}}{c_s^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0 \quad (4.6.79)$$

これに運動方程式とその両辺の発散を取った式を代入すれば、時間微分を含まない、 p_1 に関する 2 階の微分方程式が得られる。運動方程式と熱輸送の式によって次の時間ステップでの \mathbf{v}, s_1 を計算し、得られた \mathbf{v}, s_1 を用いて p_1 に関する微分方程式を解く。

非弾性液体近似

特に、地球外核を考える場合は、 s_1 の代わりに T_1 を用いても、同様の形式の方程式系を構成できる。線形化した状態方程式を用いると、 $T_a s_1$ は次のように表される。

$$T_a s_1 = c_p T_1 \left[1 + \frac{\alpha T_a p_1}{\rho_a c_p T_1} \right] \quad (4.6.80)$$

上式の第 2 項が小さいオーダーであることを示す。運動方程式において、傾圧力が浮力の X 倍程度であるとする。

$$\frac{p_1}{\rho_a H_c} \sim X \frac{\alpha T_a s_1}{c_p} g_0 \sim X \alpha T_1 g_0 \quad (4.6.81)$$

H_c は対流の縦方向の空間スケールであり、 g_0 は重力加速度のスケールである。2 番目のスケリングでは式 (4.6.80) を用いて $T_a s_1 \sim c_p T_1$ とした。上式とグリユナイゼン定数 $\tilde{\gamma} = \alpha c_s^2 / c_p$ 、 $\varepsilon_c = H_c g_0 / c_s^2$ を用いると、式 (4.6.80) は次のように書ける。

$$T_a s_1 = c_p T_1 [1 + O(X \alpha T_a \varepsilon_c \tilde{\gamma})] \quad (4.6.82)$$

液体の場合、典型的には $\alpha T_a \ll 1$ が成り立つ。実際に、地球外核では $\alpha \sim 1.5 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ 、 $T \sim 5000 \text{ K}$ とすれば、 $\alpha T \sim 7.5 \times 10^{-2}$ である。また、 $\tilde{\gamma} \sim 1.5$ である。 H_c の見積もりは難しいが、上から評価すると $H_c < d$ (d は外核の幅) である。つまり、243 ページの脚注の結果も用いて、 $\varepsilon_c < 0.2$ である。よって、十分条件として $X \ll 40$ ならば、上式の第 2 項を無視できる^{†26}。

^{†26} 現在のところの地球ダイナモシミュレーション (エクマン数 $E \sim 10^{-7}$) では、 X が 10 に満たないような解が得られている (Wicht & Sanchez, 2019, の Figure 10 を参照)。

つまり、浮力項や熱輸送の式 (4.6.76) において $T_a s_1$ を $c_p T_1$ に置き換えた方程式系が成り立つ。例えば、Braginsky & Roberts (2007) の “temperature-based anelastic approximation” や Anufriev et al. (2005) の “anelastic liquid approximation” がこれに相当する。

4.6.6 一般化されたブシネスク近似

地球外核の数値計算では非弾性近似が用いられるが、外核の密度は重力成層によって 20 % 程度しか変化しない (Dziewonski & Anderson, 1981)。そこで、問題の単純化や数値計算量の節約のような利点を取って、密度が一樣と近似されることがある。これは、非弾性近似において $\varepsilon_a \equiv dg_0/c_s^2 \rightarrow 0$ (d は外核の幅) の極限を考えることに対応し、一般化されたブシネスク近似と呼ばれる (Braginsky & Roberts, 2007, generalized Boussinesq approximation)。Braginsky & Roberts (1995) の “homogeneous model” や Jones (2015) の “Boussinesq limit” もこの近似に相当する。

前節で説明した非弾性液体近似のブシネスク的極限を考える。式 (4.6.66), (4.6.67) より、次のようにスケーリングできる。

$$\frac{d\nabla\rho_a}{\rho_a} \sim \varepsilon_a, \quad \frac{d\nabla T_a}{T_a} \sim \tilde{\gamma}\varepsilon_a \quad (4.6.83)$$

よって、 $\varepsilon_a \rightarrow 0$ の極限を考えることは、 ρ_a, T_a が領域内で一樣 ρ_0, T_0 であると考えことに相当する。運動方程式と熱輸送の式は次のように書ける。

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{\nabla p_1}{\rho_0} - \alpha T_1 \mathbf{g} + \frac{\mathbf{F}^\nu}{\rho_0} \quad (4.6.84)$$

$$\rho_0 c_p \frac{DT_1}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho_0 \alpha T_1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \Phi \quad (4.6.85)$$

普通のブシネスク近似との違いは、熱流束として背景場による輸送 (∇T_a による輸送) も考えることである。熱輸送の式の右辺第 2 項は、 $\varepsilon_a \ll 1$ の場合には左辺に対して小さい。このことは、ブシネスク的極限において、対流の運動エネルギーが内部エネルギーの擾乱に比べて小さいことに対応する。全エネルギー保存則が見かけ上成立するように、ここではこの項と粘性散逸項を敢えて残した。

質量保存則 (4.6.70) は、式 (4.6.66) を用いることで、次のようにスケーリングできる。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \left[1 + \mathcal{O} \left(\varepsilon_a \frac{H_c}{d} \right) \right] = 0 \quad (4.6.86)$$

H_c は対流の空間スケールである。 $\varepsilon_a \rightarrow 0$ の極限では次式を得る。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.6.87)$$

つまり、普通のブシネスク近似と同様の質量保存則が得られる。この節で説明しているブシネスク的極限は、普通のブシネスク近似で課されている式 (4.6.53) のうちの $\varepsilon_a \ll \varepsilon_T$ という部分の仮定を課していない。このことから、一般化されたブシネスク近似と呼ばれる。

実際の数値計算においては、前節で述べたように、運動方程式の発散を取って $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ とした式を用いて p_1 を求める方針が取られる (e.g. Christensen & Wicht, 2015)。あるいは、運動方程式の回転を取って p_1 を除去した式 (渦度方程式) を数値的に解くような計算コードもある (e.g. Matsui et al., 2014)。

4.6.7 [トピック] 地球外核の対流

地球の外核は鉄を主成分とし、質量にして 5 – 10 % 程度の軽元素 (Si, S, O) を含んでいると考えられている (詳しくは 市川浩樹 & 土屋卓久, 2018)^{†27}。地球は外側から冷やされ、内側に行くほど温度が高くなっている。外核では熱対流が起きている可能性がある。内核は冷却と共に成長しており、外核の液体が内核との境界で凝結する際に軽元素を放出する。このため、組成による密度差を駆動源とする対流も起きていると考えられている。これを熱対流 (thermal convection) に対して組成対流 (compositional convection) という。地磁気の成因として最有力な説は地球ダイナモ (e.g. Roberts & King, 2013; Wicht & Sanchez, 2019) であるが、このことから外核での対流の存在が強く期待される。

この節では、外核の熱対流の状態を把握するために、外核の熱収支の見積もりを行った後に、対流の駆動源と、大雑把なスケールについての考察をする。外核の熱収支についてのレビューには Nimmo (2015) がある。外核の対流に関するレビューには Jones (2015), Wicht & Sanchez (2019) がある。

核全体の熱収支

内核と外核を合わせた全体の領域の熱収支を考え、地球外核で対流やそれに伴うダイナモ機構が発生し得るのかを見積もる。この節の議論は Nimmo (2015) を参考にした。これは、Gubbins et al. (2003, 2004) の議論を基盤にしたものである。

全エネルギー保存則 (節 3.3.4) を外核-マントル境界 (core-mantle boundary, CMB) 内の領域で積分したものを考える。その際に、次の操作を施す。

- 重力による仕事と内核の成長に伴う潜熱の解放、放射性物質の崩壊による加熱を考慮

^{†27} 例えば、Alfè et al. (2002) は、第一原理計算と地震波観測による制約から、Si と S が原子数にして 10 % 程度、O が 8 % 程度含まれると推定した。内核と外核の境界では、内核が外核よりも 4.5 % ほど高密度であることが地震波観測により分かっている (密度ジャンプ)。これは純粋な鉄の場合より大きな値である。核の高温高压下では、Si と S は液体鉄に少しだけ濃集し、O は大きく濃集する性質があるため、それぞれの含有率によって密度ジャンプの大きさが変化する。つまり、第一原理計算により化学ポテンシャルが求められれば、密度ジャンプの制約から含有率が推定される。

する。

- 運動エネルギーや磁場のエネルギーは内部エネルギーに比べて小さいので、無視する。
- マントルは絶縁体で、CMB で粘性応力はゼロになるという条件を課す。つまり、CMB では $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ フラックスと粘性応力によるフラックスは無い。
- 核は冷却と共に収縮する。この収縮の速度 (流速の平均値) を $\bar{\mathbf{v}}$ と書く。CMB での流速は $\bar{\mathbf{v}}$ に一致する。
- 核に固定されて収縮する領域での積分を考えるため、総量の時間微分はレイノルズの輸送定理 (1.5.3) に従って計算される。

これにより、保存則は次のようになる。

$$\frac{d}{dt} \int_{\text{核}} \rho e dV + \int_{\text{CMB}} p \bar{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{CMB}} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S} = - \int_{\text{核}} \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \phi_g dV + Q_{\text{潜}} + Q_{\text{崩}} \quad (4.6.88)$$

ϕ_g は重力ポテンシャル、 $Q_{\text{潜}}$ は潜熱の解放、 $Q_{\text{崩}}$ は放射性物質の崩壊による加熱を表す項である。上式を、対流のスケールより十分に長く、進化のスケールより十分に短い時間で平均する。具体的には、次のように考える。平均した量には上横線を付けるべきだが、見にくいので、 $\bar{\mathbf{v}}$ を除いて省略する。見積もりの右辺に登場する状態量は平均値を表すと考えて欲しい。

- 密度と圧力の平均値について、静水圧平衡が成り立つ。

$$\nabla p = -\rho \nabla \phi_g \quad (4.6.89)$$

- 内部エネルギーの総量の時間微分は次式のように見積もる。

$$\overline{\frac{d}{dt} \int_{\text{核}} \rho e dV} = \int_{\text{核}} \rho \frac{De}{Dt} dV = \int_{\text{核}} \rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla e \right) dV \quad (4.6.90)$$

更に、熱力学第一法則 (節 3.A.2) を用いて s と ρ の微分に変換し、節 3.A.5 の知識を用いて s の微分を T, p, ξ の微分に変換すると、次式を得る。 ξ は軽元素の含有率 (組成) である (節 3.4.8)^{†28}。

$$\begin{aligned} \overline{\frac{d}{dt} \int_{\text{核}} \rho e dV} &= \int_{\text{核}} \rho c_p \frac{DT}{Dt} dV - \int_{\text{核}} \alpha T \frac{Dp}{Dt} dV \\ &\quad + \int_{\text{核}} \rho \left[\mu - T \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{p, \xi} \right] \frac{D\xi}{Dt} dV - \int_{\text{核}} p \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} dV \end{aligned} \quad (4.6.91)$$

^{†28} ギブスの自由エネルギーについてのマクスウェルの関係式

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{p, \xi} = - \left(\frac{\partial s}{\partial \xi} \right)_{p, T}$$

も用いる。

詳しくは Gubbins et al. (2003) で見積もられているが、上式の Dp/Dt の項は DT/Dt の項に比べて小さいため、無視される。外核における $D\xi/Dt$ について、外核が内核との境界 (ICB) で凝結する際、軽元素は全て外核側に放出され、組成対流によって即座に外核全体に分配されて組成はほとんど一様になると考える。すると、内核の半径 R_{ICB} の成長速度を用いて次のように見積もられる。

$$\frac{D\xi}{Dt} = \frac{4\pi R_{\text{ICB}}^2 \rho_{\text{ICB}} \xi}{M_{\text{外核}}} \frac{dR_{\text{ICB}}}{dt} \quad (4.6.92)$$

$M_{\text{外核}}$ は外核の総質量である。この考え方によると、内核での ξ はゼロということになる。式 (4.6.91) の $D\xi/Dt$ に関する項は、内核の成長に伴って外核内部の組成が増える効果と、ICB での凝結の際に内核の組成がゼロになる効果に分けることができるが、 $R_{\text{H}} = \mu - T(\partial\mu/\partial T)_{p,\xi}$ が定数であるとすれば、次式のように両者は相殺してゼロになる。定数でなかったとしても、寄与は小さい。

$$\int_{\text{核}} \rho R_{\text{H}} \frac{D\xi}{Dt} dV = \int_{\text{外核}} \rho R_{\text{H}} \frac{D\xi}{Dt} dV - \rho_{\text{ICB}} R_{\text{H}} 4\pi R_{\text{ICB}}^2 \xi \frac{dR_{\text{ICB}}}{dt} \quad (4.6.93)$$

$$= 0 \quad (4.6.94)$$

ただし、式 (4.6.92) を用いる。結局、式 (4.6.91) は第 1 項と第 4 項のみが残る。第 1 項 (DT/Dt に依存する項) に負号を付けたものを永年冷却の項 $Q_{\text{冷}}$ と書くことにする。

$$Q_{\text{冷}} \equiv - \int_{\text{核}} \rho c_p \frac{DT}{Dt} dV \quad (4.6.95)$$

- マントルの進化が核の重力に及ぼす影響は無視する。つまり、マントルは球対称の密度を持つため、核の領域には重力場を作らず、核との間で物質のやり取りもしないと考える。すると、まるで CMB の外側が真空であるかのようにして、核内部のみで完結した自己重力エネルギー (節 3.3.6) を考えることができる。軽元素の濃集を考えない場合、重力項の平均は、静水圧平衡の関係を用いて次のように見積もられる。

$$- \int_{\text{核}} \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \phi_g dV = \int_{\text{核}} \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla p dV \quad (4.6.96)$$

実際には内核の成長に伴い、外核に軽元素が濃集している。このため、外核の軽元素が増えた分だけ、重力エネルギーが解放されている。上式に加えてこの効果を考慮する必要がある。具体的には、重力エネルギーの表式 (3.3.39) において、組成の変化に伴う時間

変化のみを考慮することで、次のように見積もられる。

$$\left(- \int_{\text{核}} \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \phi_g dV \right)_{\text{濃集}} = - \int \phi_g \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{p,T} dV \quad (4.6.97)$$

$$= - \int_{\text{核}} \phi_g \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)_{p,T} \frac{D\xi}{Dt} dV \quad (4.6.98)$$

$$= \int_{\text{外核}} \rho \phi_g \alpha_T^\xi \frac{D\xi}{Dt} dV \equiv Q_{\text{重}} \quad (4.6.99)$$

$$\text{ただし, } \alpha_T^\xi \equiv - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)_{p,T} \simeq \frac{\Delta \rho_{\text{ICB}}}{\rho_{\text{ICB}} \xi} \quad (4.6.100)$$

3 段目への変形では、本来は式 (4.6.93) のように、外核での積分項に加えて ICB での特異的な項が出てくるが、 ϕ_g を ICB でゼロになるように取れば第 2 項が消えて上式のように書ける。 $\Delta \rho_{\text{ICB}}$ は ICB における内核と外核の質量密度の差であり、地震波観測によって決定される。上式を重力エネルギー解放の項 $Q_{\text{重}}$ と書くことにする。 $D\xi/Dt$ は式 (4.6.92) によって内核の成長速度と関連付けられる。

- 潜熱の解放の項について、潜熱を L_H とすれば、内核の成長速度を用いて次式のように見積もられる。

$$Q_{\text{潜}} = 4\pi R_{\text{ICB}}^2 L_H \rho_{\text{ICB}} \frac{dR_{\text{ICB}}}{dt} \quad (4.6.101)$$

- 外核のほとんどの領域は断熱温度勾配にあると考える。断熱温度勾配 (節 4.6.1) は

$$T(r) = T_{\text{CMB}} \exp \left[- \int_{R_{\text{CMB}}}^r \frac{g\alpha}{c_p} dr \right] \quad (4.6.102)$$

と書けるが、 \exp の肩の因子の時間変化を無視すれば、

$$\frac{1}{T} \frac{DT}{Dt} = \frac{1}{T_{\text{CMB}}} \frac{dT_{\text{CMB}}}{dt} \quad (4.6.103)$$

という関係が成り立つ。つまり、外核内部の任意の場所の温度の時間変化を CMB に外挿した冷却速度で上のように表すことにする。

- 内核は冷却に伴い、ICB が融点になるようにして成長するので、内核の成長速度は冷却速度で表すことができる。具体的には次のように考える。ある時刻に圧力が $p = p_0$ であるような位置にあった ICB が成長し、 $p = p_0 + \delta p$ ($\delta p < 0$) の位置に移動したとき、この新たな位置における温度の変化 δT を考える。圧力が p のときの融点を $T_m(p)$ と書き、実際の温度勾配が断熱温度勾配 $T_{\text{ad}}(p)$ であると仮定する。ICB の温度が T_m であることを考慮すると、 δT は次のように書ける。

$$\delta T = T_m(p_0 + \delta p) - \left(T_m(p_0) + \frac{dT_{\text{ad}}}{dp} \delta p \right) \quad (4.6.104)$$

$$= \left(\frac{dT_m}{dp} - \frac{dT_{\text{ad}}}{dp} \right) \delta p \quad (4.6.105)$$

これと静水圧平衡の関係を用いると、内核の成長速度は次のように書ける。

$$\frac{dR_{\text{ICB}}}{dt} = -\frac{1}{dT_m/dp - dT_{\text{ad}}/dp} \frac{T_{\text{ICB}}}{\rho_{\text{ICB}}g_{\text{ICB}}} \frac{1}{T_{\text{CMB}}} \frac{dT_{\text{CMB}}}{dt} \quad (4.6.106)$$

ただし、ICB の温度に対しても式 (4.6.103) が成り立っていると考えた。

- 崩壊による加熱の項は、単位質量当たりの発熱量を h とすれば、

$$Q_{\text{崩}} = \int_{\text{核}} \rho h dV \quad (4.6.107)$$

と書ける。

以上の結果から、全エネルギー保存則は次のように書ける。

$$Q_{\text{CMB}} \equiv \int_{\text{CMB}} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{崩}} + (\tilde{Q}_{\text{冷}} + \tilde{Q}_{\text{重}} + \tilde{Q}_{\text{潜}}) |\dot{T}_{\text{CMB}}| \quad (4.6.108)$$

後ろ 3 つの項が CMB の冷却速度に依存することを陽に表した。

続いて、核全体でのエントロピーの保存則を考える。エントロピーの方程式 (3.4.56) を保存形に書き換えると、次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \nabla \cdot \left(\rho s \mathbf{v} + \frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \kappa \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 + \frac{\rho h}{T} + \frac{\Phi}{T} + \text{潜熱項} \quad (4.6.109)$$

ただし、組成のフラックス i は小さいとして考えない。 Φ は散逸をまとめた項であり、実際にはジュール散逸が主な寄与である。 κ は熱伝導率である。上式を核全体に渡って積分し、全エネルギー保存則の時と同じように平均値を見積もる。 Ds/Dt を $DT/Dt, Dp/Dt, D\xi/Dt$ の和に分解し、上と同じように Dp/Dt の項を無視する。更に、Nimmo (2015) の見積もりによると、 $D\xi/Dt$ の項も無視できる。 DT/Dt の項は式 (4.6.103) を用いて CMB の冷却速度で表す。このことを踏まえると、エントロピー保存則は次のように書ける。ただし、定圧比熱 c_p は定数とした。

$$\frac{Q_{\text{CMB}}}{T_{\text{CMB}}} = \underbrace{\frac{c_p M_{\text{核全体}}}{T_{\text{CMB}}} |\dot{T}_{\text{CMB}}|}_{\text{永年冷却}} + \underbrace{\frac{\tilde{Q}_{\text{潜}}}{T_{\text{ICB}}} |\dot{T}_{\text{CMB}}|}_{\text{潜熱}} + \underbrace{\int_{\text{核}} \kappa \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 dV}_{\text{熱伝導}} + \underbrace{\int_{\text{核}} \frac{\rho h}{T} dV}_{\text{崩壊熱}} + \underbrace{\int_{\text{核}} \frac{\Phi}{T} dV}_{\text{ジュール散逸}} \quad (4.6.110)$$

式 (4.6.108) と (4.6.110) が核全体の熱収支を考える際の基本式である。核の密度分布と重力加速度の分布は地震波観測から明らかになっている (e.g. Dziewonski & Anderson, 1981)。温度分布は、核がほとんど断熱温度勾配になっているという仮定の下で、ICB が融点であるという制約から計算できる^{†29}。放射性物質の量の推定は難しく、ゼロとして見積もられることもあ

^{†29} ただし、後に述べるように、外核の一部では対流が発生しておらず、温度勾配の絶対値が断熱温度勾配のそれを下回っている可能性がある。

る。鉄と軽元素の混合物の状態方程式や熱伝導率、潜熱などの情報が実験や第一原理計算のような手法を用いて決定されれば、2つの式の Q_{CMB} 、 $|\dot{T}_{\text{CMB}}|$ 、ジュール散逸項以外の因子が見積もられる。更に、マンツルの熱収支の考察から Q_{CMB} が見積もられれば、2式を用いて CMB の冷却速度 (内核の成長速度や年齢) とジュール散逸によって増えるエントロピー (ダイナモ機構の指標) が決定できる^{†30}。逆に、ジュール散逸項をゼロとすれば、2式からダイナモ機構を起こすために必要な最小の Q_{CMB} を計算できる。

実際に見積もってみる。質量密度 $\rho(r)$ と温度分布 $T_{\text{ad}}(r)$ 、潜熱 $L_H = 750 \text{ kJ kg}^{-1}$ 、融点の圧力依存性 $T_m(p)$ として Nimmo (2015) のモデルを用いる。これは、熱膨張率 $\alpha = 1.25 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ や定圧比熱 $c_p = 840 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ を定数として扱ったモデルである。Wicht & Sanchez (2019) では、現在の Q_{CMB} の値は 7 - 17 TW 程度とまとめられている。ここでは基本的に 12 TW とし、7 TW, 17 TW としたときの見積もりも載せる。ICB での密度ジャンプの値は観測方法や理論によって異なるようだが、Nimmo (2015) ではそれらの研究を考慮して $400 - 800 \text{ kg m}^{-3}$ 程度とまとめられている。ここでは基本的に $\Delta\rho_{\text{ICB}} = 600 \text{ kg m}^{-3}$ とし、参考として 800 kg m^{-3} としたときの見積もりも載せる。放射性物質は基本的にゼロとするが、Nimmo (2015) を参考に $h = 1.1 \times 10^{-12} \text{ W kg}^{-1}$ としたときの見積もりも載せる。熱伝導率の見積もりは、理論と実験で食い違ってきた歴史がある (詳しくは Wicht & Sanchez, 2019)。ここでは Zhang et al. (2020) の結果として、 $\kappa_{\text{CMB}} = 100 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$ を用いる。これは、ダイヤモンドアンビルセルによる実験結果の外挿と第一原理計算の結果が整合的な振る舞いをしたとする研究である。また、参考として Konôpková et al. (2016) の実験結果 $27 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$ を用いた見積もりも載せる。表 4.3 に計算結果をまとめた。

Zhang et al. (2020) の熱伝導率を採用した場合、CMB における断熱温度勾配が運ぶエネルギー量は 12 TW と見積もられる。前述したように、実際の Q_{CMB} はこれより大きいかもしれないし、小さいかもしれないが、いずれの場合にも $\Delta S > 0$ であり、ダイナモ機構が発生し得る。 Q_{CMB} が Q_{ad} よりも小さかった場合、CMB 下には熱対流の発生していない安定成層が存在することになる。このことを示唆するモデル計算や観測もある (詳しくは Wicht & Sanchez, 2019)。 Q_{CMB} を 12 TW とした場合、およそ 670 MW K^{-1} のエントロピーがジュール散逸によって生成されることになる。この生成量の妥当性については後に考察する。

上で述べたモデルでは内核の成長速度が計算できるので、 Q_{CMB} が不変であるという仮定の下で時間積分することで、内核の年齢を見積もることができる。核の密度成層などは変わらず、温度が式 (4.6.103) の関係を満たして変化すると考えて、表 4.3 の最上段のパラメータを用いた場合、6 億年と見積もられる。近年のより詳細なモデルを用いた研究でも、その程度か更に若い年齢が得られている (詳しくは Wicht & Sanchez, 2019)。

^{†30} Q_{CMB} はマンツルによって律速されていると考えられる。核側の CMB 付近には境界層が存在し、そこでは Q_{CMB} に応じた温度勾配になっていると考える。

表 4.3 地球の核の熱収支の見積もり：最上段のパラメータを基本として、パラメータを様々に変えたときの見積もりの変化をまとめた。最上段と同じ値である欄は空白にした。記号の意味と単位は次の通り。CMB でマントルに抜けるエネルギー量 Q_{CMB} (TW); ICB での密度ジャンプ $\Delta\rho_{\text{ICB}}$ (kg m^{-3}); 放射性物質の崩壊熱 h (10^{-12}W kg^{-1}); CMB での熱伝導率 κ_{CMB} ($\text{W m}^{-1}\text{K}^{-1}$); 式 (4.6.108) の各項の見積もり $Q_{\text{冷}}, Q_{\text{潜}}, Q_{\text{重}}, Q_{\text{崩}}$ (TW); CMB が断熱温度勾配だった場合に運ばれるエネルギー量 Q_{ad} (TW); ダイナモを起こすために必要最小限の CMB フラックス Q_{min} (TW); 式 (4.6.110) のジュール散逸項 ΔS (MW K^{-1})。

パラメータ				エネルギー収支				その他の推定量		
Q_{CMB}	$\Delta\rho_{\text{ICB}}$	h	κ_{CMB}	$Q_{\text{冷}}$	$Q_{\text{潜}}$	$Q_{\text{重}}$	$Q_{\text{崩}}$	Q_{ad}	Q_{min}	ΔS
12.0	600	0	100	4.8	4.4	2.8	0	11.5	4.5	668
7.0				2.8	2.6	1.6	0			223
17.0				6.8	6.2	4.0	0			1113
	800			4.5	4.1	3.5	0		4.0	798
		1.1		4.0	3.6	2.3	2.1		5.9	540
			27					3.1	1.2	960

対流の駆動源

Davies & Gubbins (2011); Gubbins et al. (2015) の考え方を参考に、対流の駆動源について詳しく考察する。

節 4.6.5 で説明した閉包則 (3.4.63) に式 (3.4.62) を代入し、 ∇T の項を無視する。また、閉包則 (3.4.64) でも $\nabla\mu$ の項を無視する。つまり、次の形の閉包則を考える。

$$\mathbf{i} = -\rho D \nabla \xi - \frac{\alpha_T^\xi D}{\mu_T^\xi} \nabla p \tag{4.6.111}$$

$$\mathbf{q}^s = -\kappa \nabla T \tag{4.6.112}$$

D は質量拡散率、 κ は熱伝導率である^{†31}。式 (4.6.111) の第 2 項は “barodiffusion” (傾圧拡散) と呼ばれる。この項は外核の大部分では小さいが、CMB 直下に軽元素の豊富な層を作り出すかもしれないという報告もある (Gubbins & Davies, 2013)。ここでは外核全体の大まかな見積もりのため、組成はほとんど一様であるとして、傾圧拡散は無視する。

節 4.6.5 で説明した非弾性液体近似を地球外核に応用した方程式系を考える。具体的には、基準状態 (添え字 a) に等エントロピー $\nabla s = 0$ かつ一様組成 $\nabla \xi = 0$ の状態を選び、そこからの

^{†31} μ_T^ξ の定義は節 3.4.8 と同じである。本節では α^ξ の代わりに、

$$\alpha_T^\xi \equiv -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)_{p,T} = \alpha^\xi + \frac{\alpha h^\xi}{c_p}$$

を用いているが、非弾性液体近似では $\alpha^\xi \simeq \alpha_T^\xi$ である。

擾乱 (添え字 1) を考える。基準状態は永年冷却に伴って、上で考えたように時間変化する。熱輸送の式と組成の保存則は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_a c_p T_1) + \nabla \cdot (\rho_a c_p T_1 \mathbf{v} - \kappa \nabla T_1 - \kappa \nabla T_a) \\ = \rho_a \alpha T_1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} - \rho_a T_a \left(\frac{Ds}{Dt} \right)_{\text{永年}} + \rho_a h + \text{潜熱項} \end{aligned} \quad (4.6.113)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_a \xi_1) + \nabla \cdot (\rho_a \xi_1 \mathbf{v} - \rho_a D \nabla \xi_1) = -\rho_a \left(\frac{D\xi}{Dt} \right)_{\text{永年}} \quad (4.6.114)$$

ただし、ジュール散逸は考えない^{†32}。ここで、次の“cotemperature” (共温度) と呼ばれる量を導入する。

$$\theta = T_1 + \frac{\alpha_T^\xi}{\alpha} \xi_1 \quad (4.6.115)$$

すると、運動方程式に現れる浮力項は次のようになる。

$$-\alpha T_1 \mathbf{g} - \alpha^\xi \xi_1 \mathbf{g} \simeq -\alpha \theta \mathbf{g} \quad (4.6.116)$$

また、式 (4.6.113) に式 (4.6.114) × α_T^ξ c_p / α を加えたものは次のように書ける。ただし、熱拡散率 κ / (ρ₀ c_p) と質量拡散率 D は等しいと考える^{†33}。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_a c_p \theta) + \nabla \cdot (\rho_a c_p \theta \mathbf{v} - \kappa \nabla \theta - \kappa \nabla T_a) \\ = \rho_a \alpha \theta \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} - \underbrace{\rho_a c_p \alpha_T^\xi \xi_1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}}_{\text{重力エネルギーの解放}} - \underbrace{\rho_a T_a \left(\frac{Ds}{Dt} \right)_{\text{永年}}}_{\text{永年冷却}} \\ + \underbrace{\rho_a h}_{\text{崩壊熱}} + \text{潜熱項} - \underbrace{\frac{\rho_a \alpha_T^\xi c_p}{\alpha} \left(\frac{D\xi}{Dt} \right)_{\text{永年}}}_{\text{濃集}} \end{aligned} \quad (4.6.117)$$

このように考えることで、熱対流と組成対流を一括りにして、まるで熱対流のみを扱うかのような方程式系を構成できる。上式を拡張した内部エネルギー保存則とみなし、運動方程式に \mathbf{v} を作用させた式 (運動エネルギー保存則) を上式に加えることで、全エネルギー保存則に相当する式が導出される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_a v^2 + \rho_a c_p \theta \right) + \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} \rho_a v^2 \mathbf{v} + (\rho_a c_p \theta + p_1) \mathbf{v} - \kappa \nabla \theta - \kappa \nabla T_a \right] \\ = \underbrace{-\rho_a c_p \alpha_T^\xi \xi_1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}}_{\text{重力エネルギーの解放}} + \text{その他の項} \end{aligned} \quad (4.6.118)$$

^{†32} ジュール熱は、後に述べるが、大きくても数 TW 程度と見積もられる。

^{†33} 実際には κ / ρ₀ c_p ~ 10⁻⁶ m²s⁻¹ であるのに対し、D ~ 10⁻⁸ m²s⁻¹ と考えられている (Davies & Gubbins, 2011)。実効的な拡散率は乱流によって決まり、両者共により大きな値を取ると考えれば、この考え方はある程度正当化される。

この式を半径 r の球状領域 V_r で積分した保存則を考える。 r は外核内部の半径である。運動エネルギーは小さいとして無視し、対流が定常とみなせるくらいの時間または空間で平均すると、左辺は対流によるエンタルピーフラックスの平均と断熱温度勾配に沿った熱流束が残る。右辺の重力エネルギーの解放項は、 $r = R_{\text{CMB}}$ の場合は上で見積もった $Q_{\text{重}}$ に一致しなければならないが、具体的な分布は対流の様式が分からなければ決定できない。ここでは外核内で質量に対して一様に解放されるとして見積もる。他の各項はエネルギー収支を見積もったときのように変形すると、次式を得る。

$$Q_{\text{対流}}(r) + Q_{\text{断}}(r) = Q_{\text{重}}(r) + Q_{\text{冷}}(r) + Q_{\text{崩}}(r) + Q_{\text{潜}} + Q_{\text{濃}}(r) \quad (4.6.119)$$

$$Q_{\text{断}}(r) = 4\pi r^2 \kappa \left| \frac{dT_a}{dr} \right| \quad (4.6.120)$$

$$Q_{\text{重}}(r) \sim \frac{Q_{\text{重}}}{M_{\text{外核}}} \int_{V_r - \text{内核}} \rho_a dV \quad (4.6.121)$$

$$Q_{\text{冷}}(r) = \int_{V_r} \rho_a T_a dV \frac{c_p}{T_{\text{CMB}}} \left| \frac{dT_{\text{CMB}}}{dt} \right| \quad (4.6.122)$$

$$Q_{\text{崩}}(r) = h \int_{V_r} \rho_a dV \quad (4.6.123)$$

$$Q_{\text{潜}} = 4\pi R_{\text{ICB}}^2 L_H \rho_{\text{ICB}} \frac{dR_{\text{ICB}}}{dt} \quad (4.6.124)$$

$$Q_{\text{濃}}(r) = \left(1 - \frac{1}{M_{\text{外核}}} \int_{V_r - \text{内核}} \rho_a dV \right) 4\pi R_{\text{ICB}}^2 \Delta \rho_{\text{ICB}} \frac{c_p}{\alpha} \frac{dR_{\text{ICB}}}{dt} \quad (4.6.125)$$

上述したエネルギー収支のモデルから $Q_{\text{重}}$, dR_{ICB}/dt , dT_{CMB}/dt が決定されれば、上式より各 r において対流が運ぶべき拡張されたエンタルピー量が求まる。 $Q_{\text{CMB}} = 12 \text{ TW}, 7 \text{ TW}$ の場合について計算した分布を図 4.17 に示す。式 (4.6.119) 右辺の各項の中では、軽元素の濃集によって組成対流が駆動される効果がいちばん大きいことが分かる。それに次いで、潜熱の解放によって熱対流が駆動される効果が大きい。右図の CMB 直下では、合計値が断熱温度勾配に沿った輸送量を下回っている。これは対流が起きていないことを示唆する。このように、 Q_{CMB} が小さい場合には、CMB 直下に安定層ができていいる可能性がある。

対流のスケール

外核での対流に関する各量のスケールを見積もる。太陽対流層の場合は激しい重力成層をしており、混合距離をスケールハイトとして見積もった (節 4.6.3)。地球外核の場合、密度は外核全体で 30% 程度しか変化しない。一方、ロスビー数 $Ro \ll 1$ の系であるため自転の影響を強く受け、対流のスケール l は外核の幅 d よりもずっと小さいことが予想される。ここでは、MAC バランスと呼ばれる仮定に基づいたスケーリングとして、Davidson (2013) の方法を用いる。このスケーリングの妥当性については Wicht & Sanchez (2019) で議論されている。

コリオリ力も考慮したブシネスク系の運動方程式に $\nabla \times$ を作用させた式 (渦度方程式) を考え

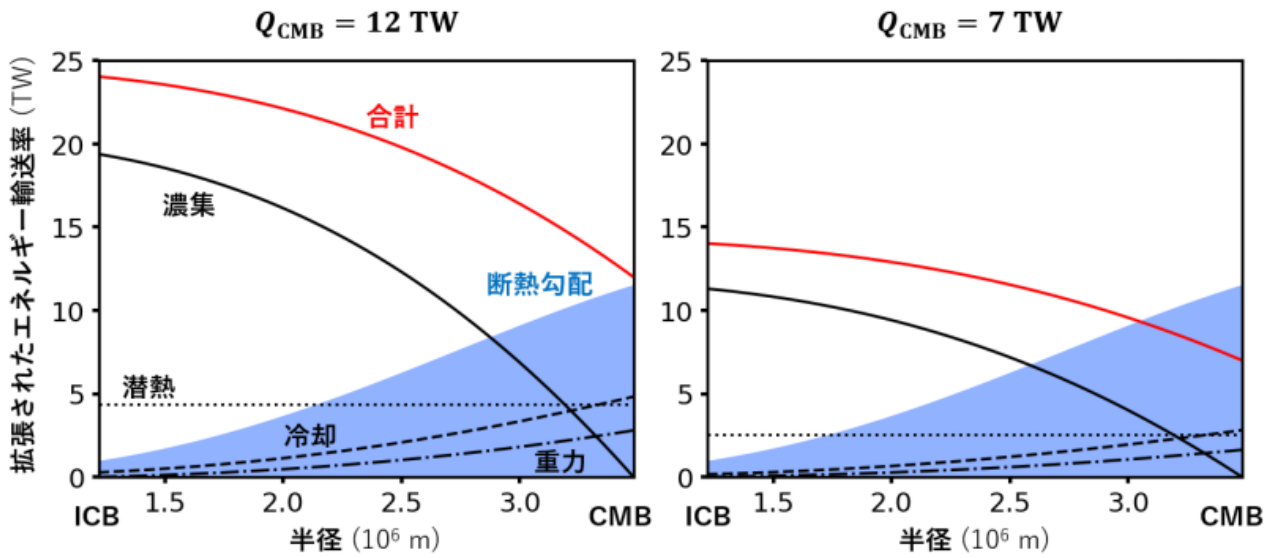


図 4.17 地球外核での拡張されたエネルギー輸送率：式 (4.6.119) の右辺の各項の寄与と合計が線で示されている。青く塗られた値は断熱温度勾配に沿ったエネルギー輸送率である。 $Q_{\text{CMB}} = 12\text{TW}$ の場合、 $Q_{\text{重}} = 2.8 \text{ TW}$, $dR_{\text{ICB}}/dt = 2.6 \times 10^{-11} \text{ m s}^{-1}$, $|dT_{\text{CMB}}/dt| = 2.6 \times 10^{-15} \text{ K s}^{-1}$ であり、 $Q_{\text{CMB}} = 7\text{TW}$ の場合、 $Q_{\text{重}} = 1.6 \text{ TW}$, $dR_{\text{ICB}}/dt = 1.5 \times 10^{-11} \text{ m s}^{-1}$, $|dT_{\text{CMB}}/dt| = 1.5 \times 10^{-15} \text{ K s}^{-1}$ である。

る。 $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ は渦度である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega - \underbrace{2(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}}_{\text{コリオリ項 (C)}} \\ = \underbrace{-\nabla \times (\alpha \theta \mathbf{g})}_{\text{浮力項 (A)}} + \underbrace{\frac{1}{\rho_0 \mu_0} \nabla \times [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}]}_{\text{ローレンツ項 (M)}} + \nu \nabla^2 \omega \end{aligned} \quad (4.6.126)$$

$\boldsymbol{\Omega}$ は地球自転の角速度ベクトルである。地球外核では、上式においてローレンツ項 (magnetic) と浮力項 (Archimedean)、コリオリ項 (Coriolis) の 3 項が主要項であると考えられている^{†34}。これを MAC バランスという。この 3 項のつり合いから、各量の見積もりについて次の 2 つの等式を得る。

$$\frac{B^2}{\rho_0 \mu_0 l^2} \sim \frac{g \alpha \theta}{l} \sim \frac{\Omega U}{d} \quad (4.6.127)$$

B は磁場のスケール、 U は流速のスケールである。対流はテイラー-プラウドマンの定理 (節 4.3.3) の影響を受けて、自転軸方向に長い柱状の様式であると考え、コリオリ項の見積もりには

^{†34} 運動方程式においては、コリオリ力と傾圧力が主要項であり (地衡流, 節 4.3.3)、そこからのずれとして MAC バランスが保たれていると考えられている。

l ではなく d を用いた^{†35}。

対流の運動エネルギーの源は浮力のする仕事である。対して、運動エネルギーはローレンツ力を介して磁気エネルギーに変換されつつ、散逸によって損失する (内部エネルギーに変換される)。散逸は主にジュール散逸である。系が平均として定常状態にあれば、浮力のする仕事率と散逸の時間率がつりあうはずである。

$$Ug\alpha\theta \sim P \quad (4.6.128)$$

P は単位時間・単位質量あたりに散逸するエネルギーであり、上で述べたエネルギー収支の見積もりの結果より $\Delta S \sim 670 \text{ MW K}^{-1}$ とすれば、次のように見積もられる。

$$P \sim \frac{\Delta ST}{\rho V_{\text{外核}}} \sim 1.7 \times 10^{-12} \text{ W kg}^{-1} \quad (4.6.129)$$

$V_{\text{外核}}$ は外核の体積である。ジュール散逸は、アンペールの法則から電流を見積もることで、次のように見積もられる。 $\eta = 1/(\mu_0\sigma)$ は磁気拡散率である。

$$P \sim \frac{\eta B^2}{\rho\mu_0 l_{\text{Ohm}}^2} \quad (4.6.130)$$

l_{Ohm} はジュール散逸の起きる空間スケールであるが、これは対流と磁気拡散の時間スケールが等しくなるような空間スケールとして、次のように見積もられる。

$$\frac{l_{\text{Ohm}}}{U_{\text{Ohm}}} \sim \frac{l_{\text{Ohm}}^2}{\eta} \quad (4.6.131)$$

l_{Ohm} での渦度のスケールを $\omega_{\text{Ohm}} = U_{\text{Ohm}}/l_{\text{Ohm}}$ と書くと、式 (4.6.130) は次のように書き直せる。

$$\frac{B^2}{\rho\mu_0} \sim \frac{P}{\omega_{\text{Ohm}}} \quad (4.6.132)$$

外核は乱流状態にあるため、小スケールでの渦度は P と d のみによって決まり、自転速度 Ω には依らないことが期待される^{†36}。Davidson (2013) はこの仮定を課し、次元解析^{†37}から次式を得た。

$$\frac{B^2}{\rho\mu_0} \sim d^{2/3} P^{2/3} \quad (4.6.133)$$

式 (4.6.127), (4.6.128), (4.6.133) より、次のスケーリング則を得る。

$$U \sim d^{1/9} P^{4/9} \Omega^{-1/3} \quad (4.6.134)$$

$$\frac{l}{d} \sim d^{-2/9} P^{1/9} \Omega^{-1/3} \quad (4.6.135)$$

$$g\alpha\theta \sim d^{-1/9} P^{5/9} \Omega^{1/3} \quad (4.6.136)$$

^{†35} 外核における乱流の様式については Aurnou et al. (2015) も参考にして欲しい。

^{†36} 節 4.7.4 の言葉を用いるならば、 Ω_{Ohm} がエネルギーカスケードに沿って大スケール流から運ばれてくるエネルギー量によって決定されるということである。

^{†37} 両辺の次元が一致する指数の組み合わせを探すこと。

表 4.4 地球外核対流の見積りに用いたパラメータと結果：各記号の意味については本文を参照。

パラメータ		結果	
r	2400 km	B	0.7 mT
d	2260km	U	$7 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$
ρ	$1.1 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$	l	100 km
g	7.7 m s^{-2}	θ	$2 \times 10^{-5} \text{ K}$
α	$1.25 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$	$Q_{\text{対流}}$	10 TW
c_p	$840 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$		
P	$1.7 \times 10^{-12} \text{ W kg}^{-1}$		
Ω	$7.29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$		

また、対流が運ぶ拡張されたエネルギー輸送率は次のように見積もられる。

$$Q_{\text{対流}} \sim 4\pi r^2 \rho c_p \theta U \quad (4.6.137)$$

実際に見積もってみる。使用したパラメータと結果を表 4.4 にまとめた。まず、 B について、観測から外挿される CMB での動径磁場の強度は 0.1 mT の桁数である (節 4.2.6)。見積もりの結果はそれと整合的である。 U について、磁場が外核の液体金属に対して凍結しているという仮定の下で、CMB での磁場の時間変化の様子から、その変化を起こしている流れの速さを推定することができる (詳しくは Holme, 2015)。この手法で推定される流速は $5 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$ である。見積もりの結果はこれと同じオーダーである。 $Q_{\text{対流}}$ の値も、上でエネルギー収支の観点から見積もった結果と整合的である。熱拡散率、磁気拡散率、動粘性率をそれぞれ $\tilde{\kappa} = \kappa / (\rho c_p) = 1 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $\eta = 0.6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $\nu = 5 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ として、空間スケールに l を用いると、各無次元数 (節 4.1) は次のように計算できる。

$$R_m \sim 10^2, \quad Re \sim 10^8, \quad Ro \sim 10^{-5}, \quad Ra \sim 10^{17} \quad (4.6.138)$$

4.7 乱流

レイノルズ数が 10^4 を超えるような系は乱流状態にある。乱流とは、様々なスケールの流れが乱雑に存在しており、また乱雑に時間発展するような状態である。あちこちで励起される個々の渦の時間発展を予測することは困難であり、それらの渦の統計的な性質を扱う解析手法が取られる。乱流はまだどのように取り扱えばよいか分かっていない部分も多いが、本節ではよく目にすると思われる概念を説明する。

4.7.1 統計的性質の記述方法

平均操作

速度場などの場の量に対する平均を上線で表す。具体的な平均操作としては、乱流場が一様な場合、つまり各点が同等の力学的条件を備えている場合はある程度の空間に渡る平均が考えられる。あるいは、乱流の統計的性質が定常ならば、ある程度の時間に渡った平均も考えられる。統計力学に倣ってアンサンブル平均を考えることもある。アンサンブル平均とは、系を何度も同じ状況に設定して観測した場合の、多数の観測データの平均である。ここでは、具体的な平均操作の性質には立ち入らず、次のレイノルズの関係を満たすものとして平均を導入する。つまり、場の量 F, G を平均 (上線) とそこからの変動 (プライム記号) に分けたとき、次の性質を持つことにする。

$$F = \overline{F} + F', \quad \overline{\overline{F}} = \overline{F}, \quad \overline{F'} = 0 \quad (4.7.1)$$

$$\overline{F + G} = \overline{F} + \overline{G}, \quad \overline{\overline{F}G} = \overline{F}G, \quad \overline{\overline{F}G'} = 0 \quad (4.7.2)$$

平均操作は時間微分や空間微分と可換である。アンサンブル平均はこれらの性質を満たす。空間平均の場合は幾つかの性質は漸近的な仮定になる。例えば、簡単のために 1 次元で考えたとき、点 x での平均を次のように定義する。

$$\overline{F}(x) = \frac{1}{l} \int_{x-l/2}^{x+l/2} F(x') dx' \quad (4.7.3)$$

仮に、平均場が

$$\overline{F}(x) = F_0 \left(1 + \frac{x^2}{l_0^2} \right) \quad (4.7.4)$$

と表される場合、次のように計算できる。

$$\frac{\overline{F'}}{F_0} = \frac{\overline{F} - \overline{\overline{F}}}{F_0} = -\frac{1}{12} \frac{l^2}{l_0^2} \quad (4.7.5)$$

つまり、平均場の変化のスケール l_0 に比べて小さな範囲 l で平均する場合に、近似的に $\overline{F'} = 0$ が成り立つ。乱流のスケール (例えば後述する相関長) より長く、平均場の変化スケールより短い l が選べなければならない。時間平均に関しても同様である。

速度相関テンソル

乱流の時空間構造を記述するために、次の量が導入される。

$$Q_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{r}, \tau) = \overline{v'_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t + \tau) v'_j(\mathbf{x}, t)} \quad (4.7.6)$$

これを (オイラー) 速度相関テンソル (Eulerian velocity correlation tensor) という^{†38}。乱流が空間的に一様である場合は、 Q_{ij} は座標 \mathbf{x} に依らず、定常である場合は時刻 t に依らない。以下では、乱流が一様である場合の同時刻 ($\tau = 0$) の相関を考える。引数 t は省略する。このとき、定義より添え字と相対位置の反転に対して対称である。

$$Q_{ij}(\mathbf{r}) = Q_{ji}(-\mathbf{r}) \quad (4.7.7)$$

非圧縮性の乱流を考える場合は、 $\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0$ より

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial r_i} = 0, \quad \frac{\partial Q_{ij}}{\partial r_j} = 0 \quad (4.7.8)$$

が成り立つ。

一様乱流が更に等方的である場合を考える。等方的とは、空間回転に対して統計的性質が不変であることをいう。2 点間の相対位置ベクトル r_i の関数である等方テンソルは、 $r_i, \delta_{ij}, \varepsilon_{ijk}$ から作られる同階のテンソルの 1 次結合で表されることが知られている (Robertson, 1940)。具体的には、1, 2, および 3 階の等方テンソルはそれぞれ次のように表される。

$$T_i(\mathbf{r}) = A(r) \frac{r_i}{r} \quad (4.7.9)$$

$$T_{ij}(\mathbf{r}) = A(r) \frac{r_i r_j}{r^2} + B(r) \delta_{ij} + C(r) \varepsilon_{ijk} \frac{r_k}{r} \quad (4.7.10)$$

$$T_{ijk}(\mathbf{r}) = A(r) \frac{r_i r_j r_k}{r^3} + B(r) \delta_{ij} \frac{r_k}{r} + C(r) \delta_{ik} \frac{r_j}{r} + D(r) \delta_{jk} \frac{r_i}{r} + E(r) \varepsilon_{ijl} \frac{r_l r_k}{r^2} + F(r) \varepsilon_{jkl} \frac{r_l r_i}{r^2} + G(r) \varepsilon_{kil} \frac{r_l r_j}{r^2} + H(r) \varepsilon_{ijk} \quad (4.7.11)$$

各係数は相対位置ベクトルの大きさ r の関数である。実際に、2 階等方テンソルが回転変換に対して不変であることを確かめる。回転行列 R_{ij} によって、 T_{ij} と r_i が次のように変換されるような回転変換を考える。

$$\tilde{T}_{ij} = R_{ik} R_{jl} T_{kl}, \quad \tilde{r}_i = R_{ij} r_j, \quad \tilde{r} = r \quad (4.7.12)$$

回転行列の性質^{†39}

$$R_{ik} R_{jk} = \delta_{ij}, \quad R_{ik} R_{jl} \varepsilon_{klm} = \varepsilon_{ijn} R_{nm} \quad (4.7.13)$$

^{†38} これに対し、ラグランジュ速度相関テンソルは $v_i^{(L)}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t|t + \tau) v_j(\mathbf{x}, t)$ と定義される。ただし、 $v_i^{(L)}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t|t + \tau)$ は時刻 t に座標 $(\mathbf{x} + \mathbf{r})$ にいた流体粒子が時刻 $(t + \tau)$ に持つ速度である。ラグランジュ速度相関テンソルはガリレイ変換に対して不変であるのに対し、オイラー速度相関テンソルは形を変えることに注意を要する。

^{†39} 1 つ目の性質は回転行列が直交行列であることによる。2 つ目の性質は次のように導かれる。一般の 3 次正方行列 R_{ij} に対して、行列式はレヴィ-チヴィタの記号を用いて次のように表される。

$$|R| = \varepsilon_{pqn} R_{p1} R_{q2} R_{n3}$$

これを拡張して、次の等式も成り立つ。

$$\varepsilon_{klm} |R| = \varepsilon_{pqn} R_{pk} R_{ql} R_{nm}$$

上式の両辺に $R_{ik} R_{jl}$ を乗じ、回転行列の場合には $|R| = 1$ であることと、1 つ目の性質を用いれば導かれる。

を用いれば、次のように計算できる。

$$\tilde{T}_{ij} = A(r) \frac{R_{ik} r_k R_{jl} r_l}{r^2} + B(r) R_{ik} R_{jl} \delta_{kl} + C(r) R_{ik} R_{jl} \varepsilon_{klm} \frac{r_m}{r} \quad (4.7.14)$$

$$= A(\tilde{r}) \frac{\tilde{r}_i \tilde{r}_j}{\tilde{r}^2} + B(\tilde{r}) \delta_{ij} + C(\tilde{r}) \varepsilon_{ijn} \frac{\tilde{r}_n}{\tilde{r}} \quad (4.7.15)$$

相関を取る 2 点を結ぶ線分の向き (\mathbf{r} の向き) の速度成分を v'_L 、それに垂直な 2 方向の成分を $v'_N, v'_{N'}$ と書いたとき、次の 3 つの量を導入する。ただし、 L, N, N' の順で右手系を成すようにとる。

$$Q_{LL}(r) = \overline{v'_L(\mathbf{x} + \mathbf{r}) v'_L(\mathbf{x})} \quad (4.7.16)$$

$$Q_{NN}(r) = \overline{v'_N(\mathbf{x} + \mathbf{r}) v'_N(\mathbf{x})} \quad (4.7.17)$$

$$Q_{NN'}(r) = \overline{v'_{N'}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) v'_{N'}(\mathbf{x})} \quad (4.7.18)$$

これらはそれぞれ縦速度相関関数 (longitudinal)、横速度相関関数 (lateral)、ねじれ速度相関関数 (skewed) と呼ばれる。例えば、 $\mathbf{r} = (r, 0, 0)$ とすれば、 $L = 1, N = 2, N' = 3$ なので、式 (4.7.10) の係数と比較することで、等方的な Q_{ij} は次のように書けることが分かる。

$$Q_{ij}(\mathbf{r}) = [Q_{LL}(r) - Q_{NN}(r)] \frac{r_i r_j}{r^2} + Q_{NN}(r) \delta_{ij} + Q_{NN'}(r) \varepsilon_{ijk} \frac{r_k}{r} \quad (4.7.19)$$

非圧縮性の乱流の場合は、式 (4.7.8) より

$$Q_{NN} = Q_{LL} + \frac{r}{2} \frac{dQ_{LL}}{dr} \quad (4.7.20)$$

という関係が分かるので、次のように書き直せる。

$$Q_{ij} = -\frac{r}{2} \frac{dQ_{LL}}{dr} \frac{r_i r_j}{r^2} + \left(Q_{LL} + \frac{r}{2} \frac{dQ_{LL}}{dr} \right) \delta_{ij} + Q_{NN'} \varepsilon_{ijk} \frac{r_k}{r} \quad (4.7.21)$$

更に、乱流の統計的性質が座標系の反転に対しても不変ならば、 $Q_{NN'} = 0$ とならなければならない。

乱流の特性長

乱流の特徴的なスケールとして、次の相関長 (積分距離) を考えることがある。

$$l_{\text{cor}} = \frac{1}{Q_{LL}(0)} \int_0^{\infty} Q_{LL}(r) dr \quad (4.7.22)$$

相関長は、 $Q_{LL}(r)$ が張る面積と同じ面積の長方形を描いたときの幅に相当する (図 4.18)。節 4.7.4 で、乱流は様々な大きさの渦として捉えられることを述べるが、相関長はいちばん大きな渦の典型的な大きさに相当する。

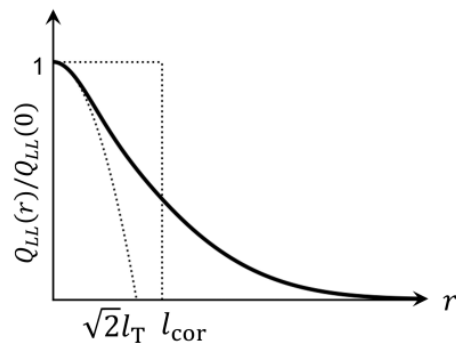


図 4.18 相関長 l_{cor} とテイラー長 l_T

別の特性長として、次のテイラー長を考えることもある。

$$l_T = \sqrt{-\frac{Q_{LL}(0)}{d^2Q_{LL}/dr^2|_{r=0}}} \tag{4.7.23}$$

テイラー長は、 $Q_{LL}(r)$ の原点での振る舞いにより決定される量であり、図 4.18 のように、原点で Q_{LL} のグラフと接する放物線の r 切片に対応する。

4.7.2 フーリエ解析

速度場のフーリエ分解

一様乱流を考える際には、速度場をフーリエ分解して扱うことがある。解析の都合上、一辺の長さが L の立方体 V の内部で乱流を考える。立方体の壁では周期的境界条件を課す。 $L \rightarrow \infty$ の極限が一様乱流を表すと考える。立方体内部の流れは次のように固有モードの和に展開できる。

$$\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \tag{4.7.24}$$

波数ベクトル \mathbf{k} は整数を成分とするベクトル $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ を用いて

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n} \tag{4.7.25}$$

と表される。 \mathbf{k} の和はこの \mathbf{n} 全体に渡ってとる。この和は $L \rightarrow \infty$ の極限では $(2\pi/L)^3 \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int d^3k$ と書き換えられる。フーリエ係数は

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_V \mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3x \tag{4.7.26}$$

と表される。ディラックのデルタ記号を

$$\delta_{\mathbf{k}} = \begin{cases} 1 & (\mathbf{k} = 0) \\ 0 & (\mathbf{k} \neq 0) \end{cases} \tag{4.7.27}$$

と書くことにすれば、

$$\delta_k = \frac{1}{L^3} \int_V \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3x \quad (4.7.28)$$

という公式が得られる。 $L \rightarrow \infty$ の極限では $(L/2\pi)^3 \delta_k \rightarrow \delta(\mathbf{k})$ と書かれる。

エネルギースペクトル

一様乱流のオイラー速度相関テンソルをフーリエ変換 (付録 1.C.6) したものを

$$\tilde{Q}_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int Q_{ij}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d^3r \quad (4.7.29)$$

をエネルギースペクトルテンソルという。逆変換は

$$Q_{ij}(\mathbf{r}) = \int \tilde{Q}_{ij}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3k \quad (4.7.30)$$

である。 Q_{ij} の成分は実数であるため、フーリエ変換の性質 (1.C.200) を満たす。これと Q_{ij} の対称性 (4.7.7) より、 \tilde{Q}_{ij} はエルミートである。

$$\tilde{Q}_{ij}(\mathbf{k}) = \tilde{Q}_{ji}^*(\mathbf{k}) \quad (4.7.31)$$

肩の * は複素共役の意味で用いる。非圧縮の条件は

$$k_i \tilde{Q}_{ij}(\mathbf{k}) = 0, \quad k_j \tilde{Q}_{ij}(\mathbf{k}) = 0 \quad (4.7.32)$$

と書き直せる。また、速度場のフーリエ成分とは次の関係にある。

$$\overline{\tilde{v}_i(\mathbf{k}) \tilde{v}_j(\mathbf{k}')} = \tilde{Q}_{ij}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (4.7.33)$$

あるいは、一辺 L の立方体内で考えている場合は次のようにも書ける。

$$\overline{\tilde{v}_i(\mathbf{k}) \tilde{v}_j(\mathbf{k}')} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \tilde{Q}_{ij}(\mathbf{k}) \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}'} \quad (4.7.34)$$

更に、一様乱流のエネルギースペクトルテンソルは、任意の複素定ベクトル X_i に対して次式を満たさなければならない (e.g. Krause & Rädler, 1980, §6.4)。

$$\tilde{Q}_{ij}(\mathbf{k}) X_i X_j^* \geq 0 \quad (4.7.35)$$

これをボホナーの定理 (Bochner's theorem) という。

一様等方乱流の場合、 \tilde{Q}_{ij} は式 (4.7.10) で r を k に置き換えた形式で表されるが、非圧縮の場合は式 (4.7.32) より、 $A(k) + B(k) = 0$ でなければならない。つまり、 \tilde{Q}_{ij} は 2 つのスカラー関数によって次のように表される。

$$\tilde{Q}_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \left[\frac{E(k)}{2\pi k^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) - i \varepsilon_{ijkl} k_l \frac{H(k)}{4\pi k^4} \right] \quad (4.7.36)$$

$E(k), H(k)$ はそれぞれエネルギースペクトル関数、ヘリシティスペクトル関数と呼ばれる。ポホナーの定理 (4.7.35) より、これらの関数は次の関係を満たす必要がある。

$$2kE(k) \geq |H(k)| \quad (4.7.37)$$

逆に表すと次のようになる。

$$E(k) = \frac{1}{2} \int_{\text{半径 } k \text{ の球面}} \tilde{Q}_{ii}(\mathbf{k}) dS \quad (4.7.38)$$

$$\underbrace{=}_{\text{等方の場合}} 2\pi k^2 \tilde{Q}_{ii}(\mathbf{k}) \quad (4.7.39)$$

$$H(k) = i \int_{\text{半径 } k \text{ の球面}} \varepsilon_{ijl} k_l \tilde{Q}_{ij}(\mathbf{k}) dS \quad (4.7.40)$$

$$\underbrace{=}_{\text{等方の場合}} 4\pi i k^2 \varepsilon_{ijl} k_l \tilde{Q}_{ij}(\mathbf{k}) \quad (4.7.41)$$

式 (4.7.36) が成り立つのは等方乱流の場合に限るが、 $E(k), H(k)$ は上式によって非等方の場合にも定義できる。単位質量当たりの平均運動エネルギーは次のように書ける。

$$K = \frac{1}{2} \overline{[v'_i(\mathbf{x})]^2} \quad (4.7.42)$$

$$= \frac{1}{2} Q_{ii}(0) \quad (4.7.43)$$

$$= \frac{1}{2} \int \tilde{Q}_{ii}(\mathbf{k}) d^3k \quad (4.7.44)$$

$$= \int_0^\infty E(k) dk \quad (4.7.45)$$

つまり、 $E(k)$ は波数が $k \sim k + dk$ であるフーリエ成分からの運動エネルギーへの寄与と解釈できる。渦度を $\boldsymbol{\omega}' = \nabla \times \mathbf{v}'$ として、 $\mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\omega}'$ を乱流によるヘリシティというが、ヘリシティの平均は次のように書ける。

$$\overline{v'_i(\mathbf{x}) \omega'_i(\mathbf{x})} = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^6 \sum_{\mathbf{k}} \overline{\tilde{v}_i(\mathbf{k}) \tilde{\omega}_i(\mathbf{k})} \quad (4.7.46)$$

$$= -i \left(\frac{2\pi}{L} \right)^6 \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{ilj} k_l \overline{\tilde{v}_i(\mathbf{k}) \tilde{v}_j(\mathbf{k})} \quad (4.7.47)$$

$$= i \int \varepsilon_{ijl} k_l \tilde{Q}_{ij}(\mathbf{k}) d^3k \quad (4.7.48)$$

$$= \int_0^\infty H(k) dk \quad (4.7.49)$$

$E(k), H(k)$ と縦速度相関関数 Q_{LL} 、ねじれ速度相関関数 $Q_{NN'}$ は次の関係にある。

$$E(k) = \frac{k^2}{\pi} \int_0^\infty r^2 Q_{LL}(r) \left[\frac{\sin(kr)}{kr} - \cos(kr) \right] dr \quad (4.7.50)$$

$$Q_{LL}(r) = \frac{2}{r^2} \int_0^\infty \frac{E(k)}{k^2} \left[\frac{\sin(kr)}{kr} - \cos(kr) \right] dk \quad (4.7.51)$$

$$H(k) = \frac{4k}{\pi} \int_0^\infty Q_{NN'}(r) [\sin(kr) - kr \cos(kr)] dr \quad (4.7.52)$$

$$Q_{NN'}(r) = \frac{1}{2r^2} \int_0^\infty \frac{H(k)}{k^3} [\sin(kr) - kr \cos(kr)] dk \quad (4.7.53)$$

4.7.3 非圧縮一様乱流

ナビエ-ストークス方程式から出発し、変動速度が従うべき方程式を考える。いちばん単純な系として平均流の無い非圧縮一様乱流を想定し、速度場のフーリエ成分が従う方程式を導出してから波数空間での運動エネルギーの保存則を考える。木田重雄 & 柳瀬眞一郎 (1999) の 2.2 節、4.3 節、4.10 節を参考にした。

レイノルズ分解

速度場と圧力場を平均場 (上線) と変動場 (プライム記号) に分けて考える。

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}' \quad (4.7.54)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (4.7.55)$$

上式を非圧縮流の質量保存則とナビエ-ストークス方程式に代入し、平均をとると、平均流に関する次の方程式を得る。 f_i は外力を表す項である。

$$\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} = 0 \quad (4.7.56)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{v}_k \bar{v}_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \bar{v}_i + \bar{f}_i - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{v'_k v'_i}) \quad (4.7.57)$$

上式をナビエ-ストークス方程式と比べると、第 2 式の右辺に $\overline{v'_k v'_i}$ の項が加わっている。これは移流項が非線形であることにより出てきた項である。応力と同じ $\nabla \cdot ()$ の形式の項であるため、 $-\rho \overline{v'_i v'_j}$ はレイノルズ応力と呼ばれる。乱流の存在によって平均流の運動量が輸送される効果を表す。

ナビエ-ストークス方程式から平均流に関する方程式を引くことで、変動流に関する次の方程

式を得る。

$$\frac{\partial v'_k}{\partial x_k} = 0 \quad (4.7.58)$$

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{v}_k v'_i + v'_k \bar{v}_i + v'_k v'_i - \overline{v'_k v'_i}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 v'_i + f'_i \quad (4.7.59)$$

更に、上の第 2 式に v'_j を乗じて平均をとり、添え字 i と j を入れ替えた式を加えることで、レイノルズ応力の時間発展式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{v'_i v'_j}) + \bar{v}_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{v'_i v'_j}) = & -\frac{1}{\rho} \overline{v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} - \frac{1}{\rho} \overline{v'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \nu \left(\nabla^2 \overline{v'_i v'_j} - 2 \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v'_j}}{\partial x_k} \right) \\ & + \overline{v'_i f'_j} + \overline{v'_j f'_i} - \overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \overline{v'_j}}{\partial x_k} - \overline{v'_j v'_k} \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{v'_k v'_i v'_j} \end{aligned} \quad (4.7.60)$$

平均流の方程式に現れるレイノルズ応力の時間発展は上式により求められるが、上式には 3 次のモーメント $\overline{v'_k v'_i v'_j}$ が現れるため、これだけでは解くことができない。3 次のモーメントの時間発展式も同様にして書き下すことができるが、そこには更に高次のモーメントが現れ、堂々巡りになる。よって、平均流の方程式に始まるこれらの方程式系を解くためには、何らかの考察を行って高次のモーメントを低次のモーメントで表すことで、方程式系を閉じなければならない^{†40}。これは完結問題 (closure problem) と呼ばれる。

フーリエ成分の方程式

一様乱流を想定して、変動場のフーリエ成分についての方程式を考える。平均流が無い場合 ($\bar{\mathbf{v}} = 0$) について、変動流に関する方程式 (4.7.58), (4.7.59) を節 4.7.2 で述べた方法でフーリエ変換すると、次式を得る。引数 t は省略する。

$$k_i \tilde{v}_i(\mathbf{k}) = 0 \quad (4.7.61)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{v}_i(\mathbf{k}) = -ik_j \left(\frac{2\pi}{L} \right)^3 \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \tilde{v}_j(-\mathbf{p}) \tilde{v}_i(-\mathbf{q}) \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \frac{i}{\rho} k_i \tilde{p}(\mathbf{k}) - \nu k^2 \tilde{v}_i(\mathbf{k}) + \tilde{f}_i(\mathbf{k}) \quad (4.7.62)$$

$\tilde{f}_i(\mathbf{k})$ は外力のフーリエ成分である。和は与えられた \mathbf{k} に対して三角関係 $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$ を満たすような \mathbf{p}, \mathbf{q} の組についてとる^{†41}。上の第 2 式に k_i を作用させて第 1 式を用いると、圧力の

^{†40} この問題の構造は、第 6 章で説明するように、流体の保存則を運動論の方程式のモーメントとして見たときと同じである。運動論の場合は、分布関数の局所マクスウェル-ボルツマン分布からのずれが小さいという仮定の下で、粘性項や拡散項を平均量 (ρ, \mathbf{v}, T など) によって表すことで、方程式系を閉じる。

^{†41} \mathbf{p}, \mathbf{q} で和をとる項は変動流の移流項のフーリエ変換

$$-\frac{1}{(2\pi)^3} \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (v'_j v'_i) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3x = -\frac{ik_j}{(2\pi)^3} \int_V v'_j v'_i \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3x$$

を計算すると出てくる。 v'_j と v'_i をそれぞれ式 (4.7.24) により展開し、デルタ記号の公式 (4.7.28) を用いる。

フーリエ成分が次のように表される。

$$\frac{\tilde{p}(\mathbf{k})}{\rho} = -\frac{k_i k_j}{k^2} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \tilde{v}_i(-\mathbf{p}) \tilde{v}_j(-\mathbf{q}) \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}} \quad (4.7.63)$$

これを代入することで、式 (4.7.62) は次のように書き換えられる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) \tilde{v}_i(\mathbf{k}) = -\frac{i}{2} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \tilde{P}_{ijl}(\mathbf{k}) \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \tilde{v}_j(-\mathbf{p}) \tilde{v}_l(-\mathbf{q}) \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}} + \tilde{f}_i(\mathbf{k}) \quad (4.7.64)$$

$$\text{ただし,} \quad \tilde{P}_{ijl}(\mathbf{k}) = k_l \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) + k_j \left(\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{k^2}\right) \quad (4.7.65)$$

エネルギースペクトルの方程式

式 (4.7.65) に $\tilde{v}_i(-\mathbf{k}) = \tilde{v}_i^*(\mathbf{k})$ を乗じて平均をとり、実部をとる^{†42}。すると、式 (4.7.34) より、エネルギースペクトルテンソルのトレースに関する次の方程式を得る。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right) \frac{1}{2} \tilde{Q}_{ii}(\mathbf{k}) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \tilde{T}(\mathbf{k}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) + \tilde{F}(\mathbf{k}) \quad (4.7.66)$$

$$\text{ただし,} \quad \tilde{T}(\mathbf{k}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \text{Im} \left[\tilde{P}_{ijl}(\mathbf{k}) \overline{\tilde{v}_i(\mathbf{k}) \tilde{v}_j(\mathbf{p}) \tilde{v}_l(\mathbf{q})} \right] \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{p}+\mathbf{q}} \quad (4.7.67)$$

$$\tilde{F}(\mathbf{k}) = \text{Re} \left[\overline{\tilde{v}_i^*(\mathbf{k}) \tilde{f}_i(\mathbf{k})} \right] \quad (4.7.68)$$

$\tilde{T}(\mathbf{k}; \mathbf{p}, \mathbf{q})$ は三角関係 $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$ を満たす 3 成分間の相互作用によって波数 \mathbf{k} 成分のエネルギーが増加する割合を表す。 $\tilde{T}(\mathbf{k}; \mathbf{p}, \mathbf{q})$ は次の関係を満たす。

$$\tilde{T}(\mathbf{k}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) + \tilde{T}(\mathbf{p}; \mathbf{q}, \mathbf{k}) + \tilde{T}(\mathbf{q}; \mathbf{k}, \mathbf{p}) = 0 \quad (4.7.69)$$

つまり、3 成分間の相互作用によって \mathbf{k} 成分のエネルギーが増加した場合、等しい分だけ \mathbf{p} 成分と \mathbf{q} 成分のエネルギーは減る。エネルギーのやり取りを全ての波数に渡って合計するとゼロになる。

$$\sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \tilde{T}(\mathbf{k}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0 \quad (4.7.70)$$

更に、式 (4.7.66) を $|\mathbf{k}|$ が一定の球面で合計した方程式を考える。次の量を導入する。

^{†42} 複素共役をとった式を加えて 1/2 倍する操作と等価である。

$\Delta k = 2\pi/L$ と書く。

$$E(k)\Delta k = \sum_{k-\Delta k/2 < |\mathbf{k}| < k+\Delta k/2} \frac{1}{2} \tilde{Q}_{ii}(\mathbf{k}) \quad (4.7.71)$$

$$T(k)\Delta k = \sum_{k-\Delta k/2 < |\mathbf{k}| < k+\Delta k/2} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \tilde{T}(\mathbf{k}; \mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad (4.7.72)$$

$$F(k)\Delta k = \sum_{k-\Delta k/2 < |\mathbf{k}| < k+\Delta k/2} \tilde{F}(\mathbf{k}) \quad (4.7.73)$$

$E(k)$ は $L \rightarrow \infty$ の極限で式 (4.7.38) によって導入されるエネルギースペクトル関数である。式 (4.7.66) は次のようになる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right) E(k) = T(k) + F(k) \quad (4.7.74)$$

$T(k)$ は他の波数成分との相互作用の結果、注目する波数成分のエネルギーが増える効果を表す。 $F(k)$ は外力によって注目する波数成分に注入されるエネルギーを表す。

$T(k)$ をある波数 k より大きな波数に渡って合計した量

$$\Pi(k) = \frac{2\pi}{L} \sum_{k' \geq k} T(k') \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \int_k^\infty T(k') dk' \quad (4.7.75)$$

はエネルギー流束関数と呼ばれる。これは、三角関係を満たす 3 成分間の相互作用により、波数 k を横切って波数の小さな方から大きな方へ単位時間に輸送されるエネルギー量を表す。式 (4.7.74) を全波数帯で積分すると、式 (4.7.70) より $T(k)$ に関する項が消え、変動流による単位質量あたりの平均運動エネルギー $K = \overline{v'^2}/2$ に関する次の方程式を得る。

$$\frac{dK}{dt} = -2\nu \int_0^\infty k^2 E(k) dk + \int_0^\infty F(k) dk \quad (4.7.76)$$

右辺第 2 項は外力による仕事であり、第 1 項は粘性散逸によるエネルギー損失を表す。 $2\nu k^2 E(k)\Delta k$ は $(k - \Delta k/2)$ と $(k + \Delta k/2)$ の間の波数帯でのエネルギー散逸の大きさを表す。

4.7.4 コルモゴロフの現象論

レイノルズ数が大きく、十分に発達した乱流では、大小様々なスケールの渦運動が励起され、相互作用している。各スケールの運動成分の持つ運動エネルギーは前節で述べたエネルギースペクトル関数 $E(k)$ によって表される。非圧縮一様等方乱流の場合において、幾つかの仮定と次元解析から、 $E(k)$ が従うべき法則が導かれる。実験室や数値計算による乱流は実際にその法則に従うことが知られている。本節では等方的な乱流の現象論的な考察をする。木田重雄 & 柳瀬眞一郎 (1999) の 5.2 節を参考にした。

非圧縮一様等方乱流の場合、乱流の異なるスケール (波数) 間のエネルギーのやり取りは次のように考えられている。例えば熱対流における浮力のように、外界からの作用によってあるスケールの流れが励起される。つまり、特定の波数 k_0 を中心にエネルギーが注入される。すると、そのスケールの運動は小さなスケールの渦を励起し、その渦は更に小さなスケールの渦を励起する。こうして、小さなスケール、つまり波数のより大きな成分にエネルギーが伝達される。小さなスケールでは粘性による平滑化の効果がより強くはたらき、運動の生成を抑制する。このようにして、大きな波数の成分の運動エネルギーは、粘性散逸によって熱エネルギーに変換される。

前節の言葉を用いると、上で述べた描像はエネルギー流束関数 $\Pi(k)$ が典型的に正の値をとるということを言っている。エネルギーの伝達は三角関係 $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$ を満たす 3 つのフーリエ成分間の相互作用によって表されると述べた。十分に大きなレイノルズ数の場合は、波数の大きさが同程度 $k \sim p \sim q$ の成分間での伝達の寄与が大きいことが数値的にも (e.g. Mininni et al., 2008) 理論的にも (e.g. 木田重雄 & 柳瀬眞一郎, 1999; Aluie & Eyink, 2009) 示されている。つまり、波数が大きく異なる成分間でのエネルギーのやり取りは少ない。このことをエネルギー伝達の (波数空間における) 局所性 (locality) という。外から励起された大きなスケールのエネルギーは多数のエネルギー交換過程を経て小さなスケールの成分に伝わっていくため、小さなスケールの運動は大きなスケールの運動の詳細には強く依存しなくなる。つまり、小スケールの運動はエネルギー注入過程の詳細に依らず普遍的な性質を持つと考えられる。

ここまで述べたことを図 4.19 にまとめる。波数 k_0 付近で外力によってエネルギー注入が起きるとする。このときに単位時間あたりに注入されるエネルギーを ϵ と書く。 k_0 は節 4.7.1 で述べた相関長 (積分距離) に相当する。つまり、相関長を l_0 とすれば、 $k_0 \sim 1/l_0$ である。 k_0 付近の波数領域をエネルギー含有領域 (energy-containing range) という。乱流が平均として定常状態にあれば、エネルギーの散逸率も ϵ になるはずである。散逸はコルモゴロフ長 l_K に対応する波数 $k_K = 1/l_K$ で効率よく起きることを後述する。 k_0 から k_K までフーリエ成分間の局所的な相互作用によってエネルギーが伝達される。この輸送率は実際には k にも時間にも依ると考えられるが、後の考察では一様定常に ϵ であると仮定する。このように、エネルギーが大きなスケールから小さなスケールに伝達される構造をエネルギーカスケードという。

エネルギースペクトルの小スケール成分が、平均のエネルギー輸送率 ϵ と動粘性率 ν のみに依存すると仮定する (コルモゴロフの第 1 仮説)。すると、次元解析^{†43} より、 $f(x)$ を無次元関数として、次式を得る。

$$E(k) = \nu^{5/4} \epsilon^{1/4} f(k/k_K) \quad (4.7.77)$$

$$\text{ただし, } k_K = \nu^{-3/4} \epsilon^{1/4} \quad (4.7.78)$$

k_K はコルモゴロフ波数と呼ばれる。これは、 $E(k)$ を $\nu^{5/4} \epsilon^{1/4}$ で規格化し、 k を k_K で規格化してプロットすると、 k が k_0 より十分に大きい領域では乱流の種類に依らず同じ曲線 $y = f(x)$

^{†43} 両辺の次元が等しくなるような指数の組を見つけること。

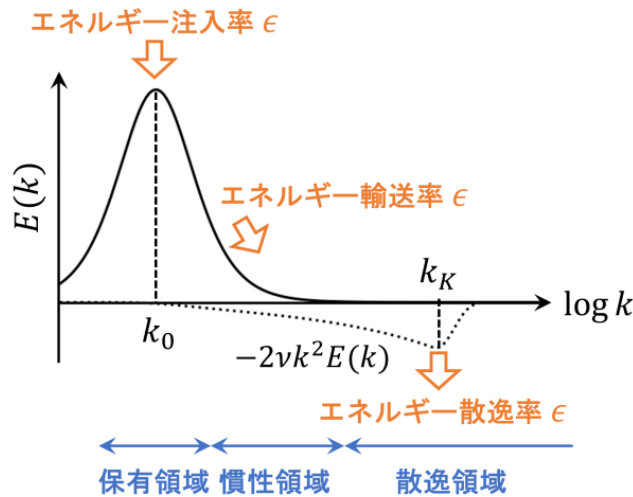


図 4.19 乱流のエネルギースペクトルとエネルギー伝達の模式図：木田重雄 & 柳瀬眞一郎 (1999) の図 5.1 を参考にした。

に乗ることを言っている。これをコルモゴロフの相似則といい、これが成り立つ波数領域を普遍領域 (universal range) という。

エネルギー保有領域の空間スケール l_0 と変動流のスケール v_0 を用いてレイノルズ数を $Re = v_0 l_0 / \nu$ と定める。 l_0 のスケールでの変動場の時間スケールを $\tau_0 \sim l_0 / v_0$ とし、 $\epsilon \sim v_0^3 / \tau_0 \sim v_0^3 / l_0$ と見積もると、 $k_K / k_0 \sim Re^{3/4}$ となる。レイノルズ数が大きな系では k_0 と k_K のオーダーが離れるため、普遍領域の低波数側に粘性に依らない領域が発生すると考えられる (コルモゴロフの第 2 仮説)。式 (4.7.77) が ν に依らないとすると、 $f(x) \propto x^{-5/3}$ となり、次式が成り立つ。

$$E(k) = C_K \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \tag{4.7.79}$$

C_K は普遍定数であり、コルモゴロフ定数と呼ばれる。このべき法則はコルモゴロフのマイナス 3 分の 5 乗則と呼ばれ、これが成り立つ波数領域を慣性領域 (inertial range) という。コルモゴロフ定数の値は乱流の観測から $C_K = 1.4 \sim 1.8$ の範囲にあるとされている (Sreenivasan, 1995)。

$f(x)$ の具体的な形は、例えば Warhaft (2002) の Fig. 4 や木田重雄 & 柳瀬眞一郎 (1999) の図 5.3 を参照されたい。これらの図を見ると、確かに様々な実験結果が $k \gg k_0$ で同じ曲線に収束していることが分かる。 $f(x)$ は $k \ll k_K$ では上で述べた 3 分の 5 乗則に従い、 $k \gg k_K$ では指数関数的に減少する (木田重雄 & 柳瀬眞一郎, 1999, 6.5 節)。つまり、 k_K より大きな成分は粘性により強く減衰していると解釈できる。コルモゴロフ長は乱流の最小渦の大きさを表す。慣性領域内のスケール $k = 1/l$ での変動場の時間スケールは、次元解析より

$$\tau \sim \epsilon^{-1/3} k^{-2/3} \sim \epsilon^{-1/3} l^{2/3} \tag{4.7.80}$$

と見積もられる。上式と粘性散逸の時間スケール l^2/ν を等値することで、コルモゴロフ長が得られる。コルモゴロフ長より大きなスケールでは乱流の時間スケールが粘性散逸のそれよりも短い、コルモゴロフ長付近では両者が同程度になり、粘性の効果が強く現れるわけである。

4.7.5 [トピック] 太陽対流層の差動回転

太陽対流層は差動回転をしていることを節 4.3.3 で述べた (図 4.11)。その角速度の対流層の流れ場を経度方向一周に渡る平均場 ($\langle \rangle$) とそこからのずれ (乱流、') に分ける考え方は平均場理論と呼ばれることがある。平均場の ϕ 成分 $\Omega = \langle v_\phi \rangle / (r \sin \theta)$ は子午面内の各点での自転角速度の分布である。一方で、平均場の子午面内成分は子午面流と呼ばれ、 \mathbf{V}^m と書くことにする。この枠組みでは、エントロピーの分布やレイノルズ応力を介した乱流による運動量輸送の効果の影響を受けて Ω と \mathbf{V}^m の分布が決定される。 Ω と \mathbf{V}^m も相互作用をする。その際に実現することが期待される 2 つのバランスについて説明する。関連するレビューには、例えば Rüdiger & Hollerbach (2004), Miesch (2005), Brun & Rempel (2009), Kitchatinov (2012) がある。

平均場理論の基礎方程式

平均の角速度 $\Omega_\odot / (2\pi) = 430$ nHz で自転する座標系で考える。1 つめのバランスは節 4.3.3 で述べた温度風平衡であり、渦度方程式の ϕ 成分を考える。再掲すると、次のようになる。

$$\frac{\partial \langle \omega_\phi \rangle}{\partial t} + [\dots] = 2\Omega_\odot r \sin \theta \frac{\partial \Omega}{\partial z} - \frac{g}{c_p r} \frac{\partial \langle s_1 \rangle}{\partial \theta} \quad (4.7.81)$$

左辺の [...] には平均場による移流を表す項やレイノルズ応力の項、ローレンツ項が含まれる。右辺の 2 項が大きな寄与を持ち大まかにはつりあっていると考えられる。この 2 項の大きさに違いがあると、 $\langle \omega_\phi \rangle$ 、すなわち子午面流が駆動される。

エントロピーの平均 $\langle s_1 \rangle$ の分布は非弾性近似における熱輸送の式 (4.6.75) を平均した式に従って決定される。運動方程式を平均するとレイノルズ応力の項が現れるのと同様に、熱輸送の式には $\nabla \cdot \langle s_1' \mathbf{v}' \rangle$ の項が加わることになる^{†44}。これは乱流によるエントロピー輸送の効果を表す。レイノルズ応力だけでなく、この効果も何らかの考察によって平均場で表されなければ、平均場の方程式系は閉じない。

対流層内部で重要な 2 つめのバランスは運動方程式の ϕ 成分を表すことで得られる。非弾性近似の運動方程式 (4.6.71) の平均をとり、 ϕ 成分を考えると、次式を得る。ただし、ローレン

^{†44} 添え字 1 は非弾性近似において基準状態 (添え字 a) とそこからのずれに分けたときのものである。

ツ項はマクスウェル応力の形式で表した。

$$\rho_a(r \sin \theta)^2 \frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{F} \quad (4.7.82)$$

$$F_i = r \sin \theta \rho_a \left[\langle v_i \rangle \Omega r \sin \theta + \langle v'_i v'_\phi \rangle - \frac{1}{\mu_0 \rho_a} (\langle B'_i B'_\phi \rangle + \langle B_i \rangle \langle B_\phi \rangle) \right] \quad (4.7.83)$$

\mathbf{F} は角運動量のフラックスを表す。第 1 項は子午面流による輸送、第 2 項はレイノルズ応力、第 3 項はマクスウェル応力である。レイノルズ応力によって角運動量が赤道方向へ運ばれることで、差動回転が駆動される。マクスウェル応力を無視した場合、平衡状態ではレイノルズ応力項と子午面流による移流項がつりあうことになる。

ローレンツ項を考えない場合、式 (4.7.81), (4.7.82) とエントロピーについての方程式に加え、子午面流についての質量保存則

$$\nabla \cdot (\rho_a \mathbf{V}^m) = 0 \quad (4.7.84)$$

と乱流輸送項 (レイノルズ応力とエントロピーの輸送) の適切な表式が与えられれば、 $\Omega, \mathbf{V}^m, \langle s_1 \rangle$ についての方程式系が閉じる。

極と赤道の温度差の問題

節 4.3.3 で述べたように、日震学によって観測を基に推定される差動回転の分布を実現するためには、極が赤道よりも数 K 程度暖かいことが必要である。この駆動源の候補には次の 2 つがある。1 つめはコリオリの力の影響を受けた乱流によって熱が極に向けて輸送されている可能性である。平均場の枠組みでは上述した $\nabla \cdot \langle s'_1 \mathbf{v}' \rangle$ 項によって運ばれるということである。例えば Kitchatinov & Olemskoy (2011) は、フーリエ解析によって計算された $\nabla \cdot \langle s'_1 \mathbf{v}' \rangle$ 項の表式を用いて平均場理論を展開し、極の加熱と現実的な差動回転分布の再現に成功している (Kitchatinov, 2016, Fig. 3 も参照)。高解像度の 3 次元全球計算^{†45}では、この効果が十分に現れないという指摘もある (e.g. Brun & Rempel, 2009) が、磁場の効果も考慮すれば十分な熱を輸送できるとする研究もある (Hotta, 2018)。2 つめの候補は、対流層の下に放射層があることに起因する効果である。対流層の底には $d\langle s \rangle / dr > 0$ であるような安定層が存在するが、高緯度において $\langle v_r \rangle < 0$ 、低緯度において $\langle v_r \rangle > 0$ であるような子午面流が安定層を貫いていれば、移流によってエントロピーの緯度勾配ができる。この緯度勾配が乱流輸送によって対流層全体に染み渡れば、対流層内に緯度勾配ができるのではないかという考えである。この効果は平均場理論 (Rempel, 2005) でも 3 次元全球計算 (Brun et al., 2011) でも再現されている。

子午面流の分布の問題

執筆中 (Choudhuri, 2021; Rajaguru & Antia, 2020)

^{†45} 対流層全体を模した 3 次元的な箱の中で高解像度の数値計算を行い、直接的に乱流と差動回転を再現する試み。

4.8 MHD 乱流

4.9 ダイナモ理論

4.10 不連続面

4.11 磁気リコネクション

5

放射輸送

高温のプラズマ中では、移流や熱伝導、応力による仕事に加えて、放射場によるエネルギー輸送も考慮する必要がある。空間中に存在する光（電磁波）の巨視的な意味での強度分布（放射場）を考えると、流体粒子の内部エネルギーは放射場によって失われたり、逆に放射場から受け取ったりする。また流体は、放射圧として放射場と運動量もやり取りしている。放射のダイナミクスを数学的に記述しようとする、ある程度の単純化をしてもなお、その支配方程式が複雑な形をする。そのため、放射を考えるとときには如何に近似をして方程式を実用的な形にするかが話の肝のひとつになる。また、放射のダイナミクスを定式化する際には、粒子による光子の放出、吸収、散乱といった微視的な現象による効果を取り入れる必要がある。

本章では、まず、節 5.1 で放射輸送の記述方法を説明し、節 5.2 で放射輸送の性質について重要なものをまとめる。節 5.3 では、原子やイオンが光子を放射・吸収する素過程について考察し、それらの過程の効果を放射輸送方程式に取り入れる方法を説明する。節 5.4 では、放射輸送が関与する流体现象を考える際に、MHD 方程式系に加えて計算資源を消費する放射輸送方程式を解かなくて済むようにするための近似手法について説明する。ここまでの議論は放射が無偏光であるとみなしているが、最後に節 5.5 で偏光した放射を扱う手法を説明する。

例えば太陽の表面から放たれる光を観測することによって、表面の気体の速度や磁場の情報を得ることができる。放射輸送理論はこのような光の観測の土台となる理論でもある。本章では所々にトピックと称した節を設け、光を観測することによって何が「見える」のかについて、初歩的な事項を説明する。

本章の骨格は Castor (2004) を参考にし、所々で Mihalas & Mihalas (1999), Rybicki & Lightman (1985) も参考にしている。また、原子過程について (節 5.3) はサクライ (1967)、太陽でのスペクトル線形成の説明 (節 5.3.3) では Rutten (2003)、偏光について (節 5.5) は Blum (2012) も参考にしている。また、放射に関する各量の呼び方には複数の流儀があるが、本書は日本天文学会がウェブ上で公開している天文学辞典^{†1}を参考にしている。放射輸送についての日本語の教科書としては 梅村雅之 et al. (2016) を薦める。また、放射の素過程 (原子過程) についての教科書には 中村文隆 et al. (2022) がある。相対論的な流体も含め、放射輸送を考慮した流体力学については、他にも Kato & Fukue (2020) が詳しい。

^{†1} <https://astro-dic.jp/> (日本天文学会 / インターネット天文学辞典編集委員会, 2021 年 5 月 2 日閲覧)

5.1 放射輸送の記述方法

例えば、太陽から発せられる放射は図 3.11 のように、 10^3 nm 程度の波長の電磁波が中心となっている。MHD を使って調べたい現象はそれらの波長よりずっと長い空間スケールを持つ^{†2}。電磁波をその波長よりずっと長い空間スケールかつ振動周期よりずっと長い時間スケールで見ると、その波としての性質は忘れて幾何学的な光線 (ray) として考えることができる。或いは光速 c で動き、 $h\nu$ のエネルギーと $h\nu/c$ の運動量を持つボース粒子 (光子) の集団と捉えることもできる。マクスウェル方程式が線形なので、非相対論的な時空間を考える限り光子同士の相互作用はない。しかし、光子は物質の粒子と衝突・散乱したり吸収・放射されたりと相互作用をするので、物質との間でエネルギーや運動量のやり取りをする。このようなダイナミクスは、光子の空間分布とその位置での速度の向きの分布に相当する放射強度という量を考えることで、巨視的に記述される。

5.1.1 巨視的な放射場

空間中のある点 (x, y, z) において、単位ベクトル

$$\mathbf{n} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \quad (5.1.1)$$

に垂直な面積 dA の面を考える。この点において、面積 dA を通って、 \mathbf{n} を含む微小立体角 $d\Omega$ の向きへ、時間 dt の間に、放射によって輸送されるエネルギーを dE としたとき、巨視的な意味での放射強度 (specific intensity) I_ν は次のように定義される。

$$dE = I_\nu(x, y, z, t, \theta, \phi, \nu) dA d\Omega dt d\nu \quad (5.1.2)$$

$$= I_\nu(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}, \nu) dA d\Omega dt d\nu \quad (5.1.3)$$

ν は電磁波の振動数である。言い換えると $I_\nu d\nu$ は、ある点で特定の方向 \mathbf{n} に伝搬する電磁波のうちの振動数 $\nu \sim \nu + d\nu$ の成分が、単位面積、単位立体角、単位時間あたりに輸送するエネルギーである。よって、 I_ν は座標 (x, y, z) 、時刻 t 、伝搬方向 (θ, ϕ) 、振動数 ν の計 7 変数の関数になる。 I_ν は光子の分布関数 (ある点である時刻に速度 $c\mathbf{n}$ を持つ振動数 ν の光子の数) に対応する量である^{†3}。添え字の ν は単位振動数あたりの量であることを明示するためのもので、 I_ν を「単色の (monochromatic)」放射強度と表現することもある。単位振動数あたりの代わりに、

^{†2} 参考までに、太陽の半径は約 70 万 km である。例えば太陽フレアの空間スケールは 1 – 10 万 km (Shibata & Takasao, 2016) で、アルベーン波 (節??参照) がこの空間スケールを伝搬するのにかかる時間は秒や分のスケールである。

^{†3} 具体的には、6 次元相空間 $d^3x d^3p$ 中において、時刻 t にある位置 x_i にいて運動量 p_i を持つ粒子の数を $f(x_i, p_i, t) d^3x d^3p$ と定義した場合の f を分布関数と言う。ある特定の方向に進む光子のエネルギーフラックスは

$$f d^3p \cdot h\nu \cdot c = f p^2 dp d\Omega \cdot h\nu \cdot c = f h^4 \nu^3 d\nu d\Omega / c^2$$

電磁波の波長 $\lambda = c/\nu$ を用いて単位波長あたりで考えることもあり、その場合は I_λ と書く。 I_ν を全振動数で積分した全放射強度

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu \tag{5.1.4}$$

を考えることもある^{†4}。一方で、 I_ν を伝搬方向について平均した平均強度

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_\nu d\Omega \tag{5.1.5}$$

を考えることもある。放射が等方的、すなわち I_ν が伝搬方向 (θ, ϕ) に依らない場合は $I_\nu = J_\nu$ となる。

時間 dt の間に光子は cdt だけ進むので、 dE を体積 $cdtdA$ で割ることによって、

$$\frac{dE}{cdtdA} = \frac{I_\nu}{c} d\Omega d\nu \tag{5.1.6}$$

は \mathbf{n} の方向へ伝搬する振動数 ν の成分の、エネルギー密度への寄与と考えることができる。よって全立体角 4π で積分することによって、単色の放射エネルギー密度は

$$u_\nu = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I_\nu d\Omega = \frac{4\pi}{c} J_\nu \tag{5.1.7}$$

となる。さらに全振動数で積分することで、全エネルギー密度は

$$u = \frac{1}{c} \int d\nu \int_{4\pi} I_\nu d\Omega \tag{5.1.8}$$

と表せる。

放射強度に $1, \mathbf{n}, \mathbf{nn}, \dots$ を乗じて^{†5}全立体角で積分した量を「 I_ν に対する伝搬方向 Ω のモーメント」と表現する。0 次モーメントは前述した J_ν や u_ν である。1 次モーメント

$$\mathbf{F}_\nu = \int_{4\pi} \mathbf{n} I_\nu d\Omega \tag{5.1.9}$$

と書け、これは放射強度を用いると $I_\nu d\nu d\Omega$ に相当する量なので、

$$I_\nu = fh^4\nu^3/c^2$$

という関係がある。

^{†4} 放射場を表す各量 $I_\nu, J_\nu, F_\nu, P_\nu$ などについて一般に、 Q_ν と書かれる物理量と Q と書かれる物理量の間には $Q = \int_0^\infty Q_\nu d\nu$ という関係がある、というルールで記述する。

^{†5} ベクトル \mathbf{n} 同士のテンソル積を \mathbf{nn} と書くことにする。デカルト座標系で成分表示すると、 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ として、

$$\mathbf{nn} = \begin{pmatrix} n_1n_1 & n_1n_2 & n_1n_3 \\ n_2n_1 & n_2n_2 & n_2n_3 \\ n_3n_1 & n_3n_2 & n_3n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\theta \cos^2\phi & \sin^2\theta \sin\phi \cos\phi & \sin\theta \cos\theta \cos\phi \\ \sin^2\theta \sin\phi \cos\phi & \sin^2\theta \sin^2\phi & \sin\theta \cos\theta \sin\phi \\ \sin\theta \cos\theta \cos\phi & \sin\theta \cos\theta \sin\phi & \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

と表されるような 2 階テンソルである。テンソルについては付録 1.B も参考にして欲しい。

はフラックスベクトルと呼ばれる。フラックスの定義にはエネルギー密度の場合のように $1/c$ の係数が付かないことに注意されたい。フラックスの意味について説明する。空間中のある微小面積 dA を考え、その面に垂直な向きで面積の大きさを持ったベクトルを $d\mathbf{A}$ とする。このとき、 $\mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{A}$ は $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{A} I_\nu d\Omega$ を全方向の I_ν について足し合わせたものになる。 $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{A} I_\nu d\Omega$ は、 $d\mathbf{A}$ と同じ向きの放射については正、反対の向きの放射については負の符号になる。つまり $\mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{A}$ は、微小面積 dA を通って $-d\mathbf{A}$ の側から $d\mathbf{A}$ の側へ輸送される正味のエネルギー量 (ただし単位時間、単位振動数あたり) と解釈できる。このことから、 \mathbf{F}_ν は放射によって起こる正味のエネルギー移動のフラックスと言える。放射が等方的な場合は \mathbf{F}_ν はゼロである。

2 次モーメント (2 階対称テンソル)

$$\mathbf{P}_\nu = \frac{1}{c} \int_{4\pi} \mathbf{n}\mathbf{n} I_\nu d\Omega \quad (5.1.10)$$

は放射圧テンソルと呼ばれる。これは放射の存在によって流体に働く応力を意味するが、詳しい説明は節 5.1.6 まで待って欲しい。 \mathbf{P}_ν は行列で成分表示できるが、そのトレース (対角成分の和) は、

$$\text{Tr}(\mathbf{P}_\nu) = \frac{1}{c} \int_{4\pi} \text{Tr}(\mathbf{n}\mathbf{n}) I_\nu d\Omega \quad (5.1.11)$$

$$= \frac{1}{c} \int_{4\pi} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) I_\nu d\Omega \quad (5.1.12)$$

$$= \frac{1}{c} \int_{4\pi} I_\nu d\Omega \quad (5.1.13)$$

$$= u_\nu \quad (5.1.14)$$

となる。放射が等方的な場合は、単位テンソルを \mathbf{I} として、

$$\mathbf{P}_\nu = P_\nu \mathbf{I} \quad (5.1.15)$$

$$\text{ただし, } P_\nu = \frac{4\pi}{3c} I_\nu = \frac{4\pi}{3c} J_\nu \quad (5.1.16)$$

と計算できる^{†6}。この場合 $\text{Tr}(\mathbf{P}_\nu) = 3P_\nu$ なので、放射が等方的な場合の放射圧は、

$$P_\nu = \frac{1}{3} u_\nu \quad (5.1.17)$$

という関係を満たすことが分かる。一方で反対の極限として、放射が特定の方向 (例えば z 方向とする) のみである

$$I(\mu) = I_0 \delta(\mu - 1) \quad (5.1.18)$$

状況を考える。ただし、 μ は放射の方向 (θ, ϕ) の変数 θ に対して

$$\mu = \cos \theta \quad (5.1.19)$$

^{†6} $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ として実際にデカルト座標系の成分表示で計算すると出てくる。

と定義される変数である。特に x, y 方向に等方な放射、つまり ϕ に依らない放射を考える場合などには、 μ を使って放射方向を表すことがよくある。このとき、 $d\Omega = -d\mu d\phi$ として式 (5.1.10) を実際に計算すると、

$$\mathbf{P}_\nu = P_\nu \hat{z} \hat{z}, \quad P_\nu = \frac{2\pi I_0}{c} \quad (5.1.20)$$

となり、一方で $u_\nu = 2\pi I_0/c, \mathbf{F}_\nu = 2\pi I_0 \hat{z}$ と計算できるので、

$$P_\nu = u_\nu = \frac{\mathbf{F} \cdot \hat{z}}{c} \quad (5.1.21)$$

であることが分かる。このような状況は英語で streaming limit と呼ばれる。本書では流状極限と訳しておく。

また、 J_ν の親戚として、

$$\mathbf{H}_\nu = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \mathbf{n} I_\nu d\Omega = \frac{1}{4\pi} \mathbf{F}_\nu \quad (5.1.22)$$

$$\mathbf{K}_\nu = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \mathbf{n} \mathbf{n} I_\nu d\Omega = \frac{c}{4\pi} \mathbf{P}_\nu \quad (5.1.23)$$

という 1 次、2 次モーメントを考えることもある。 \mathbf{H}_ν はエディントンフラックス、 \mathbf{K}_ν は K 積分 (K-integral) と呼ばれる。

5.1.2 放射輸送方程式

放射場の分布とその時間発展を司る方程式が放射輸送方程式 (radiative transfer equation) である。まずは物質との相互作用がない場合を考える。ある時刻 t に座標 \mathbf{x} に位置していて、速度 $c\mathbf{n}$ で動いている光子は、微小時間 δt 後には座標 $\mathbf{x} + c\delta t\mathbf{n}$ でその速度やエネルギー (すなわち振動数) を変えることなく飛んでいる。よって光子の数が保存されることより、

$$I_\nu(\mathbf{x} + c\delta t\mathbf{n}, t + \delta t, \mathbf{n}, \nu) = I_\nu(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}, \nu) \quad (5.1.24)$$

が成り立つ。節 1.3.2 でラグランジュ微分を求めたときと同じような議論^{†7}により、

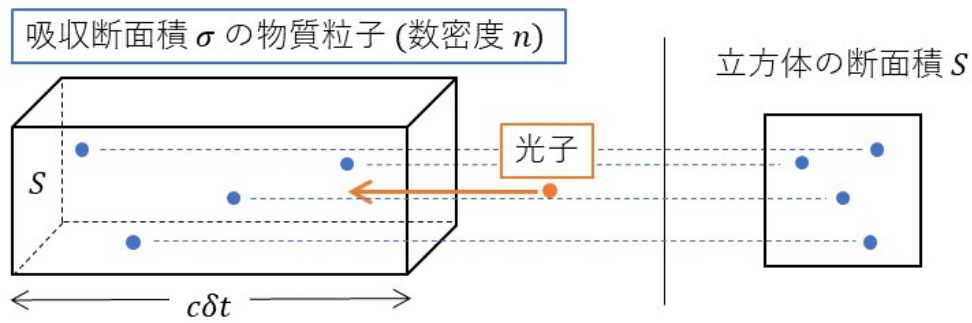
$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu = 0 \quad (5.1.25)$$

という式が導かれる^{†8}。

次に、物質による光子の吸収を考える。光子の吸収量 δI_ν は経験則として放射強度に比例することが知られている。このことは次のように解釈できる。物質粒子 (気体粒子) と光子が確率

^{†7} 左辺をテイラー展開して δt の 2 次以上の項を無視するという事。

^{†8} 第 6 章を読まれた方はこの式がボルツマン方程式に相当する式であることが分かるはずである。ただし、光子は力を受けないので速度の移流の項はない。節 7.9.3 で相対論的な放射輸送方程式について説明する。



光子が時間 δt の間に吸収される確率
 = 立方体内にある物質粒子 $nSc\delta t$ 個 が占める断面積の割合
 = $\sigma \cdot nSc\delta t / S$
 = $n\sigma c\delta t$

図 5.1 物質による吸収の巨視的概念

的に衝突することで吸収が起こるが、各物質粒子に振動数 ν の光子がこれ以上近づくと吸収が起こる、という有効な断面積を σ_ν とする。物質粒子の数密度を n とすると、図 5.1 の考え方によって、時間 δt の間に光子が物質粒子に吸収される確率は $n\sigma_\nu c\delta t$ と書くことができる。逆に言うと $(1 - n\sigma_\nu c\delta t)$ の確率で光子は吸収されずに $c\delta t$ の距離を進む。つまり δt の間に吸収によって減る放射強度の量は、

$$\delta I_\nu = -n\sigma_\nu c\delta t I_\nu \tag{5.1.26}$$

$$= -\alpha_\nu c\delta t I_\nu \tag{5.1.27}$$

$$= -\rho\kappa_\nu c\delta t I_\nu \tag{5.1.28}$$

と書ける。 $\alpha_\nu = n\sigma_\nu$ は吸収係数 (absorption coefficient) と呼ばれる。或いは不透明度 (opacity) $\kappa_\nu = \alpha_\nu/\rho$ を用いて表すこともある。 ρ は物質の質量密度である。また、 $l_\nu = 1/\alpha_\nu$ は光子が物質によって吸収されずに進むことができる平均的な距離と解釈できる。この l_ν のことを平均自由行程 (mean free path) と言う。平均自由行程については節 5.2.1 でもう一度詳しく説明する。一方で、物質によって放射される量は放射強度に依らず、物質の性質によってのみ決まるので、 δt の間に物質からの放射によって既存の放射強度に加えられる量は、

$$\delta I_\nu = j_\nu c\delta t \tag{5.1.29}$$

と書ける。 j_ν は放射率 (emissivity) と呼ばれる。以上のことから、放射と吸収を考慮した放射輸送方程式は、

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu \tag{5.1.30}$$

となる。これが放射輸送方程式の基本形である。吸収係数と放射率は電磁波と物質粒子の微視的な相互作用 (原子過程) を考えることで決定される。原子過程については節 5.3 で説明する。例えば誘導放射 (stimulated emission) という放射過程では、節 5.3.2 で述べるように、 j_ν が I_ν に比例する成分を持つが、このときにはその成分を α_ν に組み込み、負の吸収と考えれば上記の形の方程式が成り立つ。

電磁波が物質粒子の存在によってその伝搬方向を曲げられる散乱という過程も考慮するには次のように考える。散乱は光子が物質粒子に吸収されると同時に違う方向に向かって (一般には異なる振動数で) 放出される過程であると考えることができる。つまり α_ν に散乱による効果を適切に取り込むと同時に、 I_ν に適切な関数を乗じて全方向と全振動数で積分した項を放射輸送方程式の右辺に加えることで表現できる。しかし節 5.3.5 で述べるように、散乱による振動数の変化は無視できる場合が多く^{†9}、散乱が全方向にランダム、すなわち等方的だと近似することもある。そのように考えると、散乱の効果まで含めた放射輸送方程式は、散乱係数 (scattering coefficient) σ_ν を用いて、

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu = j_\nu + \sigma_\nu J_\nu - (\alpha_\nu + \sigma_\nu) I_\nu \quad (5.1.31)$$

と表される。散乱による巨視的な効果については節 5.2.4 で再考し、その素過程については節 5.3.5 で説明するが、それまでは一旦忘れる。

5.1.3 モーメント方程式とエディントン因子

放射輸送方程式 (5.1.30) のモーメントを計算する。式の両辺に $1, \mathbf{n}$ を作用させて全立体角で積分すると、

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_\nu = \int_{4\pi} d\Omega (j_\nu - \alpha_\nu I_\nu) \quad (5.1.32)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{F}_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{P}_\nu = \frac{1}{c} \int_{4\pi} d\Omega \mathbf{n} (j_\nu - \alpha_\nu I_\nu) \quad (5.1.33)$$

という式が出てくる。特に j_ν, α_ν が等方的な場合は

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_\nu = 4\pi j_\nu - \alpha_\nu c u_\nu \quad (5.1.34)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{F}_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{P}_\nu = -\frac{1}{c} \alpha_\nu \mathbf{F}_\nu \quad (5.1.35)$$

^{†9} 光子のエネルギーは $h\nu$ なので、散乱によって光子と物質粒子の間でエネルギーのやり取りをほぼしないということである。そのような散乱を弾性散乱と言う。

である。さらに、振動数でも積分すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = \int d\nu \int_{4\pi} d\Omega (j_\nu - \alpha_\nu I_\nu) \quad (5.1.36)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{c} \int d\nu \int_{4\pi} d\Omega \mathbf{n} (j_\nu - \alpha_\nu I_\nu) \quad (5.1.37)$$

となる。0 次のモーメント方程式 (上段) は放射場のエネルギー密度についての保存則で、1 次のモーメント方程式 (下段) は放射場の運動量についての保存則を表す^{†10}。それぞれの式の右辺に負号を付けたもの

$$cg^0(\mathbf{x}, t) = - \int d\nu \int_{4\pi} d\Omega (j_\nu - \alpha_\nu I_\nu) \quad (5.1.38)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = - \frac{1}{c} \int d\nu \int_{4\pi} d\Omega \mathbf{n} (j_\nu - \alpha_\nu I_\nu) \quad (5.1.39)$$

は、放射場との相互作用により物質が得る単位時間あたりのエネルギー密度と運動量密度を表す。

物質 (j_ν, α_ν) がほとんど等方的だと考えられる場合、放射輸送方程式を解く代わりに、モーメント方程式 (5.1.34), (5.1.35) を考えることがある。ただしその場合、方程式系を閉じるためには \mathbf{P}_ν と u_ν, \mathbf{F}_ν の間に適当な関係を仮定しなければならない。よく使われるのは (変動) エディントン因子と呼ばれるものである。実用上 x, y 方向に等方 ($P_{\nu,xx} = P_{\nu,yy} = 0$) で一様 ($\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$) な放射を考えることがあるが、そのような場合にはモーメント方程式の \mathbf{P}_ν に関わる項は、その zz 成分についての $\partial P_{\nu,zz}/\partial z$ の項だけとなる。節 5.1.1 で説明したように、 $P_{\nu,zz}$ と u の間には、等方的な放射の場合は $P_{\nu,zz} = u_\nu/3$ 、流状極限の場合は $P_{\nu,zz} = u_\nu$ という関係がある。このことから、一般に

$$P_{\nu,zz} = f_\nu u_\nu \quad (5.1.40)$$

という関係を仮定すると、この f_ν は典型的に $1/3 \sim 1$ の間の値をとり、放射の異方性の尺度となる。 f_ν はエディントン因子と呼ばれる。

5.1.4 スケーリング

放射輸送の典型的な時間スケールは、考える現象の典型的な空間スケール L を光子がまっすぐ進んだ場合にかかる時間 $\tau_r = L/c$ や、平均自由行程を光子が進むのにかかる時間 $\tau_\ell = \ell_\nu/c$ な

^{†10} 節 6.2.4 で、流体を構成する粒子の分布関数についての 1 次モーメントが流体の運動量保存則であることを説明する。また、節 7.9.4 で相対論的な放射場のエネルギー・運動量保存則が上述のモーメント方程式に相当する式であることを説明する。そこまで読めば 1 次モーメントが運動量に関係することは自然に感じられるはずである。物質による放射 j_ν が等方的な場合は立体角での積分がゼロになるので、光子の吸収による運動量の交換のみがはたらくことにも留意されたい。

どが考えられる。一方で、流体の典型的な時間スケールは、典型的な流速を v として $\tau_f = L/v$ と書ける。本書が対象とする流体では

$$\frac{\tau_r}{\tau_f} = \frac{v}{c} \ll 1 \quad (5.1.41)$$

が成り立つ。よって、流体の時間スケールで考える場合は、放射輸送方程式の時間微分項を無視して放射強度を準定常的に扱うことができる。すなわち流体の熱力学的諸量が時間発展し、 j_ν, α_ν がそれに伴って時間変化すると、放射強度はすぐさまその新しい j_ν, α_ν の空間分布に応じた分布になると考える。実際に、式 (5.1.30) の左辺 2 項の比を見積もると、

$$\frac{|\partial I_\nu / \partial t / c|}{|\mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu|} \sim \frac{L}{c\tau_f} = \frac{v}{c} \quad (5.1.42)$$

となるため、放射輸送方程式の時間微分項は無視できる。

次に 1 次のモーメント方程式の時間微分項について考える。例えば太陽大気などの「透明な」(光学的に薄い、節 5.2.1 参照) 領域では、太陽表面 (光球) からの放射が卓越して流状極限に近づくことが期待される。流状極限の場合は式 (5.1.21) より、オーダーとして $F_\nu \sim cP_\nu$ であることが分かるので、1 次のモーメント方程式 (5.1.33) の左辺 2 項の比は

$$\frac{|\partial \mathbf{F}_\nu / \partial t / c^2|}{|\nabla \cdot \mathbf{P}_\nu|} \sim \frac{L}{c\tau_f} = \frac{v}{c} \quad (5.1.43)$$

となり、無視できることが分かる。一方で太陽内部など、「不透明」(光学的に厚い、節 5.2.1 参照) 領域では、節 5.4.1 で説明する拡散近似が適用できるため、式 (5.4.3)-(5.4.5) より、

$$F_\nu \sim \frac{c\ell_\nu}{L} u_\nu \sim \frac{c\ell_\nu}{L} P_\nu \quad (5.1.44)$$

が分かる。よって、

$$\frac{|\partial \mathbf{F}_\nu / \partial t / c^2|}{|\nabla \cdot \mathbf{P}_\nu|} \sim \frac{\ell_\nu}{c\tau_f} = \frac{v}{c} \cdot \frac{\ell_\nu}{L} \quad (5.1.45)$$

となる。不透明な領域とは $\ell_\nu \ll L$ である領域のことなので、やはり 1 次のモーメント方程式の時間微分項は無視できることが分かる。

次に、0 次のモーメント方程式の時間微分項について考える。流状極限の場合は $F_\nu \sim cu_\nu$ なので、式 (5.1.32) の左辺 2 項の比は

$$\frac{|\partial u_\nu / \partial t|}{|\nabla \cdot \mathbf{F}_\nu|} \sim \frac{v}{c} \quad (5.1.46)$$

となり、時間微分項は無視できる。一方で、拡散近似が適用できるような領域では、式 (5.1.44) より、

$$\frac{|\partial u_\nu / \partial t|}{|\nabla \cdot \mathbf{F}_\nu|} \sim \frac{v}{c} \cdot \frac{L}{\ell_\nu} \quad (5.1.47)$$

となる。よって、

$$\frac{v}{c} \ll \frac{\ell_\nu}{L} \tag{5.1.48}$$

を満たす場合には時間微分項は無視できる^{†11}。

5.1.5 共動系での記述：ドップラー効果

節 5.1.2 で放射輸送方程式を考えたときに、暗に観測者の静止系 (実験室系) で見た方程式を考えていた。一方で節 5.3 で説明するような素過程の考察で決まる放射率や吸収係数は、一般には速度 \mathbf{v} で動く流体の静止系 (共動系) で見た値である。よって、式 (5.1.30) の右辺を、共動系での放射率 j'_ν と吸収係数 α'_ν を使って書き換えることを考える^{†12}。ただし、共動系での j'_ν, α'_ν は等方的と仮定する^{†13}。

共動系の座標軸を実験室系と平行になるようにとると、共動系 $x^{\lambda'}$ から実験室系 x^μ への座標変換

$$x^\mu = \Lambda^\mu_{\lambda'} x^{\lambda'} \tag{5.1.49}$$

を表すローレンツ変換は 4×4 行列で

$$(\Lambda^\mu_{\lambda'}) = \begin{pmatrix} W & W v_i/c \\ W v_j/c & \delta_{ij} + (W - 1)v_i v_j/v^2 \end{pmatrix} \tag{5.1.50}$$

$$\text{ただし, } W = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{5.1.51}$$

と表される^{†14}。一方で、光子の 4 元運動量は

$$(p^\mu) = \frac{h\nu}{c}(1, \mathbf{n}) \tag{5.1.52}$$

と書ける (節 7.9.1 参照)。4 元運動量の変換

$$p^\mu = \Lambda^\mu_{\lambda'} p^{\lambda'} \tag{5.1.53}$$

を実際に計算すると、

$$\nu = \nu' W \left(1 + \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{v}}{c} \right) \tag{5.1.54}$$

$$\mathbf{n} = \frac{W \mathbf{v}/c + \mathbf{n}' + (W - 1)(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}/v^2}{W(1 + \mathbf{n}' \cdot \mathbf{v}/c)} \tag{5.1.55}$$

^{†11} この議論は Mihalas & Mihalas (1999, §93) によるものである。

^{†12} ローレンツ変換を考える。相対論についての基礎知識は第 7 章を読んで欲しい。

^{†13} 例えば磁場が存在する場合は、磁場によって対称性が破られた結果、物質は異方的な性質を持つ。また、放射場が異方的な場合はそれに伴って物質も異方的になることが期待される。これらの現象については節 5.5 で説明する。流体力学的現象を調べるために放射輸送を考える場合は、限られた計算資源で計算するために、 j'_ν, α'_ν は等方的 (変数 \mathbf{n} に依らない) と考える。

^{†14} μ, λ' は $0 \sim 3$ の値をとり、 $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ という定義である。

が出てくる。 v^2/c^2 の項は小さいとして無視すると、

$$\frac{\nu}{\nu'} = 1 + \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{v}}{c} = 1 + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \quad (5.1.56)$$

となる。これは光のドップラー効果を表す。観測者に向かってくる向きの速度を持つ物質から放射された光 ($\mathbf{n}' \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|$) は、発せられた振動数 ν' よりも大きい振動数 ν の光として観測される (青方偏移)。反対に観測者から遠ざかる向きの速度を持つ物質から発せられた光 ($\mathbf{n}' \cdot \mathbf{v} = -|\mathbf{v}|$) は、発せられた振動数よりも小さい振動数の光として観測される (赤方偏移)。

節 5.1.1 の脚注で、6 次元相空間 $d^3x d^3p$ での分布関数 f を考えた場合、放射強度 I_ν との間に $f = c^2 I_\nu / h^4 \nu^3$ という関係があると述べた。相空間の体積要素にはローレンツ変換について次のような変換性 (或いは不変性) がある (節 7.9 参照)。

$$d^3x dt = d^3x' dt' \quad (5.1.57)$$

$$d^3x d^3p = d^3x' d^3p' \quad (5.1.58)$$

$$\frac{d^3p}{E} = \frac{d^3p'}{E'} \quad (5.1.59)$$

ただし、 E はエネルギー (4 元運動量の第 0 成分) である。一方で体積要素 $d^3x d^3p$ 中の光子数もローレンツ変換で不変でなければならない^{†15} ので、 f もローレンツ変換で不変 ($f = f'$) であることが分かる。よって、放射強度は

$$I_\nu(\mathbf{n}, \nu) = \left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^3 I'_\nu(\mathbf{n}', \nu') \quad (5.1.60)$$

と変換する。物質からの放射によって時間 dt の間に相空間 $d^3x d^3p$ に加わる光子数は

$$\Delta N = \frac{j_\nu}{h\nu} d^3x dt d\nu d\Omega \quad (5.1.61)$$

$$= \frac{j_\nu}{h^4 \nu^3 / c^3} d^3x dt d^3p \quad (5.1.62)$$

$$= \frac{j_\nu}{h^3 \nu^2 / c^3} \frac{d^3x dt d^3p}{h\nu} \quad (5.1.63)$$

と書ける^{†16}。先ほど述べた体積要素の不変性と ΔN の不変性より、放射率は

$$j_\nu(\mathbf{n}, \nu) = \left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^2 j'_\nu(\nu') \quad (5.1.64)$$

^{†15} 異なる観測系にいる観測者の間で光子数の合意がなければならないということ。

^{†16} 1 段目から 2 段目の変形では d^3p 中の球殻を考え、

$$d^3p = p^2 d\Omega \cdot dp = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 d\Omega \cdot \frac{h d\nu}{c}$$

であることを用いた。

と変換することが分かる。また、 $\alpha_\nu I_\nu$ も同様に変換することから、吸収係数は

$$\alpha_\nu(\mathbf{n}, \nu) = \frac{\nu'}{\nu} \alpha'_\nu(\nu') \quad (5.1.65)$$

と変換することが分かる。式 (5.1.64), (5.1.65) の右辺を $\mathcal{O}(v/c)$ までで展開することで変数 ν を使って表すと、

$$j_\nu(\mathbf{n}, \nu) = j'_\nu(\nu) + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \left[2j'_\nu(\nu) - \nu \frac{\partial j'_\nu(\nu)}{\partial \nu} \right] \quad (5.1.66)$$

$$\alpha_\nu(\mathbf{n}, \nu) = \alpha'_\nu(\nu) - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \left[\alpha'_\nu(\nu) + \nu \frac{\partial \alpha'_\nu(\nu)}{\partial \nu} \right] \quad (5.1.67)$$

となる^{†17}。これを放射輸送方程式 (5.1.30) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu(\mathbf{n}, \nu)}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu(\mathbf{n}, \nu) &= j'_\nu(\nu) - \alpha'_\nu(\nu) I_\nu(\mathbf{n}, \nu) \\ &+ \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \left[2j'_\nu(\nu) - \nu \frac{\partial j'_\nu(\nu)}{\partial \nu} + \left\{ \alpha'_\nu(\nu) + \nu \frac{\partial \alpha'_\nu(\nu)}{\partial \nu} \right\} I_\nu(\mathbf{n}, \nu) \right] \end{aligned} \quad (5.1.68)$$

となる。更に、この式から単色のモーメント方程式を求めると、

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_\nu = 4\pi j'_\nu(\nu) - \alpha'_\nu(\nu) c u_\nu + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_\nu}{c} \left[\alpha'_\nu(\nu) + \nu \frac{\partial \alpha'_\nu(\nu)}{\partial \nu} \right] \quad (5.1.69)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{F}_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{P}_\nu = -\frac{1}{c} \alpha'_\nu(\nu) \mathbf{F}_\nu + \frac{4\pi \mathbf{v}}{3c^2} \left[2j'_\nu(\nu) - \nu \frac{\partial j'_\nu(\nu)}{\partial \nu} \right] + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{P}_\nu}{c} \left[\alpha'_\nu(\nu) + \nu \frac{\partial \alpha'_\nu(\nu)}{\partial \nu} \right] \quad (5.1.70)$$

となる。

Castor (2004, Chapter 6) によると、流速が超音速で線スペクトル的な (特定の振動数のみでの) 放射が支配的な流体では、ドップラー効果を表す項は全体のダイナミクスに影響を及ぼすため、無視すると正しい結果が得られないようだ。また、Mihalas & Mihalas (1999, §93) では、灰色近似^{†18}の場合でのこの項の寄与の議論がされているが、光子の平均自由行程を ℓ_p 、考える現象の空間スケールを L として $v/c \ll \ell_p/L$ が満たされる場合は、振動数で積分したモーメント方程式におけるドップラー効果の項は無視でき、 $v/c \ll (\ell_p/L)^2$ が満たされる場合には単色の放射輸送方程式におけるドップラー効果の項も無視できるとしている。

^{†17} 例えば $\xi = \nu/\nu'$ として右辺から ν' を消去し、式 (5.1.56) より $d\xi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c$ として右辺 RHS(ν, ξ) を

$$\text{RHS}(\nu, 1 + d\xi) = \text{RHS}(\nu, 1) + d\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \text{RHS}(\nu, 1) + \mathcal{O}(d\xi^2)$$

と計算する。

^{†18} j'_ν, α'_ν が振動数に依らないとする近似。太陽の表面付近など、連続スペクトルによる放射 (熱放射) が卓越している領域での現象を考える場合にはこの近似が用いられることがある。

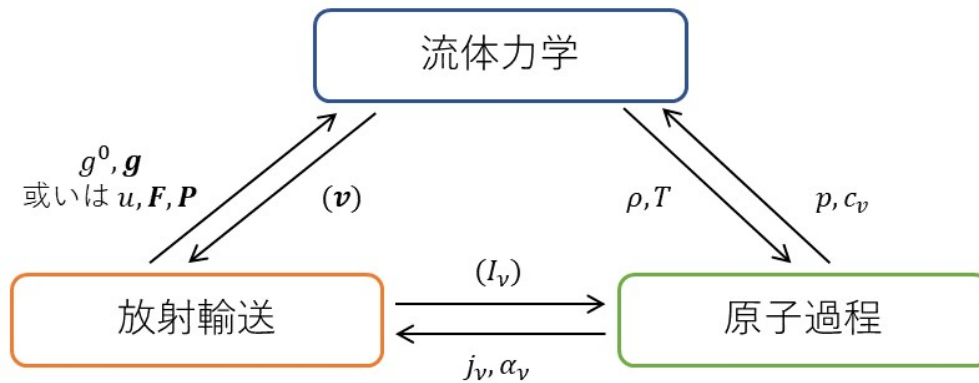


図 5.2 放射流体力学の方程式系の全体構造：大西直文 (2012) の図 1 より。

5.1.6 流体への作用

流体の方程式に放射場との相互作用を組み込むには、 cg^0, \mathbf{g} (節 5.1.3 参照) をそれぞれ全エネルギー保存則 (3.3.20) と運動量保存則 (3.2.1) の右辺に加える^{†19}。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_m) + \nabla \cdot (\mathcal{F}_k + \mathcal{F}_h + \mathcal{F}_m + \mathcal{F}_\nu + \mathbf{q}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} + cg^0 \quad (5.1.71)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mathbf{f} + \mathbf{g} \quad (5.1.72)$$

これらの式に式 (5.1.36), (5.1.37) を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_m + u) + \nabla \cdot (\mathcal{F}_k + \mathcal{F}_h + \mathcal{F}_m + \mathcal{F}_\nu + \mathbf{q} + \mathbf{F}_r) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \quad (5.1.73)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \mathbf{v} + \frac{\mathbf{F}_r}{c^2} \right) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{P}) + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mathbf{f} \quad (5.1.74)$$

と書ける。ただし、紛らわしいので放射のフラックスを \mathbf{F}_r と書いた。

節 5.1.4 の議論により、 \mathbf{F}_r の時間微分項は無視できるので、放射場による運動量保存則への作用は、放射場の存在によって流体の圧力 (応力) に \mathbf{P} の項が加わると考えればよいことが分か

^{†19} (g^0, \mathbf{g}) はローレンツ変換に従う (節 7.9.4 参照) ので、 cg^0 は $O(v/c)$ まで考慮すると

$$cg^0 = cg^{0'} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}'$$

と変換する。 $g^{0'}, \mathbf{g}'$ は共動系で評価した g^0, \mathbf{g} である。つまり、実験室系で見たときの放射エネルギーから流体の全エネルギーへの変換 cg^0 は、共動系で評価した量で表した場合、放射エネルギーから流体の内部エネルギーへの変換 $cg^{0'}$ と、放射場によって流体にはたらく力 \mathbf{g}' による仕事率 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}'$ との和であることが分かる。

る。このことから \mathbf{P} は放射圧テンソルと呼ばれる。一方で、放射による加熱率は

$$Q_{\text{rad}} = cg^0 \tag{5.1.75}$$

$$= - \int d\nu \int_{4\pi} d\Omega (j_\nu - \alpha_\nu I_\nu) \tag{5.1.76}$$

$$= - \int d\nu \left[4\pi j'_\nu - \alpha'_\nu cu_\nu + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_\nu}{c} \left(\alpha'_\nu + \nu \frac{\partial \alpha'_\nu}{\partial \nu} \right) \right] \tag{5.1.77}$$

と書けるが、0 次のモーメント方程式 (5.1.36) の時間微分項を無視する場合は、

$$Q_{\text{rad}} = -\nabla \cdot \mathbf{F}_r \tag{5.1.78}$$

と書くこともできる。放射輸送を考慮した流体を考える際の方程式系の全体構造を図 5.2 に示した。

内部エネルギー保存則については、式 (5.1.72) に \mathbf{v} を作用させたものと電磁場のエネルギー保存則 (3.3.9) を式 (5.1.71) から引くことによって、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho e v_i) = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{j^2}{\sigma} + cg^{0'} \tag{5.1.79}$$

となる。ただし、

$$cg^{0'} = cg^0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \tag{5.1.80}$$

は流体の共動系で評価したエネルギー変換である。

5.2 定常放射輸送方程式の性質

節 5.1.4 で説明したように、流体の時間スケールにおいては放射場は準定常と考えることができる。定常の放射輸送方程式の重要な性質をいくつかまとめる。

5.2.1 光学的厚さ

特定の方向への放射場を考え、その光線に沿った長さを s とすると、定常の放射輸送方程式は

$$\frac{dI_\nu(s)}{ds} = j_\nu(s) - \alpha_\nu(s)I_\nu(s) \tag{5.2.1}$$

と書ける^{†20}。まず吸収のみの場合 ($j_\nu = 0$) を考える。

$$\frac{dI_\nu(s)}{ds} = -\alpha_\nu(s)I_\nu(s) \tag{5.2.2}$$

^{†20} つまり、 $s = 0$ となる点 \mathbf{x}_0 を適当に定めて、 $I_\nu(\mathbf{x}_0 + \mathbf{n}s, \mathbf{n})$ を $I_\nu(s)$ と表記している。

このとき、この微分方程式の解は

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) \exp \left[- \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds' \right] \quad (5.2.3)$$

となる。つまり、物質による吸収は、放射強度を光線に沿って指数関数的に減少させる効果である。新しい変数 τ_ν を

$$d\tau_\nu = \alpha_\nu ds \quad (5.2.4)$$

すなわち

$$\tau_\nu(s, s_0) = \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds' \quad (5.2.5)$$

と導入する。 $\tau_\nu(s, s_0)$ は基準の位置 s_0 と位置 s の間の光学的厚さ (或いは光学的深さ, optical depth) と呼ばれる。式 (5.2.3) を見ると、位置 s_0 にいた光子が物質に吸収されずに位置 s を飛んでいられる確率は $\exp[-\tau_\nu(s, s_0)]$ であることが分かる。つまり、光子が物質に吸収されずに進める平均的な光学的厚さは

$$\langle \tau_\nu \rangle = \int_0^\infty \tau_\nu \exp(-\tau_\nu) d\tau_\nu = 1 \quad (5.2.6)$$

と計算できる。よって、 α_ν が一様な場合を考えると、光子の平均自由行程 l_ν は

$$\langle \tau_\nu \rangle = \alpha_\nu l_\nu = 1 \quad (5.2.7)$$

と定義される。 α_ν が一様でない場合も局所的な平均自由行程は $l_\nu = 1/\alpha_\nu$ と定義される。考える系の典型的な空間スケールに対する光学的厚さが $\tau_\nu > 1$ の場合は、この系は光学的に厚いと言われる。逆に $\tau_\nu < 1$ の場合は光学的に薄いと言われる。式 (5.2.6) を考慮すると、光学的に厚いとは、考える系の典型的な空間スケールに比べて光子の平均自由行程が小さい場合、すなわち光子が系の典型的な空間スケールを移動する前に吸収されてしまう場合であり、考える系が「不透明」である場合と解釈できる。逆に光学的に薄い系は「透明な」系と解釈できる。

次に、放射率も考慮した場合を考える。放射輸送方程式 (5.2.1) の両辺を α_ν で割って、変数を光学的厚さ τ_ν に変換すると、

$$\frac{dI_\nu(\tau_\nu)}{d\tau_\nu} = -I_\nu(\tau_\nu) + S_\nu(\tau_\nu) \quad (5.2.8)$$

と書ける。ここで、 $S_\nu = j_\nu/\alpha_\nu$ は源泉関数 (source function) と呼ばれる。実空間の距離 s を使うより、光学的厚さ τ_ν を基準に距離を測って考えた方が放射輸送の性質を捉えやすいため、この形の放射輸送方程式を考えることがある。この微分方程式の解は

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) \exp(-\tau_\nu) + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(\tau'_\nu) \exp[-(\tau_\nu - \tau'_\nu)] d\tau'_\nu \quad (5.2.9)$$

となる。右辺の第 1 項は $\tau_\nu = 0$ の位置での放射の、吸収による消失を考慮した寄与、第 2 項は各位置 τ'_ν での源泉関数の、吸収による消失を考慮した寄与の和と解釈できる。式 (5.2.8) より、

$I_\nu > S_\nu$ の場合は $dI_\nu/d\tau_\nu < 0$ であり、 $I_\nu < S_\nu$ の場合は $dI_\nu/d\tau_\nu > 0$ なので、 I_ν はその光線に沿って見ると S_ν に近付こうとする性質があることが分かる。 S_ν が光線に沿って大きく変化しない場合、解 (5.2.9) は

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) \exp(-\tau_\nu) + S_\nu \{1 - \exp(-\tau_\nu)\} \quad (5.2.10)$$

$$= S_\nu + \{I_\nu(0) - S_\nu\} \exp(-\tau_\nu) \quad (5.2.11)$$

となるが、 $I_\nu(0)$ がいかなる値であったとしても $\tau_\nu > 1$ の位置では $I_\nu(\tau_\nu) \simeq S_\nu$ になることが分かる。

5.2.2 キルヒホッフの法則

温度 T の局所熱平衡にある物質による放射吸収の源泉関数 S_ν は、プランク関数 $B_\nu(T)$ (付録 3.B.8 参照) になる。これはキルヒホッフの法則と呼ばれる。プランク関数 (黒体放射) は等方的である。 $S_\nu = B_\nu(T)$ のときの放射場は熱放射と呼ばれる。前節より、光学的に厚い系での放射強度はほとんど源泉関数に等しいので、光学的に厚い系での熱放射は黒体放射になる。放射吸収の素過程についての考察からキルヒホッフの法則が言えることは節 5.3 で説明する。

5.2.3 [トピック] 太陽表面の意味と周縁減光

図 5.3 は地球を周回する SDO という観測衛星が可視光領域の連続光^{†21}で観測した太陽の画像である。放射強度が大きいほど明るいオレンジ色、小さいほど暗い色で示されている。図を見ると、はっきりと太陽の「表面」なるものを見分けることができる。この「表面」は光球 (photosphere) と呼ばれる。光球の内側 (太陽内部) は不透明、すなわち光学的に厚いので、内部で生成された光子は光球を通り抜ける前に吸収される。逆に光球の外側 (太陽大気) はこの画像の振動数帯では透明であるため、光球で発せられた光子の大部分は大気で吸収されることなく観測衛星に届く。図 5.4 に現在広く知られている光学的深さと質量密度、温度の高度分布モデル (Vernazza et al., 1981, VAL-C モデル) を示した。観測衛星から測った光学的深さが 200 km 程度の幅の薄い^{†22}領域で急激に大きくなるため、はっきりとした「表面」を見分けることができる。また図 5.3 を見ると、円形 (ディスク状) に写る太陽の周縁部分は中心部分より暗く見える。この現象は周縁減光 (limb darkening) と呼ばれる。平行平面大気かつ灰色近似と呼ばれる単純化をした放射輸送方程式を解析的に解くことによって、これらの現象を簡単に見積もることを考える。

^{†21} ある特定の吸収線に相当する波長で撮ったわけではなく、どの吸収線にも該当しない波長帯の光を観測したという意味。吸収線については節 5.3.3 も参照のこと。

^{†22} 太陽半径は約 70 万 km である。

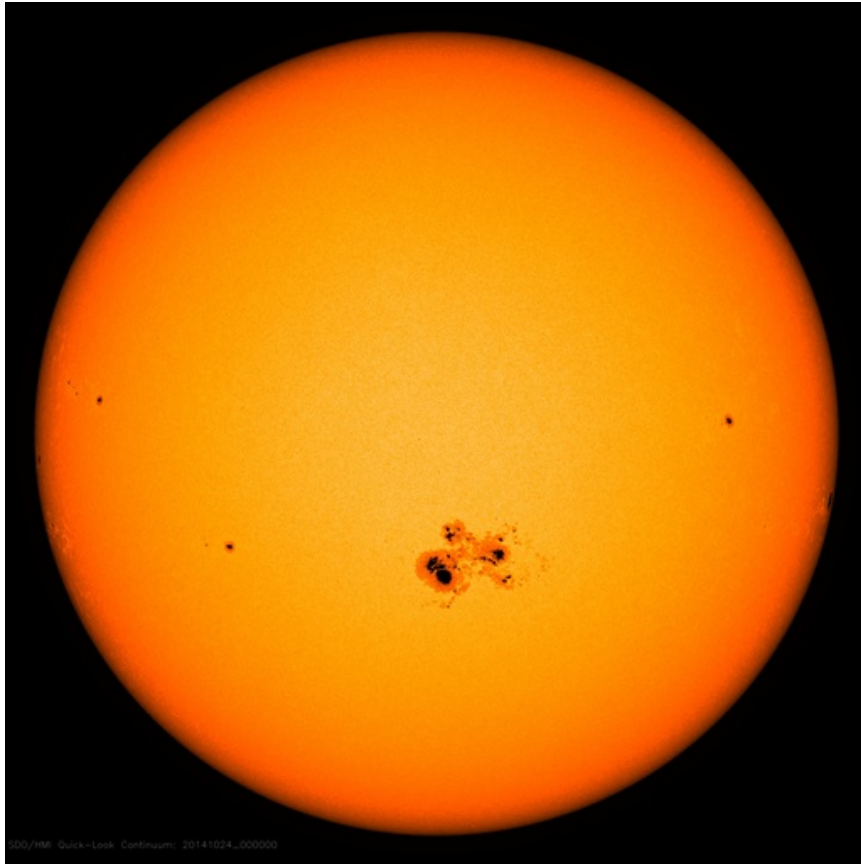


図 5.3 可視領域連続光で撮られた 2014/10/24 の太陽：Courtesy of NASA/SDO and the AIA, EVE, and HMI science teams.

光球付近に注目するため、図 5.5 のように太陽大気を平行板として考え、太陽の中心方向に向かって z 軸をとる。太陽の中心は $z \rightarrow \infty$ の彼方にあるとし、太陽の性質は z のみに依るとする。このような単純化をされた恒星大気は平行平面大気 (plane-parallel atmosphere) と呼ばれる。放射方向の変数 μ は z 軸の負の向きが $\mu = 1$ 、正の向きが $\mu = -1$ となるように、

$$n_z = -\mu \quad (5.2.12)$$

と定義する。また、観測衛星は $z = 0$ の位置にいて、一般には図のように z 軸と違う向きの視線方向で観測している。 $z = 0$ から測った光学的深さを

$$\tau_\nu = \int_0^z \alpha_\nu(z') dz' \quad (5.2.13)$$

とする。以上の単純化より 1 次元 (x, y 方向には等方かつ一様) な問題になるので、モーメント $\mathbf{F}_\nu, \mathbf{P}_\nu$ についてはその z 成分、 zz 成分のみを考えればよく、それぞれを F_ν, P_ν と書くこと

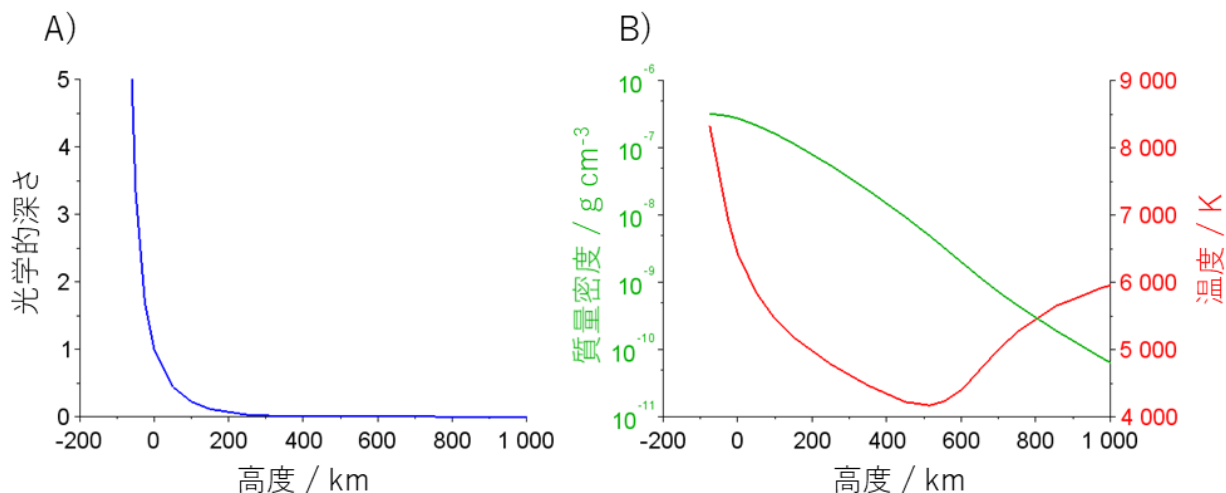


図 5.4 (A) 光学的深さ τ_{500} と (B) 質量密度 ρ 、温度 T の高度分布モデル：高度は $\tau_{500} = 1$ の高度を原点にとっている。 τ_{500} とは、500 nm の波長での連続光に対する光学的深さ。太陽の静穏領域を想定した 1 次元静的モデル。「光球」という用語は厳密には図の高度ゼロから温度がいちばん低くなっている高度 $\simeq 500$ km までの領域のことを指す。Vernazza et al. (1981) の model C より。

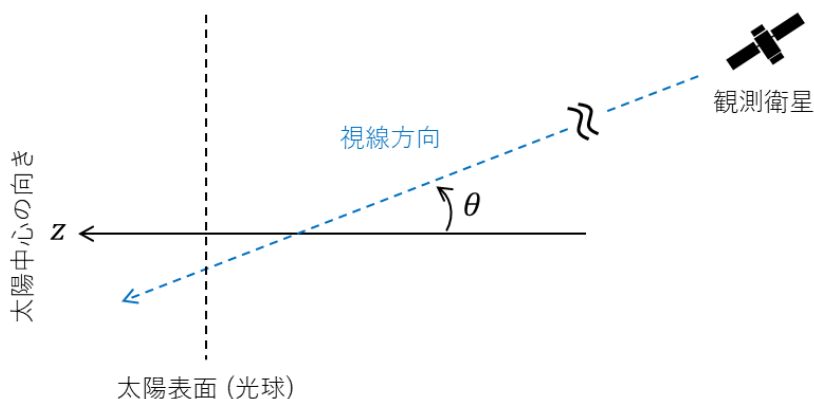


図 5.5 平行平面大気における z 軸と放射方向変数のとり方

にする。すなわち各モーメントは

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(\tau_\nu, \mu) d\mu \tag{5.2.14}$$

$$F_\nu(\tau_\nu) = 2\pi \int_{-1}^1 \mu I_\nu(\tau_\nu, \mu) d\mu \tag{5.2.15}$$

$$P_\nu(\tau_\nu) = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 \mu^2 I_\nu(\tau_\nu, \mu) d\mu \tag{5.2.16}$$

である。

更に次のような仮定をする。

- 大気は静水圧平衡 (節 4.3.1 参照) にあるため、速度場 v はゼロである。よって熱伝導は考えないことにすると、全エネルギー保存則 (5.1.73) より

$$\frac{dF_\nu(z)}{dz} = 0 \tag{5.2.17}$$

である (放射平衡)。すなわち $F_\nu(z)$ は定数 F_ν である。

- 放射場の異方性の激しさは大きくない。つまり、一般には $I_\nu(\tau_\nu, \mu)$ は適当な係数 $a_\nu^i(\tau_\nu)$ を用いて

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \sum_{i=0}^{\infty} a_\nu^i(\tau_\nu) \mu^i \tag{5.2.18}$$

と展開できるが、今は 1 次までの項で

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = a_\nu^0(\tau_\nu) + a_\nu^1(\tau_\nu) \mu \tag{5.2.19}$$

と表せると仮定する。これをエディントン近似と言う。この場合、実際に式 (5.2.14), (5.2.16) に上式を代入して計算すると分かるように、注目する領域において

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu = 3P_\nu \tag{5.2.20}$$

という関係が常に成り立つ。

- 等方的な吸収、放射を考えるので源泉関数 S_ν は等方的である。
- 吸収係数 α_ν は振動数に依らない (灰色近似、gray/grey approximation)。よって光学的厚さも振動数に依らないため、 τ と書く。

振動数で積分した放射方向 μ についての定常放射輸送方程式は

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = I(\tau, \mu) - S(\tau) \tag{5.2.21}$$

と書ける。 τ が増加する向きと $\mu = 1$ の向きを逆にとったので、右辺の符号に注意して欲しい。この式に $1, \mu$ を乗じて $\mu = -1 \sim 1$ で積分することで、モーメント方程式

$$\frac{dF}{d\tau} = 4\pi J(\tau) - 4\pi S(\tau) \tag{5.2.22}$$

$$\frac{dP(\tau)}{d\tau} = \frac{F}{c} \tag{5.2.23}$$

が求まる。放射平衡の仮定より $dF/d\tau = 0$ であり、 F は定数なので、

$$J(\tau) = S(\tau) \tag{5.2.24}$$

$$P(\tau) = \frac{F}{c} \tau + C \tag{5.2.25}$$

が分かる。 C は適当な定数である。更に、エディントン近似の関係 (5.2.20) から

$$J(\tau) = S(\tau) = \frac{3F}{4\pi}\tau + \frac{3cC}{4\pi} \quad (5.2.26)$$

と書ける。

一方で、放射輸送方程式 (5.2.21) の形式的な解 $I(\tau, \mu)$ は、その位置 τ に至るまでに辿った経路上の源泉関数による寄与を足し合わせることで、

$$I_-(\tau, \mu) = \int_0^\tau \frac{d\tau'}{|\mu|} S(\tau') \exp\left(-\frac{|\tau - \tau'|}{|\mu|}\right) \quad (\mu < 0 \text{ の場合}) \quad (5.2.27)$$

$$I_+(\tau, \mu) = \int_\tau^\infty \frac{d\tau'}{\mu} S(\tau') \exp\left(-\frac{|\tau - \tau'|}{\mu}\right) \quad (\mu > 0 \text{ の場合}) \quad (5.2.28)$$

と書ける。ただし、 $z = \tau = 0$ の位置での太陽方向への放射 $I_-(0, \mu)$ は無いとした。この解から $J(\tau), F(\tau)$ を計算すると、

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 I_-(\tau, \mu) d\mu + \frac{1}{2} \int_0^1 I_+(\tau, \mu) d\mu \quad (5.2.29)$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^\tau d\tau' S(\tau') \int_{-1}^0 \frac{d\mu}{\mu} \exp\left(\frac{|\tau - \tau'|}{\mu}\right) + \frac{1}{2} \int_\tau^\infty d\tau' S(\tau') \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \exp\left(-\frac{|\tau - \tau'|}{\mu}\right) \quad (5.2.30)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty d\tau' E_1(|\tau' - \tau|) S(\tau') \quad (5.2.31)$$

$$F(\tau) = 2\pi \int_{-1}^0 \mu I_-(\tau, \mu) d\mu + 2\pi \int_0^1 \mu I_+(\tau, \mu) d\mu \quad (5.2.32)$$

$$= -2\pi \int_0^\tau d\tau' S(\tau') \int_{-1}^0 d\mu \exp\left(\frac{|\tau - \tau'|}{\mu}\right) + 2\pi \int_\tau^\infty d\tau' S(\tau') \int_0^1 d\mu \exp\left(-\frac{|\tau - \tau'|}{\mu}\right) \quad (5.2.33)$$

$$= 2\pi \int_0^\infty d\tau' \operatorname{sgn}(\tau' - \tau) E_2(|\tau' - \tau|) S(\tau') \quad (5.2.34)$$

となる。これらはシュバルツシルト-ミルン方程式と呼ばれる^{†23}。ただし、 $\operatorname{sgn}(\tau' - \tau)$ は $(\tau' - \tau)$ の符号という意味である。一般の整数 n に対して

$$E_n(x) = \int_0^1 t^{n-2} \exp\left(-\frac{x}{t}\right) dt \quad (5.2.35)$$

は指数積分関数と呼ばれる。指数積分関数の性質

$$\frac{dE_n(x)}{dx} = -E_{n-1}(x) \quad (5.2.36)$$

$$E_n(0) = \frac{1}{n-1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x E_n(x) = 0 \quad (5.2.37)$$

^{†23} 灰色近似を施さずに振動数で積分する前の放射輸送方程式で同じ議論をすると、これらの式と同じ形の J_ν, F_ν, S_ν に対する方程式が出てくる。一般にはそれらの式がシュバルツシルト-ミルン方程式と呼ばれる。

と式 (5.2.26) を使って $F(0)$ を計算すると、

$$F(0) = \int_0^\infty d\tau' E_2(\tau') \left(\frac{3F}{2}\tau' + \frac{3c\mathcal{C}}{2} \right) \quad (5.2.38)$$

$$= E_3(0) \cdot \frac{3c\mathcal{C}}{2} + E_4(0) \cdot \frac{3F}{2} \quad (5.2.39)$$

$$= \frac{3c\mathcal{C}}{4} + \frac{F}{2} \quad (5.2.40)$$

となる。 F は定数なので、 $\mathcal{C} = 2F/3c$ だと分かる。つまり、

$$S(\tau) = \frac{3F}{4\pi} \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \quad (5.2.41)$$

と $S(\tau)$ が求まった。

求まった $S(\tau)$ を用いて、式 (5.2.28) より $z = 0$ での太陽からの放射強度 $I_+(0, \mu)$ を計算すると、

$$I_+(0, \mu) = \frac{3F}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\tau'}{\mu} \left(\tau' + \frac{2}{3} \right) \exp\left(-\frac{\tau'}{\mu}\right) \quad (5.2.42)$$

$$= \frac{3F}{4\pi} \left(\mu + \frac{2}{3} \right) \quad (5.2.43)$$

$$= S(\tau = \mu) \quad (5.2.44)$$

となる。光球付近の物質が熱平衡にあるとすると、

$$S(\tau) = B(\tau) = \frac{\sigma}{\pi} [T(\tau)]^4 \quad (5.2.45)$$

なので、観測される放射強度は位置 $\tau = \mu$ の温度の黒体放射であることが分かる。特にディスクの中心を観測する場合は $\mu = 1$ である。周縁を観測する場合は $\tau < 1$ の位置、すなわち、より高度の高い層の源泉関数を見ることになる。光球付近では高度が高いほど温度が低いため (図 5.4)、周縁が暗く見える。また、ディスクの中心からの放射強度 $I_+(0, 1)$ と周縁との比は

$$\frac{I_+(0, \mu)}{I_+(0, 1)} = 0.4 + 0.6\mu \quad (5.2.46)$$

と計算できる。周縁減光の観測値は、例えば Cox (2002) によると、

$$\left[\frac{I_+(0, \mu)}{I_+(0, 1)} \right]_{\text{obs}} = 0.36 + 0.84\mu - 0.2\mu^2 \quad (5.2.47)$$

とフィッティングされる。様々な単純化を施したが、そこそこの精度の見積もりができていることが分かる。

エディントン近似の仮定をやめれば、見積もりの精度が上がるのが期待される。式 (5.2.26) を一般化して、

$$J(\tau) = S(\tau) = \frac{3F}{4\pi} (\tau + q(\tau)) \quad (5.2.48)$$

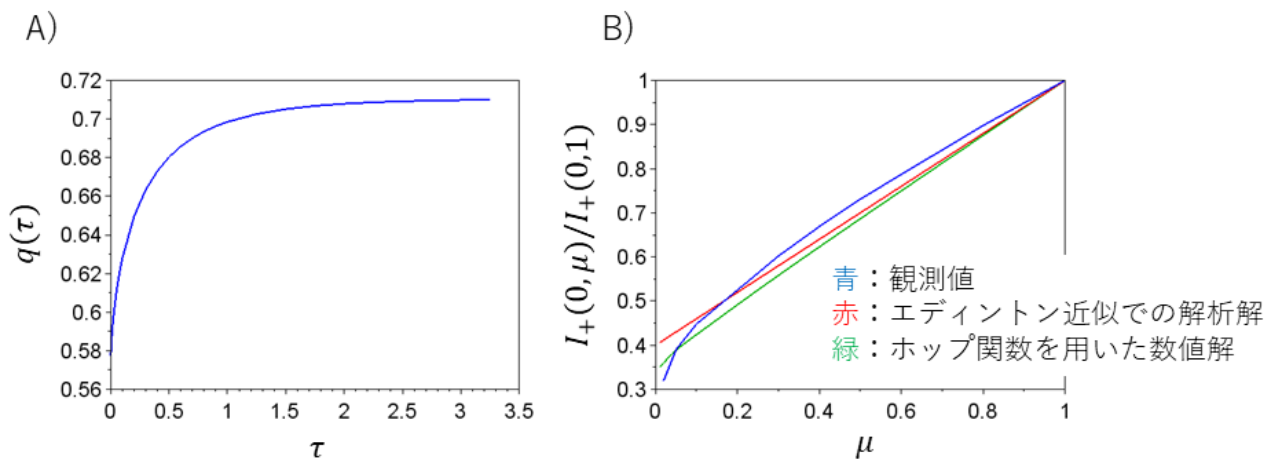


図 5.6 A) ホップ関数の数値解 (King et al., 1965)、B) 周縁減光の観測値 (Cox, 2002) と理論値

と書く。 $q(\tau)$ はホップ関数と呼ばれる。エディントン近似では $q(\tau)$ は定数になった。式 (5.2.48) をシュバルツシルト-ミルン方程式 (5.2.31) に代入して積分方程式を数値的に解くと $q(\tau)$ の形が求まる。求まったホップ関数を図 5.6 の A に示した。更に、このホップ関数を使い、式 (5.2.48) を式 (5.2.28) に代入して数値計算した $I_+(0, \mu)/I_+(0, 1)$ を、観測値やエディントン近似での解析解 (5.2.46) と共に図 5.6 の B に示した。

5.2.4 散乱の効果

光子破壊確率と熱化距離

この節では、等方的な散乱 (ランダムな方向に光子の軌道が変わる散乱) かつ弾性散乱 (散乱の前後で光子の振動数が変化しない散乱、つまり物質との間でエネルギーを交換しない散乱) を仮定する。まず、純粋な散乱、すなわち光子の吸収がない ($\alpha_\nu = 0$) 場合を考え、典型的な空間スケール L を光子が移動する間に散乱を受ける平均的な回数 N を見積もる方法を考える。 σ_ν を散乱係数として $\ell_\nu^{(\sigma)} = 1/\sigma_\nu$ を散乱に関する平均自由行程とすると、光子は $\ell_\nu^{(\sigma)}$ だけ直進して軌道を変えることを繰り返すランダムウォーク (節 1.5.1 参照) に従う動きをすると考えられる。ランダムウォークの 1 ステップで進む変位を \mathbf{r}_i とすると、 N 回の散乱を受けた結果進む変位 \mathbf{R} は

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \tag{5.2.49}$$

と書ける。よって N 回の散乱を受けた結果光子が進む平均的な距離 ℓ_ν^* は、上式の二乗平均をとることで、

$$(\ell_\nu^*)^2 = \langle R^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \langle r_i^2 \rangle + 2 \sum_{i < j} \langle \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j \rangle \tag{5.2.50}$$

と見積もれる。等方的な散乱を考えているので右辺第 2 項はゼロになり、

$$\ell_\nu^* = \sqrt{N} \ell_\nu^{(\sigma)} \quad (5.2.51)$$

と計算できる。空間スケール L を移動する際に散乱を受ける回数は、上式で $\ell_\nu^* = L$ とすると、

$$N = \frac{L^2}{(\ell_\nu^{(\sigma)})^2} \simeq \tau_\nu^2 \quad (5.2.52)$$

と見積もれる。ただし、 $\tau_\nu \gg 1$ である場合に限る。 $\tau_\nu < 1$ の場合は、単に光子が物質と衝突しない確率 $1 - \exp(-\tau_\nu)$ を考えて、

$$N \simeq 1 - \exp(-\tau_\nu) \simeq \tau_\nu \quad (5.2.53)$$

と見積もれる。一般的には $N \simeq \tau_\nu^2 + \tau_\nu$ などと見積もれる。

次に、散乱と放射吸収を考慮した場合を考える。ただし、物質は熱平衡状態にあるとする。散乱まで考慮した定常の放射輸送方程式は、式 (5.1.31) とキルヒホッフの法則より、

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu(I_\nu - B_\nu) - \sigma_\nu(I_\nu - J_\nu) \quad (5.2.54)$$

と書ける。ここで、吸収と散乱を考慮した光学的厚さを

$$d\tau_\nu = (\alpha_\nu + \sigma_\nu) ds \quad (5.2.55)$$

と導入すると、放射輸送方程式は

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu \quad (5.2.56)$$

$$\text{ただし, } S_\nu = \frac{\alpha_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} \quad (5.2.57)$$

と書き換えられる。 S_ν は散乱を考慮したときの源泉関数である。散乱を考慮しない場合の源泉関数は物質の性質 α_ν, j_ν のみで決定されたが、散乱を考量した場合は放射場の分布自身 (J_ν) にも依る。光学的に厚い系では J_ν はほとんど B_ν になるので、その場合は $S_\nu = B_\nu$ になることが分かる。純粋な散乱 ($\alpha_\nu = 0$) の場合は $S_\nu = J_\nu$ である。一般に、

$$\epsilon_\nu = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} \quad (5.2.58)$$

は光子破壊確率 (photon destruction probability) と呼ばれ、光子が物質粒子と衝突したときに、散乱を受けずに吸収される確率を表す。光子が物質からの放射によって生成されてから、

$(n - 1)$ 回の散乱を受けて n 回目の衝突で吸収される確率は $(1 - \epsilon_\nu)^{n-1} \epsilon_\nu$ と書けるので、この n の期待値は

$$\langle n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n(1 - \epsilon_\nu)^{n-1} \epsilon_\nu \tag{5.2.59}$$

$$= \frac{1}{\epsilon_\nu} \tag{5.2.60}$$

と計算できる。また、吸収と散乱を考慮したときの平均自由行程は

$$l_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} \tag{5.2.61}$$

と書ける。この $\langle n \rangle$ と l_ν を式 (5.2.51) の $N, l_\nu^{(\sigma)}$ に代入すると、

$$l_\nu^* = \frac{1}{\sqrt{\alpha_\nu(\alpha_\nu + \sigma_\nu)}} \tag{5.2.62}$$

と計算できる。この l_ν^* は光子が生成されてから消滅するまでに進む平均的な距離を表し、拡散距離 (diffusion length)、熱化距離 (thermalization length)、有効平均行程 (effective mean path) などと呼ばれる。系の境界から測って熱化距離よりも深い領域で生成された光子の大半は、境界から系の外に出る前に物質によって吸収される。よって、このような深い領域では放射場と物質の間で熱平衡になり、 $I_\nu \rightarrow B_\nu, S_\nu \rightarrow B_\nu$ となることが期待される。この意味で熱化距離と呼ばれる。

散乱も考慮した定常放射輸送の性質

節 5.2.1 では、散乱を考慮しない場合、 I_ν は光線に沿って $\exp(-\tau_\nu)$ の速さで源泉関数 S_ν に近づこうとする性質があることを述べた。節 5.2.2 で述べたように、散乱を考慮しない源泉関数は、物質が局所熱平衡にある場合、物質の温度のプランク関数 $B_\nu(T)$ になる。つまり、局所熱平衡にある物質中を貫く光線を考える場合は I_ν は B_ν に近づこうとする。

散乱を考慮した場合はこの性質が変化する。定常輸送の性質の本質を調べるために、次の簡単なモデルを考える。 z 軸と放射方向変数 μ は図 5.5 のように逆向き、つまり z 軸負の向きの光線が $\mu > 0$ となるようにとる。ただし、光線が貫く物質は一様等温の熱平衡状態にあるとする。つまり、 α_ν, σ_ν は座標に依らず、散乱を考慮しない源泉関数は $S_\nu = B_\nu$ である。 $z = 0$ の位置から測った光学的深さを τ_ν と書く。

$$\tau_\nu = (\alpha_\nu + \sigma_\nu)z \tag{5.2.63}$$

つまり、放射輸送方程式とモーメント方程式は節 5.2.3 と同じように書ける。

$$\mu \frac{dI_\nu(\tau_\nu, \mu)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\tau_\nu, \mu) - S_\nu(\tau_\nu) \quad (5.2.64)$$

$$\frac{dF_\nu(\tau_\nu)}{d\tau_\nu} = 4\pi J_\nu(\tau_\nu) - 4\pi S_\nu(\tau_\nu) \quad (5.2.65)$$

$$\frac{dP_\nu(\tau_\nu)}{d\tau_\nu} = \frac{F_\nu(\tau_\nu)}{c} \quad (5.2.66)$$

散乱の効果は等方的として、散乱を考慮した源泉関数は μ に依らないとする。つまり、光子破壊確率 ϵ_ν を用いて次のように書ける。

$$S_\nu(\tau_\nu) = \epsilon_\nu B_\nu + (1 - \epsilon_\nu) J_\nu(\tau_\nu) \quad (5.2.67)$$

更にエディントン近似もする。

$$\frac{4\pi}{3c} J_\nu = P_\nu \quad (5.2.68)$$

モーメント方程式 (5.2.65), (5.2.66) とエディントン近似の関係 (5.2.68) より、 J_ν についての次の方程式を得る。

$$\frac{1}{3} \frac{d^2 J_\nu(\tau_\nu)}{d\tau_\nu^2} = \epsilon_\nu (J_\nu(\tau_\nu) - B_\nu) \quad (5.2.69)$$

この方程式を $\tau_\nu \rightarrow \infty$ で $J_\nu(\tau_\nu)$ が発散しないという境界条件の下で解くと、次の解を得る。

$$J_\nu(\tau_\nu) - B_\nu = C \exp(-\sqrt{3\epsilon_\nu} \tau_\nu) \quad (5.2.70)$$

定数 C の具体的な値を求めるには、 $\tau_\nu = 0$ での境界条件を決める必要がある。 $\tau_\nu = 0$ で $\mu > 0$ の向き (外向き) の放射はあるけれども、 $\mu < 0$ の向き (内向き) の放射は無いという条件を課す。境界条件の具体的な表式を求めるために用いられる方法のひとつに、2 方向近似 (two-stream approximation) という手法がある。この手法では、 $\mu = 1/\sqrt{3}$ の向きの放射 $I_\nu^+(\tau_\nu)$ と $\mu = -1/\sqrt{3}$ の向きの放射 $I_\nu^-(\tau_\nu)$ のみが存在すると考える。このとき、各モーメントは

$$J_\nu = \frac{1}{2} (I_\nu^+ + I_\nu^-) \quad (5.2.71)$$

$$F_\nu = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} (I_\nu^+ - I_\nu^-) \quad (5.2.72)$$

$$P_\nu = \frac{2\pi}{3c} (I_\nu^+ + I_\nu^-) = \frac{4\pi}{3c} J_\nu \quad (5.2.73)$$

と計算できる。最後の段に示したように、上手くエディントン近似の関係が満たされるような 2 方向を選んでいる。上式と式 (5.2.66) を用いると、 I_ν^+, I_ν^- は次のように表せる。

$$I_\nu^+ = J_\nu + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dJ_\nu}{d\tau_\nu} \quad (5.2.74)$$

$$I_\nu^- = J_\nu - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dJ_\nu}{d\tau_\nu} \quad (5.2.75)$$

$\tau_\nu = 0$ で $I^- = 0$ であることが今考えている境界条件なので、具体的な表式は次のように求まる。

$$\tau_\nu = 0 \text{ において } \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dJ_\nu}{d\tau_\nu} = J_\nu \quad (5.2.76)$$

大胆な仮定を課して導出したが、今は放射輸送の大まかな性質を調べることが目的なので、上式の境界条件を採用する。すると、式 (5.2.70) の定数 C の具体的な値が決定され、解は結局次のようになる。

$$J_\nu(\tau_\nu) = B_\nu \left(1 - \frac{\exp(-\sqrt{3\epsilon_\nu}\tau_\nu)}{1 + \sqrt{\epsilon}} \right) \quad (5.2.77)$$

この式を見ると、 \exp の肩の $\sqrt{3\epsilon_\nu}\tau_\nu$ が 1 のオーダーとなる深さより深い領域では、放射が黒体放射になっていることが分かる。つまり、

$$\tau_\nu \sim \frac{1}{\sqrt{3\epsilon_\nu}} \longleftrightarrow z \sim \frac{1}{\sqrt{3\alpha_\nu(\alpha_\nu + \sigma_\nu)}} \quad (5.2.78)$$

より深い領域ということである。これは式 (5.2.62) で定義した熱化距離とおよそ同じ値である。このように、熱化距離より深く、黒体放射になっている領域を有効的に厚い (effectively thick) 領域と言い、逆に熱化距離より浅い領域を有効的に薄い (effectively thin) 領域と言う。

求まった J_ν を用いて S_ν を計算すると、次のようになる。

$$S_\nu(\tau_\nu) = B_\nu [1 - (1 - \sqrt{\epsilon_\nu}) \exp(-\sqrt{3\epsilon_\nu}\tau_\nu)] \quad (5.2.79)$$

この式から、散乱を考慮した源泉関数は、熱化距離のオーダーより深い領域ではプランク関数 B_ν になるが、熱化距離より浅い領域では B_ν より小さい値になることが分かる。特に $\sqrt{3\epsilon_\nu}\tau_\nu \ll 1$ の領域では

$$S_\nu \simeq \sqrt{\epsilon_\nu} B_\nu \quad (5.2.80)$$

になる。つまり、光子破壊確率が小さい (= 散乱の効果が大きい) 程 B_ν に比べて小さくなる。放射強度は光線に沿って、この小さな S_ν に近づこうとする^{†24}。

上述の結果は z に沿った物質の温度変化が緩やかなときに通用する。一方で、例えば光線に沿って物質の温度が急激に下がる場合、 $J_\nu > B_\nu$ となり、散乱の効果が大きい ($\epsilon_\nu \ll 1$) 場合は S_ν は B_ν より J_ν に近い値になるために $S_\nu > B_\nu$ となることもある。いずれにせよ、注目する波長帯で散乱の効果が大きい場合には源泉関数はプランク関数とはならず、光学的に厚い系からの放射が黒体放射からずれた値になる可能性がある。

^{†24} 節 5.2.3 では S_ν の値が大体 B_ν であることを仮定したが、これは太陽の光球では散乱の効果が小さい ($\epsilon_\nu \simeq 1$) と考えられていることを考慮した上での議論だった。光球の上空の彩層と呼ばれる領域での吸収線形成において散乱の効果が重要であることを節 5.3.3 で説明する。

5.3 原子過程

物質粒子と放射場の相互作用の素過程についての基本的な考察から、輸送方程式に現れる吸収係数や放射率を計算する方法を説明する。プラズマ中では様々な衝突過程が起きており、それらの寄与の合計として吸収係数が計算される。本節では特に、束縛-束縛遷移、レイリー散乱(共鳴散乱)、光電離、制動放射が起こる確率が量子力学によってどのように計算されるかについて説明する。解析力学と量子力学の基礎知識については付録 5.A, 5.B にまとめたので、適宜参照して欲しい。

5.3.1 束縛-束縛遷移 1：アインシュタイン係数

まず初めに、原子内に束縛された電子が放射場を吸収放射して別の束縛状態に移る過程(束縛-束縛遷移)を考える。荷電粒子の状態に作用する量子力学的ハミルトニアン \hat{H} は、放射場がない場合のハミルトニアン \hat{H}_p 、荷電粒子と放射場の相互作用 \hat{H}_{int} に分かれる。

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_p + \hat{H}_{\text{int}}(t) \tag{5.3.1}$$

$$\hat{H}_p = \sum_i \frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2m_i} + V_{\text{coul}}(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \dots, \hat{\mathbf{x}}_i, \dots) \tag{5.3.2}$$

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = \sum_i \left[-\frac{e_i}{m_i} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_i, t) \cdot \hat{\mathbf{p}}_i + \frac{e_i^2}{2m_i} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_i, t) \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_i, t) \right] \tag{5.3.3}$$

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \alpha} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] + \hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha}^\dagger \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \right] \tag{5.3.4}$$

ただし、 e_i は i 番目の粒子の電荷で、電子なら負の値をとるような定義である。 \sum_i は考慮する粒子についての和である。 $\omega = c|\mathbf{k}|$ である。 (\mathbf{k}, α) は放射場のモードを表すラベル(波数と偏極)で、 $\mathbf{e}_{\mathbf{k}, \alpha}$ は偏極ベクトル、 $\hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha}$ は生成消滅演算子である^{†25}。詳しくは付録 5.A, 5.B を参照のこと。

原子に束縛された電子全体の状態^{†26}を考え、 \hat{H}_p の固有状態を $|a\rangle, |b\rangle$ などのラベルで表す。

^{†25} 上式では、直交する 2 方向への直線偏光 ($\alpha = 1, 2$) を基底として展開している。代わりに、2 種類の円偏光 ($\lambda = +, -$) の生成消滅演算子と偏光ベクトルをそれぞれ

$$\hat{a}_{\mathbf{k}, \pm}^\dagger = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{\mathbf{k}, 1}^\dagger \pm i \hat{a}_{\mathbf{k}, 2}^\dagger), \quad \hat{a}_{\mathbf{k}, \pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{\mathbf{k}, 1} \mp i \hat{a}_{\mathbf{k}, 2}), \quad \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}, 1} \pm i \mathbf{e}_{\mathbf{k}, 2})$$

と導入し、これを基底にして展開すれば、 $\hat{\mathbf{A}}$ は次のように書ける。

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega}} \left[\mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda} \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] + \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda}^* \hat{a}_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \right]$$

この場合、生成演算子の項には偏光ベクトルの複素共役 $\mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda}^*$ が係ることに注意を要する。

^{†26} 簡単のために 1 電子原子を考えるが、この節の議論の結果は多電子原子の場合にも自然に拡張される。具体的に

また、放射場は特定のモード (\mathbf{k}, α) の光子だけが存在すると考え^{†27}、その固有状態 (フォック状態) を $|n_{\mathbf{k}, \alpha}\rangle$ と表す。 $n_{\mathbf{k}, \alpha}$ はこの注目したモードの光子数である。電子の状態空間と放射場の状態空間のテンソル積を考え、その基底を $|a, n_{\mathbf{k}, \alpha}\rangle$ などと表す。このとき、状態 $|b\rangle$ にあった原子が光子を放出して、エネルギーが $\hbar\omega$ だけ低い状態 $|a\rangle$ に遷移する過程は、 $|b, n_{\mathbf{k}, \alpha}\rangle$ から $|a, n_{\mathbf{k}, \alpha} + 1\rangle$ への遷移だと表せる。この遷移が単位時間に起こる確率 (遷移率) w_{ba} は、 $\hat{H}_{\text{int}}(t)$ を摂動と捉えればフェルミの黄金律 (付録 5.B.11) を用いて、

$$w_{ba} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle a, n_{\mathbf{k}, \alpha} + 1 | \hat{H}_{\text{emi}} | b, n_{\mathbf{k}, \alpha} \rangle \right|^2 \rho(E_a) \quad (5.3.5)$$

$$\text{ただし, } \hat{H}_{\text{emi}} = -\frac{e}{m_e} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega}} \hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha}^\dagger \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} \quad (5.3.6)$$

と計算できる。ただし、 \hat{H}_{emi} は \hat{H}_{int} の中から、 $|b, n_{\mathbf{k}, \alpha}\rangle$ を $|a, n_{\mathbf{k}, \alpha} + 1\rangle$ に遷移させ得る項、すなわち $\exp(i\omega t)$ を含む項、言い換えると生成演算子 $\hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha}^\dagger$ のみを 1 次で含む項だけを取り出した^{†28}。 $\rho(E)$ は $\hbar\omega \simeq E_b - E_a$ 近辺のエネルギー (角振動数) を持つ光子の許容状態密度である^{†29}。ここで、放射場の典型的な波長は電子のスケール (1 Å 程度) より十分に長いので、

$$\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = 1 - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})^2 + \dots \simeq 1 \quad (5.3.7)$$

として考える。この近似は電気双極近似と呼ばれる。 $\rho(E)$ については、立体角 $d\Omega$ の方向への光子の放射を考える。周期的境界条件が課された波数空間 d^3k 内での単位体積あたりの許容状態数は $Vd^3k/(2\pi)^3$ であり^{†30}、 $|\mathbf{k}|$ が $k \sim k + dk$ で $d\Omega$ の方向を向いた球殻片 (体積 $k^2 d\Omega dk$) を考えることで、 $d\Omega$ の方向へのエネルギー $\hbar\omega \sim \hbar(\omega + d\omega)$ の放射の状態数 $\rho_{\Omega, \omega} \hbar d\omega$ は

$$\rho_{\Omega, \omega} \hbar d\omega = \frac{V}{(2\pi)^3} k^2 d\Omega dk \quad (5.3.8)$$

と書ける。 $k = \omega/c$ を使って k を消去すると、

$$\rho_{\Omega, \omega} = \frac{V\omega^2}{8\pi^3 \hbar c^3} d\Omega \quad (5.3.9)$$

は、後述する電気双極近似を行った後に出てくる $\langle b | \hat{\mathbf{p}} | a \rangle$ や $\langle b | \hat{\mathbf{x}} | a \rangle$ のような量において、ブラとケットに挟まれている $\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{x}}$ は、各電子の運動量演算子や位置演算子の和 $\sum_i \hat{\mathbf{p}}_i, \sum_i \hat{\mathbf{x}}_i$ であると読み替えれば良い。

^{†27} すなわち、とりあえずのところ、ある特定の方向の放射との相互作用を考えるということ。後から方向についての和をとる。

^{†28} 本節 (ないしは本書全体) の議論では、光子を生成して励起したり、光子を消滅して脱励起する過程の確率振幅は無視している。これは、付録 5.B.11 でフェルミの黄金律を導出する際に、相互作用の時間が十分に長いとする近似を行ったことに依る。これは回転波近似と呼ばれる。この近似の下では、励起数と光子数の合計が保存されることになる。

^{†29} 規格体積 (付録 5.A.4 で周期的境界条件を与えたときの体積) V を大きくすれば、各モード \mathbf{k} はエネルギー的にほぼ連続して存在すると考えられるため、そのように考えてフェルミの黄金律を適用した。

^{†30} 偏極 $\alpha = 1, 2$ についての和は後からとる。

となる。また、生成演算子の性質

$$\langle n_{k,\alpha} + 1 | \hat{a}_{k,\alpha}^\dagger | n_{k,\alpha} \rangle = \sqrt{n_{k,\alpha} + 1} \quad (5.3.10)$$

も使うと、 w_{ba} は

$$w_{ba} = \frac{e^2 \omega (n_{k,\alpha} + 1)}{8\pi^2 \epsilon_0 m_e^2 \hbar c^3} |\langle b | \hat{\mathbf{p}} | a \rangle \cdot \mathbf{e}_{k,\alpha}|^2 d\Omega \quad (5.3.11)$$

となる。ここで、交換関係 $[\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}] = i\hbar$ より、

$$\langle b | \hat{\mathbf{p}} | a \rangle = \langle b | \frac{im_e}{\hbar} [\hat{H}_p, \hat{\mathbf{x}}] | a \rangle \quad (5.3.12)$$

$$= \frac{im_e (E_b - E_a)}{\hbar} \langle b | \hat{\mathbf{x}} | a \rangle \quad (5.3.13)$$

$$= -im_e \omega \langle b | \hat{\mathbf{x}} | a \rangle \quad (5.3.14)$$

と計算できるので、

$$w_{ba} = \frac{e^2 \omega^3 (n_{k,\alpha} + 1)}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} |\langle b | \hat{\mathbf{x}} | a \rangle \cdot \mathbf{e}_{k,\alpha}|^2 d\Omega \quad (5.3.15)$$

となる。偏極 α について和をとり、全立体角 4π で積分すると、

$$\int_{4\pi} d\Omega \sum_{\alpha} |\langle b | \hat{\mathbf{x}} | a \rangle \cdot \mathbf{e}_{k,\alpha}|^2 = \int_{4\pi} d\Omega \sum_{\alpha} \langle b | \hat{\mathbf{x}} | a \rangle \cdot (\mathbf{e}_{k,\alpha} \mathbf{e}_{k,\alpha}) \cdot \langle b | \hat{\mathbf{x}} | a \rangle^* \quad (5.3.16)$$

$$= \int_{4\pi} d\Omega \langle b | \hat{\mathbf{x}} | a \rangle \cdot \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \right) \cdot \langle b | \hat{\mathbf{x}} | a \rangle^* \quad (5.3.17)$$

$$= \left(4\pi - \frac{4\pi}{3} \right) |\langle b | \hat{\mathbf{x}} | a \rangle|^2 \quad (5.3.18)$$

$$= \frac{8\pi}{3} |\langle b | \hat{\mathbf{x}} | a \rangle|^2 \quad (5.3.19)$$

と計算できる^{†31}。原子の状態 $|a\rangle, |b\rangle$ がそれぞれ g_a, g_b 重に縮退していて $|a, m_a\rangle, |b, m_b\rangle$ と書ける場合は、始状態の m_b について平均をとり、終状態の m_a について和をとることで、結局、 $|b\rangle$ にあった電子が光子を任意の方向に放射して $|a\rangle$ に遷移する遷移率は

$$w_{ba} = \frac{\omega^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3 g_b} \mathcal{S}_{ab}(n+1) \quad (5.3.20)$$

$$\text{ただし, } \mathcal{S}_{ab} = \sum_{m_a, m_b} |\langle b, m_b | e\hat{\mathbf{x}} | a, m_a \rangle|^2 \quad (5.3.21)$$

^{†31} $\mathbf{1}$ は単位テンソルである。互いに直交する 3 つの単位ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = \delta_{ij})$ を考えたとき、テンソル積の和は単位テンソルになる

$$\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{1}$$

という性質を使って 1 段目から 2 段目への変形を行った。

と書ける。 S_{ab} は電気双極線強度 (electric dipole line strength) あるいは単に線強度と呼ばれる^{†32}。 n はモードあたりの光子数の平均であり、平均強度 J_ν との間に、

$$n = \frac{J_\nu}{2h\nu^3/c^2} \quad (5.3.22)$$

という関係^{†33}がある。よって、 w_{ba} は

$$w_{ba} = A_{ba} + B_{ba}J_\nu \quad (5.3.23)$$

$$\text{ただし, } A_{ba} = \frac{8\pi^2\nu^3}{3\epsilon_0\hbar c^3 g_b} S_{ab} \quad (5.3.24)$$

$$B_{ba} = \frac{A_{ba}}{4\pi\hbar\nu^3/c^2} = \frac{2\pi}{3\epsilon_0\hbar^2 c g_b} S_{ab} \quad (5.3.25)$$

と書ける。 A_{ba}, B_{ba} はアインシュタイン係数と呼ばれる。 A_{ba} は放射場がなくとも自発的に起こる放射の効果 (自発放射, spontaneous emission) を表し、 B_{ba} は放射場の存在に誘導されて起こる放射の効果 (誘導放射, stimulated emission) を表す。各遷移に対する線強度の具体的な計算については、例えば Shore & Menzel (1965), Wiese & Fuhr (2009) を参考にすると良い。

束縛電子による光子の吸収過程の場合は、 $|a, n_{k,\alpha}\rangle \rightarrow |b, n_{k,\alpha} - 1\rangle$ の遷移と捉え、 \hat{H}_{int} の中の消滅演算子のみを 1 次で含む項だけを取り出して考える。基本的には放射過程と同じであるが、生成演算子の性質 (5.3.10) の代わりに消滅演算子の性質

$$\langle n_{k,\alpha} - 1 | \hat{a}_{k,\alpha} | n_{k,\alpha} \rangle = \sqrt{n_{k,\alpha}} \quad (5.3.26)$$

を用いるため、自発放射に対応する項は出てこず、遷移率は

$$w_{ab} = B_{ab}J_\nu \quad (5.3.27)$$

$$\text{ただし, } B_{ab} = \frac{g_b}{g_a} B_{ba} = \frac{2\pi}{3\epsilon_0\hbar^2 c g_a} S_{ab} \quad (5.3.28)$$

^{†32} 例えば束縛電子 N 個全体の状態について、ある状態 (a, m_a) と別の状態 (b, m_b) との遷移の寄与を考える場合、それぞれの状態の波動関数を用いて

$$\langle b, m_b | e\hat{\mathbf{x}} | a, m_a \rangle = e \int \psi_{b,m_b}^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \psi_{a,m_a}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) d^3x_1 d^3x_2 \dots d^3x_N$$

を計算することになる。ただし、 \mathbf{x}_i は原子に束縛された i 番目の電子の位置座標を表す。関数 $\psi_{b,m_b}^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$ と $\psi_{a,m_a}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$ のパリティ (偶奇性) が同じ場合、原点に対して逆側の象限における積分が相殺して上式はゼロになる。つまり、摂動の 1 次のオーダーで電気双極近似の下の遷移率を考える限りでは、同じパリティを持つ状態への遷移は起こり得ない。このような条件は一般に選択律と呼ばれ、特にこの注釈で述べた選択律はラポルテの規則 (Laporte's rule) と呼ばれる。選択律について詳しくは例えば Atkins & Friedman (2010) を参照のこと。

^{†33} 6次元相空間 $d^3x d^3p$ 中の体積 h^3 あたりに 1 個のモードが存在すると考えれば、節 5.1.1 の脚注で説明した光子の分布関数 f と $n_{k,\alpha}$ の間には $n_{k,\alpha} = fh^3/2$ という関係がある。ただし、偏極の自由度 2 も考慮した。よって $I_\nu = fh^4\nu^3/c^2$ という関係と併せれば $n_{k,\alpha} = I_\nu/(2h\nu^3/c^2)$ という関係があることが分かる。 n は $n_{k,\alpha}$ の各方向の放射についての平均なので、この表式になる。

と書ける。 B_{ab} もアインシュタイン係数と呼ばれる。

文献には遷移率の情報として A_{ba} (A-value [単位 s^{-1}]) か、或いは

$$f_{ab} = \frac{4\pi m_e \nu}{3\hbar e^2 g_a} S_{ab} \quad (5.3.29)$$

$$= \frac{2\epsilon_0 m_e c \hbar \nu}{e^2} B_{ab} \quad (5.3.30)$$

と定義される無次元量である振動子強度 (oscillator strength, f-value) が記載されている。 $g_a f_{ab}$ (gf-value, weighted oscillator strength) が載っていることもある。各状態 (エネルギー準位) にある原子や原子様イオンの統計的重み g_a, g_b の考え方を説明する。例えば CHIANTI (Dere et al., 2019)^{†34} のようなデータベースで振動子強度を調べる場合、注目している遷移に関する状態は、 $^2S_{1/2}$ や $^2P_{3/2}$ のような項記号 (term) を用いて書かれている。この項記号は、注目する状態の原子 (イオン) が持つ束縛電子の全スピン量子数 S 、全軌道角運動量量子数 L 、全角運動量量子数 J (付録 5.B.6 参照) と次のような関係にある。

$$^{2S+1}L_J \quad (5.3.31)$$

ただし、 $L = 0$ の場合は項記号の L の場所には S と書き、 $L = 1, 2, 3, 4, \dots$ の場合はそれぞれ P, D, F, G, \dots と書くという約束がある。項記号から注目している状態の全角運動量量子数 J が分かれば、その状態の統計的重みは $(2J + 1)$ と計算できる。

振動子強度は一般に 1 よりも小さい値を取る。水素様原子^{†35} についての遷移の振動子強度は次のように表される。

$$f_{ab} = g_I \frac{32}{3\sqrt{3}\pi} \frac{n_a}{n_b^3} \left(1 - \frac{n_a^2}{n_b^2}\right)^{-3} \quad (5.3.32)$$

n_a, n_b はそれぞれ低い方の準位 (a) と高い方の準位 (b) の電子軌道の主量子数である。 g_I は実際に振動子強度を計算することで求まる係数の部分を表したものであり、(束縛-束縛遷移の場合の) ゴント因子 (Gaunt factor) と呼ばれる。ゴント因子は考える遷移ごとに異なる値を取るが、おおむね 1 に近い値である。

5.3.2 束縛-束縛遷移 2：放射率と吸収係数

前節で、放射場との相互作用によって束縛-束縛遷移が起こる単位時間あたりの確率は、アインシュタイン係数によって記述されることを説明した。本節ではアインシュタイン係数と j_ν, α_ν の関係について説明する。

流体を構成する物質の原子で起きうる特定の遷移に注目する。注目する 2 つのエネルギー状態を a, b と書き、この遷移のエネルギー幅を $h\nu_0$ とする。状態 a にある原子の数密度を n_a のよ

^{†34} <https://www.chiantidatabase.org/chianti.html>

^{†35} H や He⁺ など、原子核と 1 個の電子から成る原子 (イオン) のこと。

うに書くと、時間 dt の間に体積 dV で遷移 $a \rightarrow b$ によって吸収される放射エネルギーは、

$$h\nu_0 \cdot n_a dV \cdot dt B_{ab} \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \int d\nu \delta(\nu - \nu_0) I_\nu \quad (5.3.33)$$

と書けるため、特定の放射方向、振動数幅 $d\nu$ のみについて吸収される放射エネルギーは

$$dV dt d\Omega d\nu \frac{h\nu_0}{4\pi} n_a B_{ab} \delta(\nu - \nu_0) I_\nu \quad (5.3.34)$$

と書ける。吸収される放射強度の量は $\alpha_\nu I_\nu ds$ と書けることと、放射強度の定義 (5.1.3)、 $dV = dA ds$ を用いると、

$$\alpha_\nu(\nu) = \frac{h\nu}{4\pi} n_a B_{ab} \delta(\nu - \nu_0) \quad (5.3.35)$$

を得る。上記のようにデルタ関数が係る、すなわち注目する遷移のエネルギー幅に対応する振動数 ν_0 の光子のみが吸収されることが期待されるが、実際には有限の幅を持つ関数 $\phi(\nu)$ を用いて

$$\alpha_\nu(\nu) = \frac{h\nu}{4\pi} n_a B_{ab} \phi(\nu) \quad (5.3.36)$$

と表される。ただし、 $\phi(\nu)$ は $\nu = \nu_0$ で鋭いピークを持ち、

$$\int_0^\infty \phi(\nu) d\nu = 1 \quad (5.3.37)$$

と規格化されている。このことは、実際に観測される輝線または吸収線が有限の幅を持つことに対応している。 $\phi(\nu)$ は線輪郭関数 (line profile function) と呼ばれる。線輪郭関数の具体的な形については節 5.3.4 で説明する。誘導放射を負の吸収と捉えて、この効果まで含めると、

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \phi(\nu) (n_a B_{ab} - n_b B_{ba}) \quad (5.3.38)$$

と書ける。一方で、同様の考察より、この遷移に関する放射率は

$$j_\nu(\nu) = \frac{h\nu}{4\pi} n_b A_{ba} \phi(\nu) \quad (5.3.39)$$

と書ける。ただし、吸収係数と放射率には同じ線輪郭関数が係ると仮定した。

上記の表式から源泉関数を計算すると、

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} \quad (5.3.40)$$

$$= \frac{n_b A_{ba}}{n_a B_{ab} - n_b B_{ba}} \quad (5.3.41)$$

$$= \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(\frac{g_b n_a}{g_a n_b} - 1 \right)^{-1} \quad (5.3.42)$$

と書ける。ただし、前節で説明したアインシュタイン係数間の関係を用いた。物質が熱平衡にあるときには、ボルツマン因子 (付録 3.B.2 参照) を用いて

$$\frac{n_b}{n_a} = \frac{g_b}{g_a} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) \quad (5.3.43)$$

と書けるので、(散乱を考慮していない) 源泉関数は

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (5.3.44)$$

となり、プランク関数 B_ν に一致することが分かる。これがキルヒホッフの法則である。

あとは、対象とする流体を構成する原子種についてのあらゆる遷移に対する j_ν, α_ν を計算して足し合わせれば、束縛-束縛遷移に関する放射率と吸収係数が求まることになる。例えば CHIANTI のような実用的なデータベースでは、前節で説明した電気双極遷移に加え、電気四重極遷移と磁気双極遷移、すなわち式 (5.3.7) の展開で第 2 項まで考慮した効果など、より高次の遷移についても計算されている。また、相対論的な効果による微細構造 (付録 5.B.6 参照) も考慮されている。

5.3.3 [トピック] スペクトル線で太陽大気を見る

図 5.7 は地球を周回するひので衛星が、太陽ディスクの縁にある黒点付近を 2 種類の波長の光で撮った画像である。上段は 430 nm の波長の光、下段は 396 nm の波長の光の放射を捉えている。図の色は人工的に着けられたものである。図を見ると、異なる波長で観測すると異なる高度の領域が写し出されることが分かる。上段の画像が写し出しているのは光球、下段の画像が写し出しているのは彩層 (chromosphere) と呼ばれる光球より数千 km 程度上空の層である。各画像の中央に見える黒点は、温度が低いために暗く映っている。原動画が YouTube ^{†36} で公開されているので見て欲しい。異なる波長では異なる高度の層が見えること、また温度の低い部分が暗く見えることを放射輸送方程式を用いて説明する。

図 5.8 は地上の分光装置によって観測された太陽光のスペクトルである。可視領域の太陽光に含まれる各波長の成分の強さが色の明暗で表現されている。図を見ると、可視領域の太陽光は大雑把には連続的な波長成分を持つ光として考えられる。これは節 3.B.8 で説明したように、光球付近の温度 (5770 K) の黒体放射が見えているからである。しかし、細かく見ると、周りと比較して成分が弱い波長域が無数の黒い線として写っている。このように黒く見える波長は吸収線と呼ばれる。逆にどの吸収線にも該当しない波長帯は連続光と呼ばれる。吸収線ができる理由を説明する。節 5.2.1 で説明したように、光線に沿って源泉関数 S_ν があまり変化しない場

^{†36} <https://www.youtube.com/watch?v=Z2jeTV6LpG0>

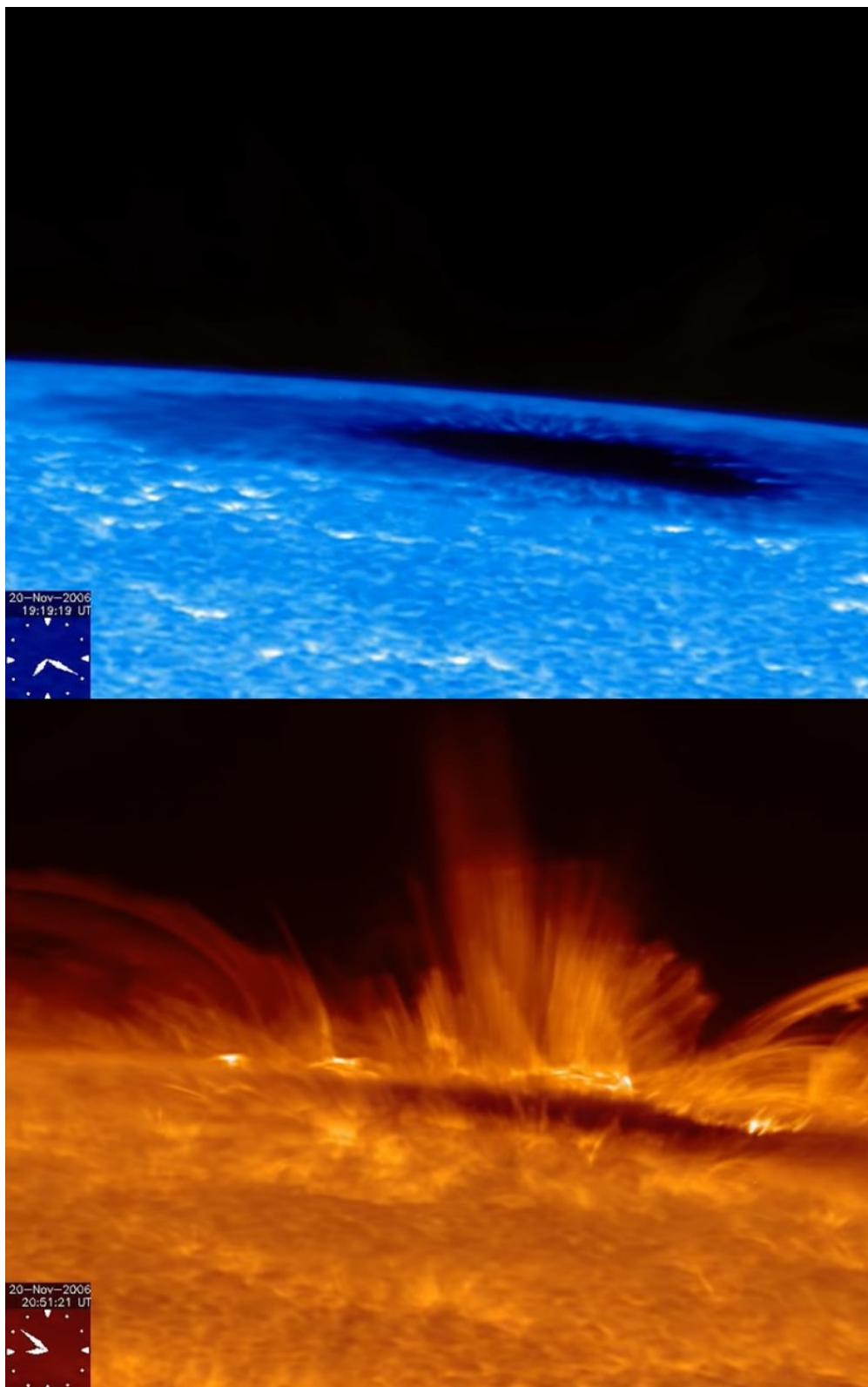


図 5.7 ひので衛星が観測した黒点とその上空：上段は 430 nm (G バンドと呼ばれる波長帯にある CH 分子の遷移による線) の波長で撮られた画像で、太陽光球が写っている。下段は 396 nm (通称 H 線、Ca⁺ の遷移による線) の波長で撮られた画像で、彩層が写っている。原動画は <https://www.youtube.com/watch?v=Z2jeTV6LpG0>。© 国立天文台/JAXA

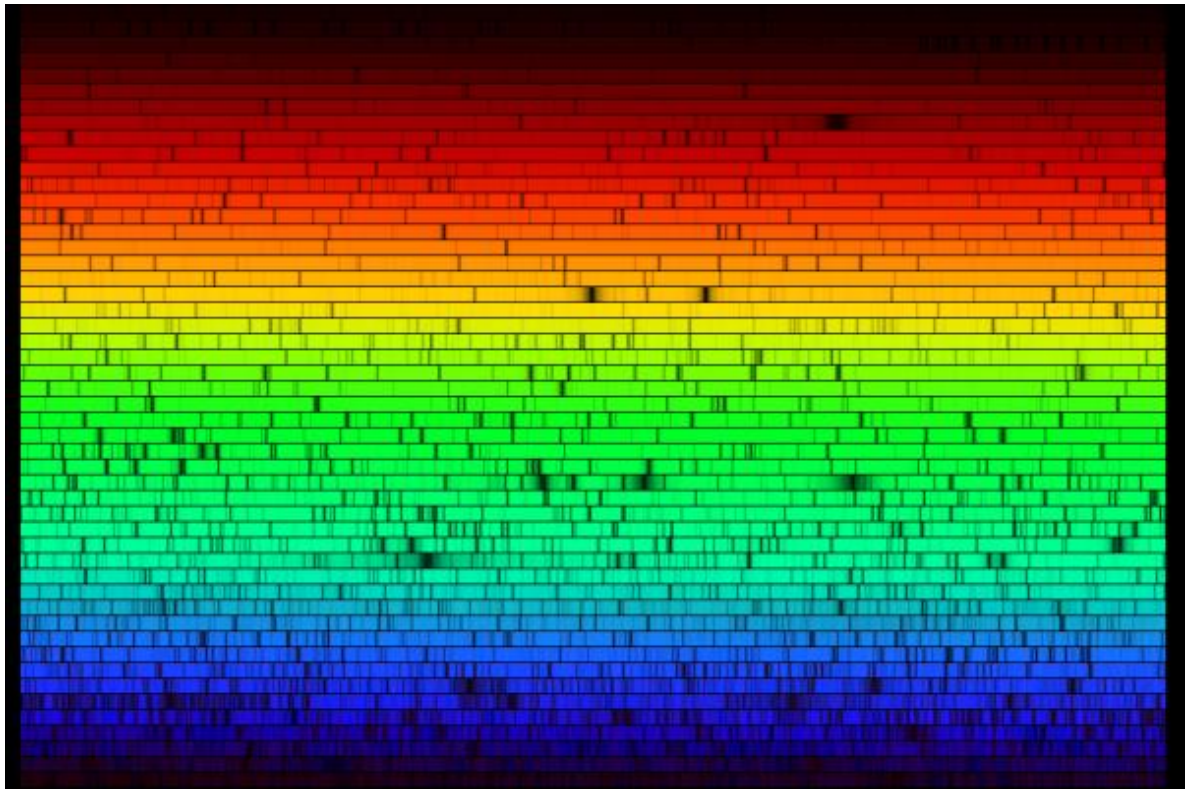


図 5.8 地上の分光器で観測された太陽光スペクトル：Credit: N.A.Sharp, NOAO/NSO/Kitt Peak FTS/AURA/NSF

合は、光線に沿った放射強度の変化は式 (5.2.11) の通り、

$$I_\nu(\tau_\nu) = S_\nu + \{I_\nu(0) - S_\nu\} \exp(-\tau_\nu) \quad (5.3.45)$$

となる。すなわち、放射強度は光線に沿って源泉関数に近づこうとする性質があるのだった。ここで、 τ_ν は光球から測った光学的厚さとする。特定の元素の特定の遷移を考えて、その遷移のエネルギー幅を $h\nu_0$ とする。吸収係数 α_ν は一般に、束縛-束縛遷移や後に説明する散乱などによる寄与の合計として決定されるが、 ν_0 付近の振動数における吸収係数は、この遷移による線輪郭関数 $\phi(\nu)$ の形の寄与があるので、周りの振動数での α_ν より値が大きくなっている。つまり、 ν_0 に対しての

$$\tau_\nu(s) = \int^s \alpha_\nu(s') ds' \quad (5.3.46)$$

は、周りの振動数の場合より光線に沿って早く大きくなる。 $I(\tau_\nu)$ は $\exp(-\tau_\nu)$ に比例したスピードで S_ν に近づくので、 ν_0 の光は光線に沿って早く S_ν に近づくことになる。 S_ν が大体プランク関数 B_ν であると仮定すると、温度が低いほど S_ν は小さくなるので、表面 (=連続光で $\tau_\nu \simeq 1$ の面) より温度の低い上空の層を光線が貫く間に、 ν_0 の光だけが S_ν に近づいて小さな I_ν の値になる。このようにして吸収線が形成される。今説明したことの模式図を図 5.9 に示し

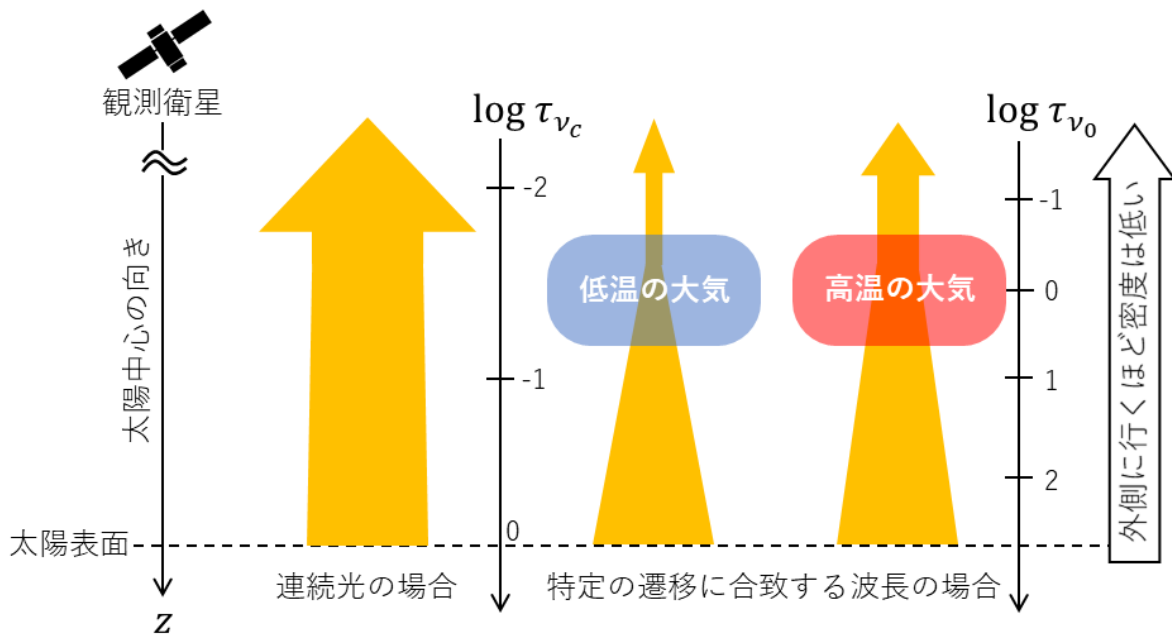


図 5.9 吸収線の形成の模式図：① 連続光の場合は吸収の起こりやすさ α_ν が小さい ($=\tau_\nu$ の目盛の刻み幅が大きい) ため、表面で発せられた放射強度がそのまま観測される。② 例えば H 線のような特定の遷移に合致する波長の場合、 α_ν が大きい ($=\tau_\nu$ の目盛の刻みが細かい) ため、表面で発せられた放射は大気で吸収され、観測される強度は小さくなる (スペクトル図では吸収線として現れる)。③ 大気の数密度 n は高度が高くなる程小さいため、ある高度を超えると $\alpha_\nu \propto n$ は十分小さくなって吸収は起こらなくなる。この高度は各吸収線によって異なる。④ 故に観測される放射強度は最後に吸収が起きていた高度の温度情報を持つ。このため、この波長で撮られた画像では大まかに、その高度において温度が低い部分は暗く写る。

た。つまり、ひとつひとつの吸収線には何かしらの遷移が対応している。注目する振動数付近の連続光が発せられる層と、発せられた光線がその後に通る層の間の相対的な温度関係によって、 ν_0 が吸収線になるか輝線^{†37}になるかが決まる。

図 5.7 の上段の画像は CH 分子に関する特定の吸収線の波長、下段の画像は Ca 原子に関する特定の吸収線の波長で撮られた画像である^{†38}。これらの波長の光は、光球付近または上空の S_ν に近づいた結果の放射強度を見ていると述べた。観測衛星で得られる放射強度は、式 (5.2.28) より

$$I_+(0, \mu) = \int_0^\infty \frac{dz}{\mu} \alpha_\nu(z) S(z) \exp\left(-\frac{\tau_\nu(z)}{\mu}\right) \quad (5.3.47)$$

と書けた。ただしここでの $\tau_\nu(z)$ は観測衛星 ($z = 0$) から測った光学的深さである。上式の被積

^{†37} 周りの振動数の放射強度より大きな放射強度が ν_0 において観測される場合は輝線と呼ばれる。

^{†38} 太陽の構成物質は主に水素とヘリウムであるが、それ以外の物質も微量存在する。

分関数は

$$C(z) = S(z)\alpha_\nu(z) \exp(-\tau_\nu(z)/\mu) \quad (5.3.48)$$

である。 $\exp(-\tau_\nu(z)/\mu)$ は一般に、 z 、すなわち τ_ν が大きくなる程小さくなり、 $\alpha_\nu(z)$ は注目する遷移に関わる粒子の数密度に比例して z が小さくなる程小さくなる^{†39}ので、 $C(z)$ は一般に特定の高度領域 $z = z_0 \sim z_0 - \delta z$ のみで大きな値を持つ。従って、式 (5.3.47) の積分はその高度帯の $S(z)$ によって決定される。 $z_0, \delta z$ は対象とする遷移の遷移率、すなわち α_ν の値によって吸収線ごとに変わる。つまり、 $z_0 \sim z_0 - \delta z$ の高度の $S_\nu(z)$ に従って吸収線の観測される放射強度が決まるので、吸収線で撮った画像にはこの高度領域の様子が写ることになる。 $C(z)$ は寄与関数 (contribution function) と呼ばれる。 S_ν が大体プランク関数であるとするれば、温度の高い部分で形成された吸収線は温度の低い部分で形成された吸収線より明るくなる。

源泉関数がほとんどプランク関数であるという仮定は、光球 (太陽表面から高度 500 km 程度までの領域) で形成される吸収線の場合に適用できる。一方で、Ca H 線 (図 5.7 の下段, 396 nm) のように、彩層 (太陽表面からの高度がおよそ 500 ~ 数千 km の間の領域) で形成される吸収線を説明するにはもう少し複雑な議論が必要になる。図 5.4 でも分かるように、太陽大気 of 温度は高度約 500 km を境に下降から上昇へ転じる。彩層上部は 1 万 K 程度と考えられている。光球より温度の高い層で形成されるスペクトルが輝線ではなく吸収線になっているのは、散乱の効果によるものと考えられる。光球では 1 に近い値だった光子破壊率 ϵ_{ν_0} ($\nu_0 = 396$ nm) が彩層では小さくなる。その結果、節 5.2.4 で述べたように、源泉関数 S_{ν_0} はプランク関数 $B_{\nu_0}(T)$ よりずっと小さい値になるため、放射がこの小さい S_{ν_0} に近づいた結果、吸収線が形成される。

光球では $\epsilon_{\nu_0} \simeq 1$ なのに彩層では $\epsilon_{\nu_0} \ll 1$ である理由を説明するために、次の簡単なモデルを考える。Ca⁺ は実際には様々なエネルギー準位 (電子配置) をとり得るが、ここでは 2 準位のみを持つと考える。この低い準位 (準位 1) と高い準位 (準位 2) の間の遷移が 396 nm に対応する。物質が熱平衡状態にある場合、低い準位から高い準位への単位時間あたりの遷移数と高い準位から低い準位への単位時間あたりの遷移数が釣り合った結果、両者の数密度が一定に保たれている。遷移の原因は光子の吸収・放射に伴うものと他の物質粒子 (主に電子) との衝突に伴うものに大別できる。ある瞬間にある場所で起きている低い準位から高い準位への遷移 (励起) と逆の遷移 (脱励起) のペアを遷移理由について場合分けすると、注目する光線 (放射方向) の光子数を増減させる効果は次の 7 パターンに区分できる。

- (a) 注目する光線の光子の吸収に伴う励起と衝突に伴う脱励起
- (b) 注目する光線の光子の吸収に伴う励起と一般に異なる方向への自発放射に伴う脱励起
- (c) 注目する光線の光子の吸収に伴う励起と一般に異なる方向への誘導放射に伴う脱励起
- (d) 衝突に伴う励起と注目する光線への自発放射に伴う脱励起
- (e) 衝突に伴う励起と注目する光線への誘導放射に伴う脱励起

^{†39} 太陽大気は外側に行くほど密度が小さくなる (図 5.4 の (B) 参照)。

(f) 一般には異なる方向からの光子の吸収に伴う励起と注目する光線への自発放射に伴う脱励起

(g) 一般には異なる方向からの光子の吸収に伴う励起と注目する光線への誘導放射に伴う脱励起

(a) から (c) は注目する光線から光子を消失させる効果であり、(d) から (g) は注目する光線に光子を加える効果である。 ν_0 の振動数帯では、これらの効果が放射輸送方程式の右辺を支配している。吸収や自発放射、誘導放射の効果はアインシュタイン係数を用いて表される。衝突に伴う励起や脱励起が単位時間あたりに起こる確率をそれぞれ C_{12}, C_{21} と書くことにすると、注目する光線についての、 ν_0 付近の振動数帯で積分した放射輸送方程式は次のように書ける。

$$\frac{dI_{\nu_0 \text{ 付近}}}{ds} = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_1 \left[\underbrace{-B_{12}I_{\nu_0} \frac{C_{21}}{P_{21}}}_{(a)} \underbrace{-B_{12}I_{\nu_0} \frac{A_{21}}{P_{21}}}_{(b)} \underbrace{-B_{12}I_{\nu_0} \frac{B_{21}J_{\nu_0}}{P_{21}}}_{(c)} \right. \\ \left. \underbrace{+C_{12} \frac{A_{21}}{P_{21}}}_{(d)} \underbrace{+C_{12} \frac{B_{21}I_{\nu_0}}{P_{21}}}_{(e)} \underbrace{+B_{12}J_{\nu_0} \frac{A_{21}}{P_{21}}}_{(f)} \underbrace{+B_{12}J_{\nu_0} \frac{B_{21}I_{\nu_0}}{P_{21}}}_{(g)} \right] \quad (5.3.49)$$

$$\text{ただし, } P_{21} = A_{21} + B_{21}J_{\nu_0} + C_{21} \quad (5.3.50)$$

$$J_{\nu_0} = \int J_{\nu}(\nu)\phi(\nu)d\nu = \int J_{\nu}(\nu)\delta(\nu - \nu_0)d\nu = J_{\nu}(\nu = \nu_0) \quad (5.3.51)$$

s は光線に沿った位置変数、 n_1 は低い方の準位にある粒子数密度である。 P_{21} は単位時間あたりに脱励起が起こる確率の全体である。線輪郭関数 $\phi(\nu)$ は簡単のためにデルタ関数であると考ええる。上式を見ると、(c) の効果と (g) の効果は打ち消し合うことが分かる。次の量を定義する。

$$\alpha_{\nu_0} = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_1 \left[\underbrace{\frac{B_{12}C_{21}}{P_{21}}}_{-(a)/I_{\nu_0}} \underbrace{-\frac{B_{21}C_{12}}{P_{21}}}_{-(e)/I_{\nu_0}} \right] \quad (5.3.52)$$

$$\sigma_{\nu_0} = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_1 \underbrace{\frac{A_{21}B_{12}}{P_{21}}}_{-(b)/I_{\nu_0}=(f)/J_{\nu_0}} \quad (5.3.53)$$

$$j_{\nu_0} = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_1 \underbrace{\frac{A_{21}C_{12}}{P_{21}}}_{(d)} \quad (5.3.54)$$

すると、放射輸送方程式は

$$\frac{dI_{\nu_0 \text{ 付近}}}{ds} = j_{\nu_0} + \sigma_{\nu_0}J_{\nu_0} - (\alpha_{\nu_0} + \sigma_{\nu_0})I_{\nu_0} \quad (5.3.55)$$

と書け、式 (5.1.31) の定常の場合に一致する。つまり、今定義した $\alpha_{\nu_0}, \sigma_{\nu_0}, j_{\nu_0}$ はそれぞれ吸収係数、散乱係数、放射率を表す。 C_{12} と C_{21} について、物質が熱平衡にある場合は衝突に伴う励起数と脱励起数は釣り合わなければならない。

$$\text{熱平衡のとき} \quad n_1 C_{12} = n_2 C_{21} \quad (5.3.56)$$

熱平衡のときには数密度比は

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{h\nu_0}{k_B T}\right) \quad (5.3.57)$$

となるため、 C_{12} と C_{21} の間には

$$\frac{C_{12}}{C_{21}} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{h\nu_0}{k_B T}\right) \quad (5.3.58)$$

という関係が成り立たなければならない。この関係とアインシュタイン係数間の関係を用いて式 (5.3.52), (5.3.53) から C_{12}, B_{12} を消去すると、光子破壊確率は次のように書ける^{†40}。

$$\epsilon_{\nu_0} = \frac{\alpha_{\nu_0}}{\alpha_{\nu_0} + \sigma_{\nu_0}} \quad (5.3.59)$$

$$= \frac{C_{21}}{A_{21}/[1 - \exp(-h\nu_0/k_B T)] + C_{21}} \quad (5.3.60)$$

$$= \frac{C_{21}}{A_{21} + B_{21}B_{\nu_0} + C_{21}} \quad (5.3.61)$$

C_{21} は一般に衝突相手の数密度に比例する。光球は物質の密度が大きいため、物質間の衝突頻度が高く、 $C_{21} \gg A_{21}$ となる。よって $\epsilon_{\nu_0} \simeq 1$ となり、散乱の効果は無視できるほど小さくなる。一方で、彩層は密度が低いため、 $C_{21} \ll A_{21}$ となり ϵ_{ν_0} は小さい値を取る。つまり、彩層では散乱の効果が強く、源泉関数はプランク関数を大きく下回る。

コロナは 100 万 K と、太陽表面 (6000 K) より高温であるのにも関わらず、図 5.8 の太陽光スペクトルにコロナで形成されたと思しき目立った輝線が無いのは、コロナの数密度が光球や彩層に比べて非常に小さいためである。コロナを見る場合は極端紫外線 (EUV) や X 線のような短い波長帯の光が用いられる。表面付近の温度帯 ($\sim 6000\text{K}$) による黒体放射では X 線の放射は殆どないため、薄いコロナが発する弱い放射を捉えることができる。図 5.10 はひので衛星によって観測された極端紫外線の波長域の太陽光スペクトルである。この波長域では輝線が現れていることが分かる。これらの輝線はコロナで形成されたものである。図に黒色の矢印で示した輝線は Fe^{5+} イオン、赤色の矢印で示した輝線は Fe^{6+} イオンが発している。各価数のイオンは、コロナの環境下で安定して存在できる温度帯がおよそ決まっている。より高温の部分ほど、より高価のイオンが多く存在している。つまり、様々な価数のイオンが発する輝線で観測すれば、コロナの様々な温度の部分を映し出すことができる。

^{†40} $S_{\nu_0} = j_{\nu_0}/\alpha_{\nu_0}$ がプランク関数 B_{ν_0} になることも、実際に計算すると分かる。

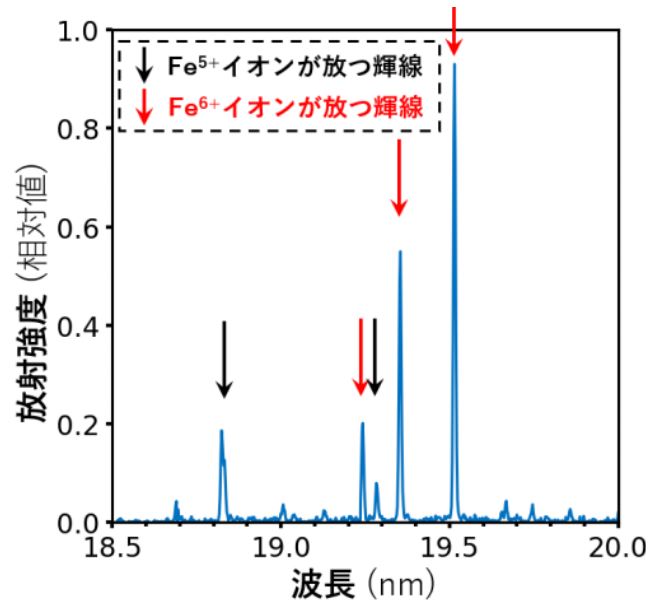


図 5.10 ひので衛星によって観測された極端紫外線の波長域での太陽スペクトル：2013 年 11 月 26 日に静穏領域を観測したときのもの。© 国立天文台/JAXA

図 5.11 はひので衛星によって X 線から極端紫外線の波長帯 (およそ 0.6 - 20 nm) で撮られた画像である。複数の輝線による光を捉えている。太陽表面は暗く写り、コロナが明るく写し出されている。

5.3.4 線輪郭

前節で束縛-束縛遷移による吸収線は有限の幅を持つ、すなわち特定のエネルギー幅の遷移を考えた場合、遷移によって放射される光子の振動数にはゆらぎがあることを説明し、その幅を表す関数として線輪郭関数 $\phi(\nu)$ を導入した。本節ではこの有限のゆらぎの主な原因を 2 つ紹介し、それらの原因を組み込んだ線輪郭関数のモデルを説明する。

ドップラー幅

第 6 章でも詳しく説明するが、各々の粒子は流体の共動系で見ているときにも熱運動によってランダムな方向に動いている。よって、共動系で評価される吸収係数にはドップラー効果によって有限の幅が生まれる。ある粒子が v の速度で観測者に近づいている状況を想定すると、粒子の静止系での振動数 ν_0 と流体の共動系での振動数 ν の間には、式 (5.1.56) より、

$$\nu - \nu_0 = \frac{\nu_0 v}{c} \quad (5.3.62)$$

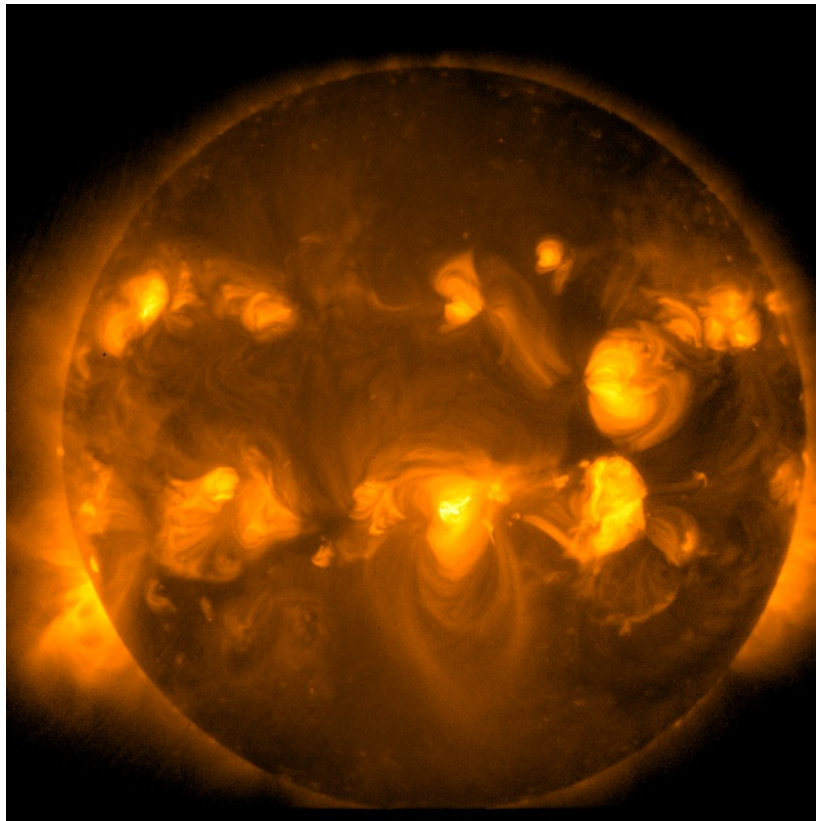


図 5.11 ひので衛星が X 線で撮影した太陽コロナ：© 国立天文台/JAXA

という関係がある。つまり、

$$v = \frac{c(\nu - \nu_0)}{\nu_0} \quad (5.3.63)$$

$$dv = \frac{cd\nu}{\nu_0} \quad (5.3.64)$$

である。一方で、節 (6.2.3) で説明するように、流体が局所熱平衡にある場合は、熱運動の速度分布はマクスウェル-ボルツマン分布に近似できる。マクスウェル-ボルツマン分布において $v \sim v + dv$ の間の速度を持つ粒子数は

$$\exp\left(-\frac{m_a v^2}{2k_B T}\right) dv \quad (5.3.65)$$

に比例する。 m_a は粒子の質量である。よって、共動系において観測される振動数が $\nu \sim \nu + d\nu$ の間にある確率は

$$\exp\left[-\frac{m_a c^2 (\nu - \nu_0)^2}{2\nu_0^2 k_B T}\right] d\nu \quad (5.3.66)$$

に比例することが分かる。つまり、ドップラー効果のみを考慮した場合、線輪郭関数は

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\delta\nu_D\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{\delta\nu_D^2}\right] \quad (5.3.67)$$

$$\text{ただし, } \delta\nu_D = \nu_0 \sqrt{\frac{2k_B T}{m_a c^2}} \quad (5.3.68)$$

というガウス関数型になる。 $\delta\nu_D$ は線輪郭関数の典型的な幅で、ドップラー幅 (熱幅) と呼ばれる。

衝突幅

考えているプラズマが十分な圧力を持っている場合は、前述のドップラー幅に加えて、ガウス関数より広い裾野 (wing) を持つ成分が顕著になる。これは古典的には、光を吸収放出する粒子と他の粒子との衝突による効果と解釈され、衝突幅と呼ばれる。プラズマ中の注目する粒子と他の粒子との衝突頻度 (単位 $\text{s}^{-1} = \text{Hz}$)^{†41} を ν_{col} とすると、電磁波を放射する原子は ν_{col} の頻度で断続を受ける。この効果は、原子の放出する電磁波が $1/\nu_{\text{col}}$ の寿命を以て減衰するのと同様である。つまり、この原子が

$$E(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ E_0 \exp(-\nu_{\text{col}} t) \exp(2\pi i \nu_0 t) & (t \geq 0) \end{cases} \quad (5.3.69)$$

という電磁波を放出すると考える。これをフーリエ変換すると、

$$\hat{E}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \exp(-2\pi i \nu t) dt \quad (5.3.70)$$

$$= \frac{E_0}{\nu_{\text{col}} - 2\pi i (\nu_0 - \nu)} \quad (5.3.71)$$

と計算できるので、この放射による放射強度への寄与は

$$\delta I_\nu(\nu) \propto |\hat{E}(\nu)|^2 = \frac{E_0^2}{4\pi^2 (\nu - \nu_0)^2 + \nu_{\text{col}}^2} \quad (5.3.72)$$

だと分かる。つまり、衝突幅を表す規格化された線輪郭関数は

$$\phi(\nu) = \frac{\nu_{\text{col}}/2\pi^2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\nu_{\text{col}}/2\pi)^2} \quad (5.3.73)$$

と表される。この関数形はローレンツ輪郭と呼ばれる。

もうひとつローレンツ輪郭を作る機構として自然幅がある。自然幅については 323 ページの脚注で説明する。

^{†41} プラズマ中の衝突頻度については節 6.1.4 や 6.5 で説明する。

ドップラー幅と衝突幅の組み合わせ

ドップラー効果による線輪郭とローレンツ輪郭を両方考慮する場合は、ドップラー効果によって中心振動数が ν_0 からずれたローレンツ輪郭の、マクスウェルボルツマン分布についての平均を考える。

$$\phi(\nu) = \frac{\nu_{\text{col}}}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{m_a/2\pi K_B T} \exp(-m_a v^2/2k_B T)}{(\nu - \nu_0 - \nu_0 v/c)^2 + (\nu_{\text{col}}/2\pi)^2} dv \quad (5.3.74)$$

フォークト関数

$$H(a, u) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2)}{a^2 + (u - y)^2} dy \quad (5.3.75)$$

を導入すると、次のように書ける。

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \delta\nu_D} H(a, u) \quad (5.3.76)$$

$$\text{ただし, } a = \frac{\nu_{\text{col}}}{2\pi \delta\nu_D} \quad (5.3.77)$$

$$u = \frac{\nu - \nu_0}{\delta\nu_D} \quad (5.3.78)$$

5.3.5 散乱

自由電子による散乱

まず自由電子による光子の散乱について説明する。散乱前の電子が静止している観測系で考え、散乱後の電子の運動量を \mathbf{p} 、散乱前と後の光子の運動量をそれぞれ $\hbar\mathbf{k}_{\text{in}}$, $\hbar\mathbf{k}_{\text{out}}$ とする。運動量保存則と相対論的なエネルギー保存則は

$$\hbar\mathbf{k}_{\text{in}} = \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}_{\text{out}} \quad (5.3.79)$$

$$m_e c^2 + \hbar c k_{\text{in}} = \sqrt{(m_e c^2)^2 + c^2 p^2} + \hbar c k_{\text{out}} \quad (5.3.80)$$

と書ける (節 7.7 参照)。ただし、 m_e は電子質量を表す。この 2 式から p を消去すると、光子の波長 $\lambda = 2\pi/k$ を用いて

$$\lambda_{\text{out}} - \lambda_{\text{in}} = \lambda_C (1 - \cos\theta) \quad (5.3.81)$$

$$\text{ただし, } \lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 2.43 \times 10^{-3} \text{ nm} \quad (5.3.82)$$

という関係が分かる。 θ は散乱角である。 λ_C はコンプトン波長と呼ばれる。コンプトン波長に比べて十分に大きな波長の光子を考える場合には、散乱前後の光子の波長は変化しないと考えることができる。つまり、弾性散乱を考えれば十分である。付録 2.A.7 で説明してあるように、

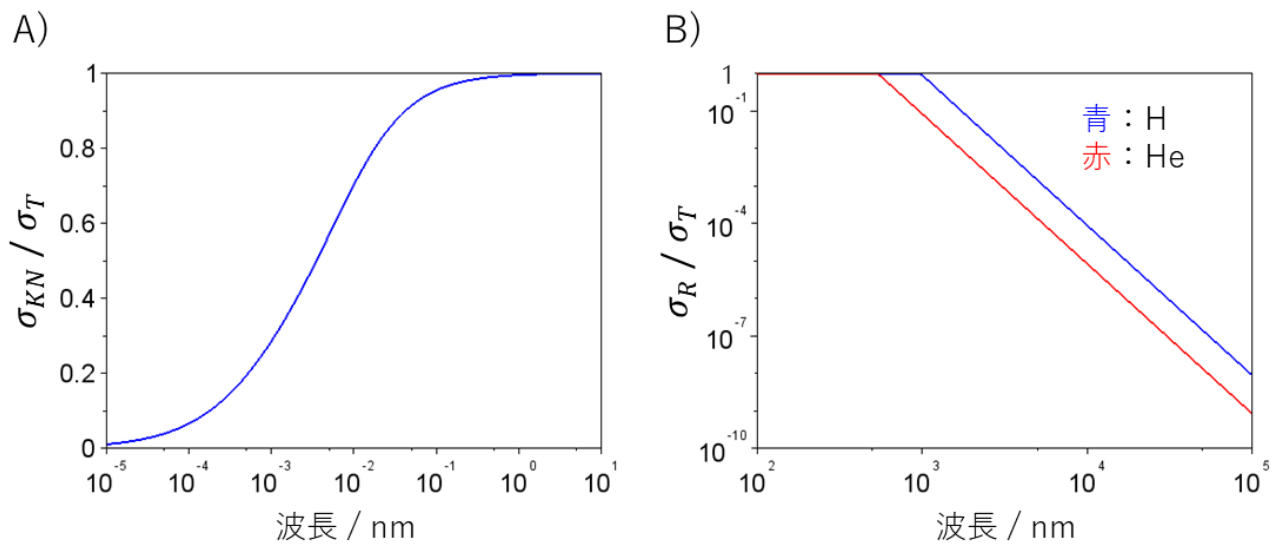


図 5.12 (A) コンプトン散乱の断面積 (クライン-仁科の公式)、(B) 水素とヘリウム原子のレイリー散乱断面積：トムソン散乱断面積 $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$ で規格化されている。

古典電磁気学によるとそのような散乱の断面積はトムソン散乱断面積

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \theta) \tag{5.3.83}$$

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \tag{5.3.84}$$

で与えられる。ただし、 r_0 は古典電子半径である。因みに、高エネルギーの光子、すなわちその波長に比べてコンプトン波長が無視できない光子の場合の自由電子による散乱はコンプトン散乱と呼ばれ、クライン-仁科の公式によって、次のようにその断面積が与えられる^{†42}。

$$\sigma_{KN} = \sigma_T \cdot \frac{3}{4} \left[\frac{1+x}{x^3} \left\{ \frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right\} + \frac{\ln(1+2x)}{2x} - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right] \tag{5.3.85}$$

$$\text{ただし, } x = \frac{h\nu}{m_e c^2} \tag{5.3.86}$$

入射光には偏極が無いと仮定されている。特に $x < 1$ の場合は

$$\sigma_{KN} \simeq \sigma_T \left(1 - 2x + \frac{26x^2}{5} + \dots \right) \tag{5.3.87}$$

と展開できる。 $x \ll 1$ の極限ではトムソン散乱の断面積になることが分かる。図 5.12 の (A) に、クライン-仁科の公式で与えられるコンプトン散乱断面積を示した。

^{†42} この公式は、相対論的な場の量子論 (量子電磁気学、QED) を用いて導かれる。コンプトン散乱とその微分断面積について詳しくは、例えば Schwartz (2013, §13.5) を参照。

以上の考察では散乱前の電子は静止していると考えていたが、実際には流体の共動系で考えていたとしても、電子は熱運動によってランダムな方向に動いている。前節のドップラー幅と同様の議論によって散乱前後の光子の共動系で見た振動数は

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\bar{v}}{c} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m_e c^2}} \quad (5.3.88)$$

$$= 2 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1/2} \cdot T^{1/2} \quad (5.3.89)$$

程度変化すると見積もられる。このずれ幅は小さいので、不透明度の計算時には無視して、共動系で見ても相変わらず弾性散乱であると考えられることもある。因みに、太陽コロナの 100 万 K の高温の場合にはこのずれ幅は 2% 程度になるので、日食時や太陽ディスクを隠した上でコロナ観測で得られる散乱光のスペクトル (可視光領域) では、光球付近で作られる吸収線はドップラー効果によりかき消されている。

原子による散乱

次に原子による光子の弾性散乱、すなわちレイリー散乱について考える。簡単のために、状態 $|A\rangle$ にある 1 電子原子を考え、散乱前はモード (\mathbf{k}, α) の光子が 1 つ、散乱後にはモード (\mathbf{k}', α') の光子が 1 つ存在すると考える。束縛-束縛遷移における光子の吸収や放出を考えた際は、その 1 次の遷移率の計算時に、式 (5.3.3) の \hat{H}_{int} において $\hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha}, \hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha}^\dagger$ のみを 1 次で含む項を取り出した。光子の散乱を考える際は、過程前後での光子数は変わらないので、 $\hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha} \hat{a}_{\mathbf{k}', \alpha'}^\dagger$ または $\hat{a}_{\mathbf{k}', \alpha'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha}$ を含む項を取り出す。つまり散乱前の光子状態を $|\mathbf{k}, \alpha\rangle$ 、散乱後の光子状態を $|\mathbf{k}', \alpha'\rangle$ と書くと、

$$\langle \mathbf{k}', \alpha' | \hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha} \hat{a}_{\mathbf{k}', \alpha'}^\dagger | \mathbf{k}, \alpha \rangle = 1 \quad (5.3.90)$$

となることを使って、散乱前の全系の状態 $|A; \mathbf{k}, \alpha\rangle$ と散乱後の状態 $|A; \mathbf{k}', \alpha'\rangle$ に対して、

$$\langle A; \mathbf{k}', \alpha' | \hat{H}_{\text{int}} | A; \mathbf{k}, \alpha \rangle = \langle A; \mathbf{k}', \alpha' | \frac{e^2}{2m} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) | A; \mathbf{k}, \alpha \rangle \quad (5.3.91)$$

$$= \langle A; \mathbf{k}', \alpha' | \frac{e^2}{2m_e} \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega} \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \alpha} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}', \alpha'} (\hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha} \hat{a}_{\mathbf{k}', \alpha'}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{k}', \alpha'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, \alpha}) | A; \mathbf{k}, \alpha \rangle \quad (5.3.92)$$

$$= \frac{e^2}{2m_e} \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega} \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \alpha} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}', \alpha'} \cdot 2 \quad (5.3.93)$$

と計算できる。ただし、長波長近似

$$\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \simeq \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}) \simeq 1 \quad (5.3.94)$$

をしている。よって、式 (5.B.298) より、1 次の遷移振幅は

$$c^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \frac{e^2}{2m_e} \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega} 2 \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \alpha} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}', \alpha'} \cdot t \quad (5.3.95)$$

となる。

上述の遷移振幅と同じオーダー^{†43}の効果として、 \hat{H}_{int} 中の $\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ の項が 2 回はたらき、光子の吸収と放射が行われる効果を考える必要がある。つまり、散乱前に状態 $|A\rangle$ にあった原子が光子 1 つを吸収 (放射) して状態 $|I\rangle$ に遷移し、その後光子 1 つを放射 (吸収) することで元の状態 $|A\rangle$ に戻る効果である。中間状態 I は束縛電子が電離して自由電子になっている状態も含む。これはすなわち $\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ の項に対して、摂動の 2 次の遷移振幅を考えるということである。式 (5.B.297) の第 3 項を考えることで、2 次の遷移振幅は次のように書ける^{†44}。

$$c^{(2)}(t) = -\frac{1}{i\hbar} \left(\frac{e}{m_e} \right)^2 \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega} \sum_I \left[\frac{\langle A | \mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{p}} | I \rangle \langle I | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} | A \rangle}{E_I - E_A - \hbar\omega} + \frac{\langle A | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} | I \rangle \langle I | \mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{p}} | A \rangle}{E_I - E_A + \hbar\omega} \right] t \quad (5.3.96)$$

上式は、例えばある中間状態 I に対して $\hbar\omega = E_I - E_A$ となる振動数の光子の散乱を考える場合に発散してしまうが、これは物理的にはおかしい挙動である。そのような発散を回避するために、次のような現象論的な処置を行う。以後簡単のために原子の始状態 A が基底状態である場合を考える。つまり、全ての I について $E_I > E_A$ であるということである。式 (5.B.298) より、 $A \rightarrow I$ の励起を表す 1 次の遷移振幅 $c_{\text{吸}}^{(1)}$ は、次のような微分方程式に従う。

$$\frac{dc_{\text{吸}}^{(1)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} H_{IA}(t) \exp[i(E_I - E_A)t/\hbar] \quad (5.3.97)$$

$$\text{ただし,} \quad H_{IA}(t) = -\frac{e}{m_e} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega}} \langle I | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} | A \rangle \exp(-i\omega t) \quad (5.3.98)$$

この式は光子の入射によって励起状態の含有率が時間と共に変化することを表しているが、状態 I は光子の入射がなくとも自発放射を起こす。故に状態 I を見出す確率は上式の右辺がなくとも時間の経過と共に減衰する。状態 I の平均寿命を τ_I として、減衰率に相当する量を

$$\Gamma_I = \frac{\hbar}{\tau_I} \quad (5.3.99)$$

と定義する。これを用いて式 (5.3.97) に減衰を表す項を加える。

$$\frac{dc_{\text{吸}}^{(1)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} H_{IA}(t) \exp(-i\omega t) \exp[i(E_I - E_A)t/\hbar] - \frac{\Gamma_I}{2\hbar} c_{\text{吸}}^{(1)} \quad (5.3.100)$$

^{†43} 摂動論とは、ハミルトニアン of 相互作用項の結合定数、今の場合は電子の電荷 e についての展開である。上述の $\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{A}}$ 項には e^2 が係っているので、摂動論的に 2 次の効果である。

^{†44} 電気双極近似を施している。被積分関数については、 $\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ 項のうちの散乱前後の光子数を変化させない項の組、 $\langle A | \hat{H}_{\text{放射}} | I \rangle \langle I | \hat{H}_{\text{吸収}} | A \rangle$ または $\langle A | \hat{H}_{\text{吸収}} | I \rangle \langle I | \hat{H}_{\text{放射}} | A \rangle$ だけを取り出す。また、積分計算において積分下限 $t'' = 0$ での値から来る項は、 $t = 0$ で唐突に摂動を与え始めたことによる人為的な項なので、無視する。

これを $c_{\text{吸}}^{(1)}(0) = 0$ の初期条件の下で解くと、次の解を得る。

$$c_{\text{吸}}^{(1)}(t) = -\frac{e}{m_e} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega}} \frac{\langle I | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} | A \rangle}{E_I - E_A - \hbar\omega - i\Gamma_I/2} \left(\exp\left[-\frac{\Gamma_I t}{2\hbar}\right] - \exp\left[\frac{i(E_I - E_A - \hbar\omega)t}{\hbar}\right] \right) \quad (5.3.101)$$

これを用いて 2 次の遷移振幅を評価すると、次のようになる。

$$c_{\text{吸} \rightarrow \text{放}}^{(2)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_I \int_0^t dt' \langle A | \hat{H}_{\text{放}} | I \rangle \exp[i(E_A - E_I)t'/\hbar] c_{\text{吸}}^{(1)}(t') \quad (5.3.102)$$

$$= -\frac{1}{i\hbar} \left(\frac{e}{m_e}\right)^2 \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega} \sum_I \frac{\langle A | \mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{p}} | I \rangle \langle I | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} | A \rangle}{E_I - E_A - \hbar\omega - i\Gamma_I/2} t \quad (5.3.103)$$

ただし、 t は十分に大きいとして、式 (5.3.101) の第 1 項は無視した。このことを踏まえると、式 (5.3.96) は次のように修正されるべきである。

$$c^{(2)}(t) = -\frac{1}{i\hbar} \left(\frac{e}{m_e}\right)^2 \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega} \sum_I \left[\frac{\langle A | \mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{p}} | I \rangle \langle I | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} | A \rangle}{E_I - E_A - \hbar\omega - i\Gamma_I/2} + \frac{\langle A | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} | I \rangle \langle I | \mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{p}} | A \rangle}{E_I - E_A + \hbar\omega} \right] t \quad (5.3.104)$$

付録 5.B.11 でフェルミの黄金律を導出したときと同様の議論により、遷移頻度は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} w_{d\Omega} &= \int \frac{|c^{(1)} + c^{(2)}|^2}{t} \rho_{\omega, d\Omega} dE \quad (5.3.105) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{e^2}{m_e}\right)^2 \left(\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega}\right)^2 \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{\omega^2}{\hbar c^3} d\Omega \\ &\quad \cdot \left| \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \mathbf{e}_{k',\alpha'} - \frac{1}{m_e} \sum_I \left(\frac{\langle A | \mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{p}} | I \rangle \langle I | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} | A \rangle}{E_I - E_A - \hbar\omega - i\Gamma_I/2} + \frac{\langle A | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} | I \rangle \langle I | \mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{p}} | A \rangle}{E_I - E_A + \hbar\omega} \right) \right|^2 \quad (5.3.106) \end{aligned}$$

この遷移頻度を立体角要素 $d\Omega$ と入射光子の数密度のフラックスで割ったものが微分断面積である。今は規格化体積 V において入射光子 1 つを考えていたのでフラックスは c/V である。よって微分断面積は

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_R}{d\Omega} &= r_0^2 \left| \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \mathbf{e}_{k',\alpha'} - \frac{1}{m_e} \sum_I \left(\frac{\langle A | \mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{p}} | I \rangle \langle I | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} | A \rangle}{E_I - E_A - \hbar\omega - i\Gamma_I/2} + \frac{\langle A | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} | I \rangle \langle I | \mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{p}} | A \rangle}{E_I - E_A + \hbar\omega} \right) \right|^2 \quad (5.3.107) \end{aligned}$$

となる。これはクラマース-ハイゼンベルクの公式のレイリー散乱の場合の式である^{†45†46}。

波長が十分に長い光子 $\hbar\omega \ll E_I - E_A$ に対する散乱微分断面積の表式を求める。このとき、式 (5.3.107) の分母の $-i\Gamma_I/2$ は無視できる。 \hat{x}_i, \hat{p}_i の交換関係より

$$\mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \mathbf{e}_{k',\alpha'} = \sum_{j=1}^3 (\mathbf{e}_{k,\alpha})_j (\mathbf{e}_{k',\alpha'})_j \frac{\langle A | \hat{x}_j \hat{p}_j - \hat{p}_j \hat{x}_j | A \rangle}{i\hbar} \quad (5.3.108)$$

$$= \frac{1}{i\hbar} [\langle A | (\mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{x}}) (\mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{p}}) | A \rangle - \langle A | (\mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{p}}) (\mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{x}}) | A \rangle] \quad (5.3.109)$$

と変形でき、これを中間状態 I で展開することで、

$$\mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \mathbf{e}_{k',\alpha'} = \frac{1}{i\hbar} \sum_I [\langle A | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{x}} | I \rangle \langle I | \mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{p}} | A \rangle - \langle A | \mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{p}} | I \rangle \langle I | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{x}} | A \rangle] \quad (5.3.110)$$

$$= \frac{1}{m_e \hbar} \sum_I \frac{1}{\omega_{IA}} [\langle A | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} | I \rangle \langle I | \mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{p}} | A \rangle + \langle A | \mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{p}} | I \rangle \langle I | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} | A \rangle] \quad (5.3.111)$$

$$\text{ただし, } \omega_{IA} = \frac{E_I - E_A}{\hbar} \quad (5.3.112)$$

と書けること^{†47}を使うと、式 (5.3.107) は

$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega} = r_0^2 \left| \frac{1}{m_e \hbar} \sum_I \left(\frac{\omega \langle A | \mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{p}} | I \rangle \langle I | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} | A \rangle}{\omega_{IA}(\omega_{IA} - \omega)} - \frac{\omega \langle A | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} | I \rangle \langle I | \mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{p}} | A \rangle}{\omega_{IA}(\omega_{IA} + \omega)} \right) \right|^2 \quad (5.3.113)$$

とも書ける。 $\omega \ll \omega_{IA}$ の場合は、

$$\frac{1}{\omega_{IA} \mp \omega} \simeq \frac{1}{\omega_{IA}} \left(1 \pm \frac{\omega}{\omega_{IA}} \right) \quad (5.3.114)$$

と近似し、

$$\sum_I \frac{1}{\omega_{IA}^2} [\langle A | \mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{p}} | I \rangle \langle I | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} | A \rangle - \langle A | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} | I \rangle \langle I | \mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{p}} | A \rangle] \quad (5.3.115)$$

$$= m_e^2 \sum_I [\langle A | \mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{x}} | I \rangle \langle I | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{x}} | A \rangle - \langle A | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{x}} | I \rangle \langle I | \mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{x}} | A \rangle] \quad (5.3.116)$$

$$= m_e^2 \langle A | [\mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{x}}] | A \rangle = 0 \quad (5.3.117)$$

^{†45} 今は散乱前と散乱後の原子の状態が同じ A であると考えたが、散乱後には違う状態 B に落ち着く場合も考えられる。この場合、 A と B のエネルギー差の分だけ散乱される光子のエネルギー（振動数）も変化するので、原子による光子の非弾性散乱を考えていることになる。このような散乱はラマン散乱と呼ばれる。

^{†46} 具体的に計算する際に I についての和の計算を回避する方法については、例えば Sadeghpour & Dalgarno (1992) を参考にして欲しい。

^{†47} 2 段目への変形では式 (5.3.13) の関係を用いた。

という関係を使うことで、

$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega} \simeq \left(\frac{r_0}{m_e \hbar}\right)^2 \omega^4 \left| \sum_I \frac{1}{\omega_{IA}^3} [\langle A | \mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{p}} | I \rangle \langle I | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} | A \rangle + \langle A | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} | I \rangle \langle I | \mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{p}} | A \rangle] \right|^2 \quad (5.3.118)$$

と書ける。このことから、古典電磁気学の場合 (付録 2.A.7) と同じように、 ω が小さい場合は断面積が ω^4 に比例することが分かる。一方で ω が大きい場合は式 (5.3.107) の第 2, 3 項は第 1 項に比べて無視できるので、

$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega} \simeq r_0^2 |\mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \mathbf{e}_{k',\alpha'}|^2 \quad (5.3.119)$$

と書ける。これはトムソン散乱の微分断面積と同じ形式である。

特定の遷移幅に合致する波長帯の光子の散乱について、つまり特定の I について $\hbar\omega \simeq E_I - E_A$ となる場合、近くに別の I が存在しなければ、式 (5.3.107) は \sum_I 中のその中間状態についての項が支配的になるので、

$$\frac{d\sigma_{\text{res}}}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{m_e^2} \frac{|\langle A | \mathbf{e}_{k',\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{p}} | I \rangle|^2 |\langle I | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} | A \rangle|^2}{(E_I - E_A - \hbar\omega)^2 + \Gamma_I^2/4} \quad (5.3.120)$$

と書ける。この場合の散乱は共鳴散乱 (resonance scattering) と呼ばれる。 Γ_I の導入によって発散は免れたが、なお他の波長帯の散乱よりは大きい断面積を持つ。式 (5.3.101) より

$$|c_{\text{吸}}^{(1)}(t \rightarrow \infty)|^2 = \left(\frac{e}{m_e}\right)^2 \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega} \frac{|\langle I | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} | A \rangle|^2}{(E_I - E_A - \hbar\omega)^2 + \Gamma_I^2/4} \quad (5.3.121)$$

と書ける。これは状態 A の原子がこの波長帯の光子にあてられたときに、その光子を吸収する確率と解釈できる^{†48}。この $|c_{\text{吸}}^{(1)}(t \rightarrow \infty)|^2$ と、状態 I にある原子が単位時間あたりに特定の方向へ光子を自発放射して A に遷移する確率 $w_{IA\Omega}$ (式 (5.3.11) 参照) を用いると、共鳴散乱の微分断面積は次のように書ける。

$$\frac{d\sigma_{\text{res}}}{d\Omega} = \frac{|c_{\text{吸}}^{(1)}(t \rightarrow \infty)|^2 w_{IA\Omega}}{c/V} \quad (5.3.122)$$

上式の分母は入射光子の数密度フラックスと解釈できる。つまり共鳴散乱は、原子が入射光子を吸収して中間状態 I に遷移してから、自発放射をして始状態 A に戻る過程であると解釈できる。これは節 5.3.3 で光子破壊確率について考察したときの考え方と整合的である^{†49}。

^{†48} 上式を ω の関数として見ると、節 5.3.4 で説明したローレンツ輪郭と同型の関数であることが分かる。つまり、吸収係数の線輪郭は、ドップラー幅や衝突幅を考慮しなくても Γ_I によって決定される幅を持つ。これは自然幅と呼ばれる。多くの場合、自然幅はドップラー幅や衝突幅に比べて小さい。

^{†49} 節 5.3.3 では 7 パターンに分類した光子の増減効果のうちのパターン (b) 由来の項として共鳴散乱の散乱係数を定義した。

実際の不透明度の計算時には、レイリー散乱の断面積としては H と He の基底状態に対するもののみが考慮されるようだ。例えば Rogers & Iglesias (1992) ではどの遷移幅とも共鳴しない波長帯での断面積として、

$$\sigma_{\text{H}}(\lambda) = \min\{\sigma_T, \sigma_{\text{H},R}(\lambda)\} \quad (5.3.123)$$

$$\sigma_{\text{He}}(\lambda) = \min\{\sigma_T, \sigma_{\text{He},R}(\lambda)\} \quad (5.3.124)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし, } \sigma_{\text{H},R}(\lambda) = & 5.799 \times 10^{-17} \lambda^{-4} + 1.422 \times 10^{-12} \lambda^{-6} \\ & + 2.794 \times 10^{-8} \lambda^{-8} \text{ cm}^2 \end{aligned} \quad (5.3.125)$$

$$\sigma_{\text{He},R}(\lambda) = 5.484 \times 10^{-18} \lambda^{-4} + 1.338 \times 10^{-24} \lambda^{-6} \text{ cm}^2 \quad (5.3.126)$$

とフィッティングされた値が使われている。ただし、 σ_T はトムソン散乱 (コンプトン散乱) 断面積で、 λ は光子の波長を nm の単位で表した値である。図 5.12 の (B) にこれらの値を示した。

5.3.6 光電離と再結合

原子や分子が光子を吸収するのに伴って束縛電子が電離する現象を束縛-自由遷移または光電離と言う。束縛-束縛遷移の場合と違い、フェルミの黄金則で使う状態密度として電離後の自由電子の状態密度を考える。自由電子の運動量固有値と固有エネルギーをそれぞれ $\hbar\mathbf{K}$, $\hbar^2 K^2/2m$ と書くことにする。吸収する光子の角振動数 $\omega = ck$ と放出する電子の波数 K の間には次のエネルギー保存則が成り立つ。

$$\hbar\omega + E_a = \frac{\hbar^2 K^2}{2m_e} + E_b \quad (5.3.127)$$

ただし、始状態と終状態の原子 (イオン) のエネルギー準位をそれぞれ E_a, E_b とした。つまり、この過程では

$$\hbar\omega \geq \hbar\omega_0 = E_b - E_a \quad (5.3.128)$$

を満たす角振動数の光子しか吸収されない。この ω_0 を吸収端と言う。

自由粒子の固有状態 $\psi_{\mathbf{K}}(\mathbf{x})$ の規格化には様々な流儀があるが、ここでは粒子密度が 1 になるように規格化する (付録 5.B.12 参照)。

$$\int \psi_{\mathbf{K}'}^*(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{K}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}') \quad (5.3.129)$$

この規格化の下では散乱後の電子の状態密度は式 (5.B.335) のように書ける。

$$\rho(E) = \frac{m_e K}{(2\pi)^3 \hbar^2} d\Omega_K \quad (5.3.130)$$

よって、フェルミの黄金律より、状態 $|a\rangle$ にあった原子が運動量 $\hbar\mathbf{k}$ の光子を吸収して特定の運動量 $\hbar\mathbf{K}$ を持つ自由電子を放出し、状態 $|b\rangle$ に遷移する単位時間あたりの確率は次のように書

ける。

$$w_{abK} = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{e}{m_e} \right)^2 \frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega} |\langle b, \mathbf{K} | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} | a \rangle|^2 |\langle n_{k,\alpha} - 1 | \hat{a}_{k,\alpha} | n_{k,\alpha} \rangle|^2 \rho(E) \quad (5.3.131)$$

$$= \frac{e^2 m_e \omega n_{k,\alpha} K d\Omega_K}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar^2 V} |\langle b, \mathbf{K} | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{x}} | a \rangle|^2 \quad (5.3.132)$$

入射光子の数密度フラックス $n_{k,\alpha} c/V$ と $d\Omega_K$ で割ることで、微分断面積は次のようになる。

$$\frac{d\sigma_{PI}}{d\Omega_K} = \frac{m_e e^2 k K}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar^2} |\langle b, \mathbf{K} | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{x}} | a \rangle|^2 \quad (5.3.133)$$

入射光子の偏極状態で平均し、入射方向でも平均すると、節 5.3.1 と同様の考え方で

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} d\Omega_k \frac{1}{2} \sum_{\alpha} |\langle b, \mathbf{K} | \mathbf{e}_{k,\alpha} \cdot \hat{\mathbf{x}} | a \rangle|^2 = \frac{1}{3} |\langle b, \mathbf{K} | \hat{\mathbf{x}} | a \rangle|^2 \quad (5.3.134)$$

と計算できる。更に始状態と終状態がそれぞれ $m_a = 1, 2, \dots, g_a; m_b = 1, 2, \dots, g_b$ というように縮退している場合を考えて、 m_a についての平均を取り、 m_b について合計する。自由電子のスピン自由度 m_s でも和をとると、結局微分断面積は次のように書ける。

$$\frac{d\sigma_{PI}}{d\Omega_K} = \frac{m_e e^2 k K}{24\pi^2 \epsilon_0 \hbar^2 g_a} \sum_{m_a, m_b, m_s} |\langle b, m_b; \mathbf{K}, m_s | \hat{\mathbf{x}} | a, m_a \rangle|^2 \quad (5.3.135)$$

自由電子の放出方向 $d\Omega_K$ で積分した全断面積を計算するには、散乱後の自由電子の波動関数が次のように球面調和関数 $Y_l^m(\theta, \phi)$ で展開できることを利用する。球面調和関数については付録 1.C.4 を参照のこと。

$$\psi_K(\mathbf{x}) = 4\pi \sum_{l,m} i^l (Y_l^m(\theta_K, \phi_K))^* R_l(r) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (5.3.136)$$

(r, θ, ϕ) は座標 \mathbf{x} の極座標表示であり、 (θ_K, ϕ_K) はベクトル \mathbf{K} の方向を極座標で表したものである。動径関数 $R_l(r)$ は、ポテンシャルが無い状況での平面波の場合は球ベッセル関数という関数になるが、今の場合は残されたイオンとの間にクーロン相互作用が働くため、複雑な関数になる。この辺りの具体的な計算については例えば [Burke \(2011\)](#) を読んで欲しい。とにかく散乱後の束縛電子と自由電子全体の状態が

$$|b, m_b; \mathbf{K}, m_s\rangle = \frac{4\pi}{K} \sum_{l,m} i^l (Y_l^m(\theta_K, \phi_K))^* |b, m_b; K, l, m, m_s\rangle \quad (5.3.137)$$

と展開できたとすると、全断面積は次のように計算できる。

$$\sigma_{PI} = \int_{4\pi} \frac{d\sigma_{PI}}{d\Omega_K} d\Omega_K \quad (5.3.138)$$

$$= \frac{m_e e^2 k K}{24\pi^2 \epsilon_0 \hbar^2 g_a} \left(\frac{4\pi}{K}\right)^2 \sum_{m_a, m_b, m_s} \sum_{l, m} \sum_{l', m'} i^l (-i)^{l'} \langle b, m_b; K, l, m, m_s | \hat{\mathbf{x}} | a, m_a \rangle \cdot \langle b, m_b; K, l', m', m_s | \hat{\mathbf{x}} | a, m_a \rangle^* \int_{4\pi} Y_l^m(\theta_K, \phi_K) (Y_{l'}^{m'}(\theta_K, \phi_K))^* d\Omega_K \quad (5.3.139)$$

$$= \frac{2m_e e^2 k}{3\epsilon_0 \hbar^2 g_a K} \sum_{m_a} \sum_{m_b} \sum_{l, m, m_s} |\langle b, m_b; K, l, m, m_s | \hat{\mathbf{x}} | a, m_a \rangle|^2 \quad (5.3.140)$$

逆の過程、つまり状態 $|b\rangle$ にある原子 (イオン) に自由電子が衝突し、電子は束縛されて原子の状態が $|a\rangle$ に遷移すると共に光子を放射する過程は再結合 (recombination) と呼ばれる。再結合の断面積を求めるときの、光電離の場合と異なる操作を挙げると次のようになる。

- 光電離の場合はフェルミの黄金で使う状態密度に散乱後の自由電子のもの (5.3.130) を用いたが、再結合の場合は放射する光子のもの (5.3.9) を用いる。
- 光電離の場合は入射光子の数密度フラックス $n_{k,\alpha} c/V$ で割ったが、再結合の場合は入射電子の数密度フラックス $\hbar K/m_e$ で割る。
- 光電離の場合は始状態の縮退度 g_a で割ることで平均を取っていたが、再結合の場合は始状態は $|b, m_b\rangle$ に変わるので、 g_b で割ることになる。
- 光電離の場合は消滅演算子の性質より $n_{k,\alpha}$ が分子に現れたが、再結合の場合は生成演算子の性質より、代わりに $(n_{k,\alpha} + 1)$ が現れる。

以上の変更点を取り込むと、再結合の全断面積 σ_{RC} は次のように表されることが分かる。

$$\sigma_{RC} = \frac{k^2 g_a}{K^2 g_b} \sigma_{PI} (n + 1) \quad (5.3.141)$$

n は単位モード (\mathbf{k}, α) あたりの光子数の平均である。誘導放射と自発放射のように、再結合の場合も放射強度 $(\propto n)$ に比例する項と $n_{k,\alpha} = 0$ の場合でも起きうる項が出てくる。

放射強度 I_ν が等方的であり源泉関数 S_ν に等しい場合は、光電離によって単位時間あたりに吸収される $\nu \sim \nu + d\nu$ の振動数帯の光子数と、再結合によって $\nu \sim \nu + d\nu$ の速度帯の電子を束縛して放射される同じ振動数帯の光子数は等しいことになる。ただし、 ν と v は次のエネルギー保存則で結ばれる。

$$h\nu = E_b - E_a + \frac{1}{2} m_e v^2 \quad (5.3.142)$$

つまり、

$$hd\nu = m_e v dv \quad (5.3.143)$$

という関係がある。また、放射強度が $I_\nu = S_\nu$ のときの光子の数密度フラックスを全方向 4π について足し上げると

$$\frac{I_\nu d\nu d\Omega}{h\nu} \cdot \frac{4\pi}{d\Omega} = \frac{4\pi}{h\nu} S_\nu d\nu \quad (5.3.144)$$

と書ける。電子は熱平衡にあつてマクスウェル-ボルツマン分布に従う (節 6.1.1 参照) とすると、 $v \sim v + dv$ の間の速度を持つ電子数密度は

$$f(v)dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m_e}{k_B T} \right)^{3/2} n_e v^2 \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2k_B T}\right) dv \quad (5.3.145)$$

と表される。 n_e は全電子数密度である。 n と放射強度の関係は式 (5.3.22) より

$$n = \frac{c^2 S_\nu}{2h\nu^3} \quad (5.3.146)$$

である。単位時間・単位体積あたりの光電離数と再結合数の間のバランス関係は次のように書ける。

$$n_a \cdot \frac{4\pi}{h\nu} S_\nu d\nu \cdot \sigma_{PI} = n_b \cdot f(v)dv \cdot v \cdot \sigma_{RC} \quad (5.3.147)$$

この式を S_ν について解いて、上述した諸関係を用いて整理すると、次のようになる。

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{F - 1} \quad (5.3.148)$$

$$\text{ただし, } F = \frac{n_a}{n_e n_b} \frac{2g_b}{g_a} \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{m_e v^2}{2k_B T}\right) \quad (5.3.149)$$

このことから、状態 a にある原子と b にある原子の数密度比がサハの式 (付録 3.B.5 参照)

$$\frac{n_e n_b}{n_a} = \frac{2g_b}{g_a} \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_b - E_a}{k_B T}\right) \quad (5.3.150)$$

に従う場合は、 S_ν はプランク関数になることが分かる。

電子が主量子数 n と方位量子数 l で表される軌道にある水素様原子が光電離するときの断面積は次のように計算される。

$$\sigma_{PI}(\nu) = \frac{64}{3\sqrt{3}} \alpha \pi a_0^2 \frac{ng_{II}}{Z^2} \left(\frac{\nu_0}{\nu} \right)^3 \quad (5.3.151)$$

$$\text{ただし, } \nu_0 = \frac{Z^2 \alpha^2 m_e c^2}{n^2 2h} \quad (5.3.152)$$

$\alpha \simeq 1/137$ は微細構造定数、 $a_0 = 5.29 \times 10^{-11}$ m はボーア半径、 Z は電離後のイオンの電荷量 (水素原子の電離の場合は $Z = 1$) である。 ν_0 は吸収端の振動数である。 g_{II} は束縛-自由ゴート因子であり、 n, l, ν に依存する。ゴート因子は、特に l での平均を取った場合にはおおむね 1 に近い値を取る。

例えば Opacity Project (Seaton et al., 1994) のサイト^{†50}で光電離の断面積を調べる場合、入射光子のエネルギーに対する値が表で得られるが、このときのエネルギーの単位は Ry (リュードベリ、 $1 \text{ Ry} = \alpha^2 m_e c^2 / 2$)、断面積の単位には Mb (メガバーン、 $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$) が用いられている。

5.3.7 制動放射

自由-自由吸収 (制動放射の逆過程) は量子力学では次のように 3 粒子に関わる衝突過程として考えられる。



特に衝突前の原子 (イオン) X と散乱後の原子 X' が同じ準位にあり、光子のエネルギーは全て自由電子が持っていくような過程の頻度が多い。そのような過程の断面積は光電離の場合とほぼ同様に考えることができる。ただし、今回は散乱前の状態も原子と自由電子を併せた状態として表される。散乱後の自由電子の状態密度を用いてフェルミの黄金律を用い、入射光子のフラックスで割る。求まる断面積は自由電子の数密度に比例するべきであるが、自由電子の状態を前節と同様に規格化していれば、電子密度が 1 の場合の断面積 σ_{abs} が求まることになる。

逆過程の制動放射についての断面積を求めるときの変更点は次の通りである。ただし、入射電子の運動量を $\hbar \mathbf{K}_2$ 、光子と共に放出される電子の運動量を $\hbar \mathbf{K}_1$ と書くことにする。

- 自由-自由吸収の場合は光子のフラックス $n_{k,\alpha} c / V$ で割るが、制動放射の場合は入射電子のフラックス $\hbar \mathbf{K}_2 / m_e$ で割る。
- 自由-自由吸収の場合はフェルミの黄金律に用いる終状態の状態密度として運動量 $\hbar \mathbf{K}_2$ を持つ自由電子のもの $\rho = m_e K_2 d\Omega_{K_2} / (8\pi^3 \hbar^2)$ を用いるが、制動放射の場合は運動量 $\hbar \mathbf{K}_1$ を持つ自由電子のもの $\rho = m_e K_1 d\Omega_{K_1} / (8\pi^3 \hbar^2)$ と $\omega \sim \omega + d\omega$ の間の角振動数を持つ光子の状態数 $V k^2 d\omega / (\pi c)$ ^{†51} の積を用いる。
- 自由-自由吸収の場合は消滅演算子の性質より $n_{k,\alpha}$ が分母に現れるが、制動放射の場合は生成演算子の性質より、代わりに $(n_{k,\alpha} + 1)$ が現れる。

これらの変更点を考慮すると、自由-自由吸収の断面積 $n_e \sigma_{\text{abs}}$ と制動放射の断面積 σ_{brem} の間には次の関係があることが分かる。

$$\sigma_{\text{brem}} = \frac{m_e k^2 K_1}{\pi^2 \hbar K_2^2} \sigma_{\text{abs}} (n + 1) d\omega \quad (5.3.154)$$

この σ_{brem} は $\omega \sim \omega + d\omega$ の間の角振動数を持つ光子を放射する過程についての断面積である。

^{†50} <http://cdsweb.u-strasbg.fr/topbase/xsections.html>

^{†51} 全放射方向 4π の分を考え、偏極の自由度 2 も考慮している。

ω で微分した断面積は次のように表される。

$$\frac{d\sigma_{\text{brem}}}{d\omega} = \frac{m_e k^2 K_1}{\pi^2 \hbar K_2^2} \sigma_{\text{abs}}(n+1) \quad (5.3.155)$$

速さ $v_1 \sim v_1 + dv_1$ を持つ電子が原子 (イオン) に衝突して振動数 $\nu \sim \nu + d\nu$ の光子を吸収し、速さ $v_2 \sim v_2 + dv_2$ の電子を放出する自由-自由吸収過程が単位時間あたりに起こる数と、その逆の制動放射が単位時間あたりに起こる数が等しくなるという式は次のようになる。ただし、放射強度は源泉関数に等しく、電子の速度分布はマクスウェル-ボルツマン分布に従うとする。

$$\frac{4\pi}{h\nu} S_\nu d\nu \cdot f(v_1) dv_1 \cdot \sigma_{\text{abs}} = f(v_2) dv_2 \cdot v_2 \cdot \frac{d\sigma_{\text{brem}}}{d\omega} 2\pi d\nu \quad (5.3.156)$$

各文字の意味は前節と同じである。 v_1 と v_2 の間には次のエネルギー保存則が成り立つ。

$$\frac{1}{2} m_e v_1^2 + h\nu = \frac{1}{2} m_e v_2^2 \quad (5.3.157)$$

つまり、

$$v_1 dv_1 = v_2 dv_2 \quad (5.3.158)$$

である。以上の関係と前節で述べた関係を用いて式 (5.3.156) を実際に S_ν について解くと、プランク関数になることが分かる。

H^+ や He^{2+} のような電子を持たないイオンとの衝突による自由-自由吸収の断面積は次のように表される。

$$\sigma_{\text{abs}}(v_1, \nu) = \frac{\alpha \sigma_T}{4\sqrt{3}\pi} \frac{c^4 Z^2 g_{III}}{v_1 \nu^3} \quad (5.3.159)$$

α は微細構造定数、 σ_T はトムソン散乱断面積、 Z はイオンの電荷量、 v_1 は入射電子の速さである。 g_{III} は自由-自由ゴント因子であり、電波域の吸収の場合を除くとおおむね 1 に近い値を取る。上記の断面積は速さ v_1 を持つ電子の数密度が 1 の場合の断面積であることに注意が必要である。入射電子の速さはマクスウェル-ボルツマン分布に従うとして上式の v_1 に対する平均を取ることで、特定のイオンに関する自由-自由吸収の吸収係数が求まる^{†52}。

$$\alpha_{\nu, \text{f-f}}(\nu) = n_i \int_0^\infty \sigma_{\text{abs}}(v_1, \nu) f(v_1) dv_1 \quad (5.3.160)$$

$$= \frac{\alpha \sigma_T c^4 \sqrt{m_e} g_{III} Z^2 n_e n_i}{2\sqrt{6} \pi^{3/2} \nu^3 \sqrt{k_B T}} \quad (5.3.161)$$

†52 積分公式

$$\int_0^\infty x \exp(-ax^2) dx = \frac{1}{2a}$$

を用いる。

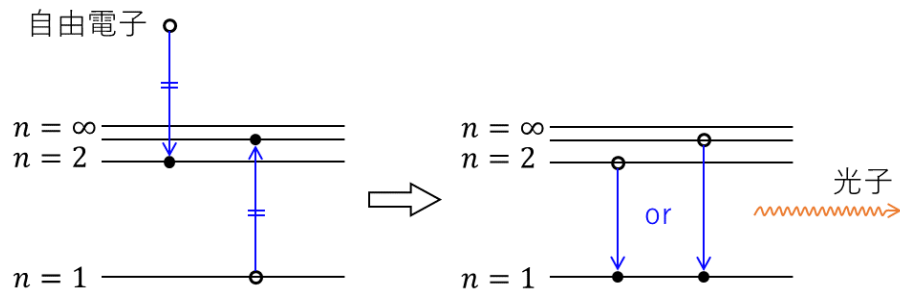


図 5.13 二電子性再結合の模式図

5.3.8 不透明度の計算

前節までで説明したような過程の効果、プラズマに含まれる様々な粒子種の様々な準位について合計することで吸収係数 α_ν (不透明度 $\kappa_\nu = \alpha_\nu/\rho$) が計算される。例えば束縛-束縛遷移、光電離、自由-自由吸収、トムソン散乱、レイリー散乱を考慮した不透明度は次のように計算される。

$$\rho\kappa_\nu(\nu) = \left[\sum_{i,j,k} n_{ij} \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f_{jk} \phi_{jk}(\nu) + \sum_{i,j} n_{ij} \sigma_{ij}^{PI}(\nu) + \sum_{i,j} n_{ij} n_e \bar{\sigma}_{ij}(\nu) \right] \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) \right] + n_e \sigma_T + \sum_{i,j} n_{ij} \sigma_{ij}^R(\nu) \quad (5.3.162)$$

i はそれぞれの粒子種のそれぞれの電離状態を表すラベルであり、 j, k はその粒子種の準位 (励起状態) を表すラベルである。 f_{jk} は振動子強度、 $\bar{\sigma}_{ij}(\nu)$ はマクスウェル-ボルツマン分布で v_1 について平均した自由-自由吸収断面積である。因子 $(1 - \exp(-h\nu/k_B T))$ は真の吸収の効果から誘導放射の効果を引き、遷移前と遷移後の状態にある粒子の数密度比は式 (5.3.43) のようにボルツマン因子で表されると仮定することで出てくる。

実際のプラズマでは前節までで説明した過程以外の過程も起きている。説明した過程も含めて主な過程の名称と衝突前の粒子種、衝突後の粒子種の間係を表 5.1 にまとめた。二電子性再結合と自動イオン化は関係するイオンが他の電子を持つ場合に起こり得る過程である。図 5.13 に二電子性再結合の模式図を示した。電子が高い順位に束縛されるときに発生するエネルギーを用いて他の電子が励起し、その後どちらかの電子が脱励起する際に光子が放射される過程であり、特定のエネルギーの電子に対して発生確率が高くなる。自動イオン化はその逆過程、つまり、光子を吸収して励起した電子が脱励起する際に、他の高い順位にある束縛電子を電離させる過程である。

不透明度や各遷移率、電離の断面積などの計算結果をまとめて公開しているプロジェクトと

表 5.1 プラズマ中の原子過程

日本語名 / 英語名	衝突前	衝突後
吸収 / absorption	光子 + 原子	励起した原子
誘導放射 / stimulated emission	光子 + 励起した原子	光子 × 2 + 原子
自発放射 / spontaneous emission	励起した原子	光子 + 原子
光電離 / photoionization	光子 + 原子	電子 + イオン
再結合 / recombination	電子 + イオン	光子 + 原子
二電子性再結合 / dielectronic recomb.	電子 + イオン	光子 + 励起した原子
自動イオン化 / autoionization	光子 + 励起した原子	電子 + イオン
トムソン散乱 / Thomson scattering	光子 + 電子	光子 + 電子
レイリー散乱 / Rayleigh scattering	光子 + 原子	光子 + 原子
自由-自由吸収 / free-free absorption	光子 + 電子 + イオン	電子 + イオン
制動放射 / bremsstrahlung	電子 + イオン	光子 + 電子 + イオン
衝突による励起 / collisional excitation	電子 + 原子	電子 + 励起した原子
衝突による脱励起 / col. de-excitation	電子 + 励起した原子	電子 + 原子
衝突による電離 / collisional ionization	電子 + 原子	電子 × 2 + 原子
3体再結合 / 3-body recombination	電子 × 2 + 原子	電子 + 原子

しては、例えば CHIANTI (Dere et al., 2019)^{†53}、Opacity Project (Seaton et al., 1994)^{†54}、OPAL (Iglesias & Rogers, 1996)^{†55}がある。恒星モデルにおける不透明度の計算にまつわる問題についてのレビューとして、Pain et al. (2017) も参考にして欲しい。

5.4 流体への応用

数値計算によって MHD 方程式を解く場合よりも、放射輸送方程式を解く方が計算資源をより必要とする。例えば大西直文 (2012) では、典型的な放射流体シミュレーションにおいて、9割以上の計算時間が放射輸送計算に費やされると述べられている。そこで、流体現象を対象とする計算において、放射輸送方程式を逐一解かなくても良い近似で放射現象を取り入れられるようにするための処方箋が考えられている。本節では太陽の計算で用いられる手法を2つ紹介する。

1つめは拡散近似と呼ばれる手法である。これは太陽内部などの光学的に厚い領域で有効な方法である。この場合、放射はほとんど黒体放射になるが、黒体放射からの1次のずれを考えると、流体と放射場との運動量やエネルギー交換が流体温度の関数として表される。

2つめは放射損失関数というものをを用いる方法である。これは太陽コロナのように光学的に薄い領域で有効である。光学的に薄い場合、放射場による運動量輸送の効果は無視できるように

^{†53} <https://www.chiantidatabase.org/chianti.html>

^{†54} <http://cdsweb.u-strasbg.fr/topbase/home.html>

^{†55} <https://opalopacity.llnl.gov/opal.html>

なるが、放射によるエネルギー損失は依然、流体のダイナミクスに影響する。温度が高くて薄いプラズマを想定して適当な仮定を課すと、このエネルギー損失は流体温度のみの関数として表される。

太陽大気における放射輸送の計算方法についてのレビューには [Leenaarts \(2020\)](#) がある。

5.4.1 拡散近似

太陽の内部などの光学的に厚い領域、すなわち L を系の典型的な空間スケールとして $(\alpha_\nu + \sigma_\nu)L \gg 1$ の領域で有用な放射輸送方程式の取り扱い方を説明する。定常の放射輸送方程式を変形すると、

$$I_\nu = S_\nu - \frac{1}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} \mathbf{n} \cdot \nabla I_\nu \quad (5.4.1)$$

と書ける。右辺第 2 項のオーダーは光子の平均自由行程での放射強度の変化のスケールであるが、考える系が光学的に厚い場合は非常に小さい値になる。よって第 0 近似として $I_\nu = S_\nu = B_\nu$ が成り立つ。ここまでは既述の事項である。 $\mathcal{O}[1/(\alpha_\nu + \sigma_\nu)L]$ までの近似を考えると、上式の右辺に $I_\nu = S_\nu = B_\nu$ を代入して、

$$I_\nu = B_\nu - \frac{1}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} \mathbf{n} \cdot \nabla B_\nu + \mathcal{O}\left[\frac{1}{(\alpha_\nu + \sigma_\nu)^2 L^2}\right] \quad (5.4.2)$$

となる。従って各モーメントは、

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu \quad (5.4.3)$$

$$\mathbf{F}_\nu = -\frac{4\pi}{3(\alpha_\nu + \sigma_\nu)} \nabla B_\nu \quad (5.4.4)$$

$$\mathbf{P}_\nu = \frac{4\pi}{3c} B_\nu \mathbf{l} = \frac{1}{3} u_\nu \mathbf{l} \quad (5.4.5)$$

と計算できる。更に、振動数で積分したモーメントは

$$u = \frac{4\pi}{c} B = \frac{4\sigma T^4}{c} \quad (5.4.6)$$

$$\mathbf{F} = -\frac{4\pi}{3} \int \frac{\nabla B_\nu}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} d\nu \quad (5.4.7)$$

$$= -\frac{4\pi}{3} \int \frac{1}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu \nabla T \quad (5.4.8)$$

$$= -\frac{4\pi}{3\alpha_R} \nabla B \quad (5.4.9)$$

$$= -\frac{16\sigma T^3}{3\alpha_R} \nabla T \quad (5.4.10)$$

$$\mathbf{P} = \frac{4\sigma T^4}{3c} \mathbf{l} \quad (5.4.11)$$

となる。ここで、

$$\frac{1}{\alpha_R} = \frac{\int \frac{1}{\alpha_\nu + \sigma_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int \frac{dB_\nu}{dT} d\nu} \quad (5.4.12)$$

と定義される α_R はロスランド平均吸収係数と呼ばれる。或いは $\kappa_R = \alpha_R/\rho$ はロスランド平均不透明度 (Rosseland mean opacity) と呼ばれる。以上のように放射強度と各モーメントを近似する操作はロスランド近似、または拡散近似と呼ばれる。一般には、ある点 \boldsymbol{x} の放射場は、前節で考えたように各点での流体の性質 $j_\nu, \alpha_\nu, \sigma_\nu$ や放射場自身 J_ν の和として決定されるが、拡散近似を施すと、その点 \boldsymbol{x} のみでの流体の性質 T, α_R によって決定される。また、式 (5.4.2) を見ると、拡散近似の下では放射強度は ∇B_ν の分だけ非等方であるが、エディントン近似の関係 $P_\nu = u_\nu/3$ は成り立っていることが分かる。

以上の計算より、放射による加熱率 Q_{rad} と等方的な放射圧 P_{rad} は、

$$Q_{\text{rad}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{F} - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.4.13)$$

$$= \frac{16\sigma}{3} \nabla \left(\frac{T^3}{\alpha_R} \nabla T \right) - \frac{16\sigma T^3}{c} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.4.14)$$

$$P_{\text{rad}} = \frac{4\sigma}{3c} T^4 \quad (5.4.15)$$

と書けるので、ロスランド平均不透明度が求まっていれば放射輸送方程式を逐次解かなくても流体の時間発展を追えることになる。

5.4.2 放射損失関数

太陽コロナは、電波を除くどの波長域に対しても光学的に薄いプラズマである。よって、光球や彩層など、下層から来る光の吸収は起きていないと考えることで、問題を幾分か簡単にすることができる。コロナでは、主に炭素、ケイ素、酸素、鉄などのイオンが束縛-束縛遷移に伴って極端紫外線 (紫外線と X 線の間領域) を発することによるエネルギー損失が起きている。この冷却過程を簡単に扱う手法として、放射損失関数 (radiative loss function) が用いられる。

エネルギー準位 i にある元素 X、価数 z のイオンに注目する。光学的に薄い系を考えているので、このイオンの脱励起に伴って自発放射された光子は、その後再び吸収されることなく系の外に出ていくと考えられる。つまり、自発放射が起きれば直に系のエネルギー損失につながる。このイオンの脱励起によって単位時間・単位体積あたりに損失するエネルギーは、自発放射についてのアインシュタイン係数を A_{ij} 、準位 i にあるイオンの数密度を $n_{z,i}$ とし、次のように

書ける。

$$Q_{X,z,i} = h\nu_{ij} \cdot n_{z,i} A_{ij} \quad (5.4.16)$$

$$= h\nu_{ij} A_{ij} \frac{n_{z,i}}{n_e n_z} \frac{n_z}{n_X} \frac{n_X}{n_H} n_e n_H \quad (5.4.17)$$

n_e, n_H, n_X, n_z はそれぞれ、電子の数密度、水素の数密度、元素 X の数密度、元素 X の z 価のイオン全体の数密度を表す。存在比 n_X/n_H はコロナにおける値として、一定の値が用いられることが多い。

仮に全ての遷移過程が十分に起きていて、系が局所熱平衡 (LTE) にあるならば、上式における電離率 n_z/n_X と z 価イオンの励起率 $n_{z,i}/n_z$ はボルツマン因子を用いて表せる。しかし、光学的に薄いコロナは、自発放射は起きれど誘導放射や吸収が殆ど起きない状況にある。このような状況では、次の統計平衡方程式を具体的に解く必要がある。

$$\frac{Dn_{z,i}}{Dt} = \sum_{(z',j)} n_{z',j} P_{(z',j) \rightarrow (z,i)} - \sum_{(z',j)} n_{z,i} P_{(z,i) \rightarrow (z',j)} \quad (5.4.18)$$

上式の (z',j) とは、例えば z 価イオンの他のエネルギー準位や $(z-1)$ 価イオンなど、準位 i にある z 価イオンと脱励起や電離、再結合反応によって結ばれる他の状態を表すラベルである。つまり、右辺の第 1 項は他の状態の粒子が励起、電離、再結合して状態 (z,i) のイオンに遷移する単位時間・単位体積あたりの数を表しており、第 2 項は逆の反応が起きて状態 (z,i) のイオンが減る数を表す。注目している流体现象の時間スケールが、励起や電離の起きる時間スケールより十分に長い場合は、上式の左辺をゼロとして考える。この条件は統計平衡と呼ばれる。各遷移が単位時間あたりに起きる確率 $P_{(z',j) \rightarrow (z,i)}, P_{(z,i) \rightarrow (z',j)}$ には、放射に伴う遷移や電子との衝突に伴う遷移のように、関係する反応による寄与が合計されている。他の準位や価数のイオンについても上式のような方程式を立て、統計平衡の仮定の下で連立して解くことにより、 n_z/n_X や $n_{z,i}/n_z$ が温度 T と n_e の関数として決定される。

結局、式 (5.4.17) は、 T, n_e の関数 $G_{X,z,i}(T, n_e)$ を用いて、次のように書ける。

$$Q_{X,z,i} = G_{X,z,i}(T, n_e) n_e n_H \quad (5.4.19)$$

これを様々な粒子種 (元素やイオンの価数, 準位) について合計すると、コロナにおいて単位時間・単位体積あたりに放射で失われるエネルギーは次のように書ける。

$$Q = n_e n_H L(T, n_e) \quad (5.4.20)$$

この $L(T, n_e)$ を放射損失関数と言う。 $L(T, n_e)$ は n_e に弱くしか依存しないことが知られている^{†56}。 n_e が $10^{14} - 10^{20} \text{ m}^{-3}$ の範囲内の場合、 $L(T, n_e)$ は n_e が変化しても最大で 20 % 程度しか変化しないようである (Leenaarts, 2020)。それよりも、各元素の存在比 n_X/n_H をどう設

^{†56} この理由については節 5.4.3 も参照して欲しい。

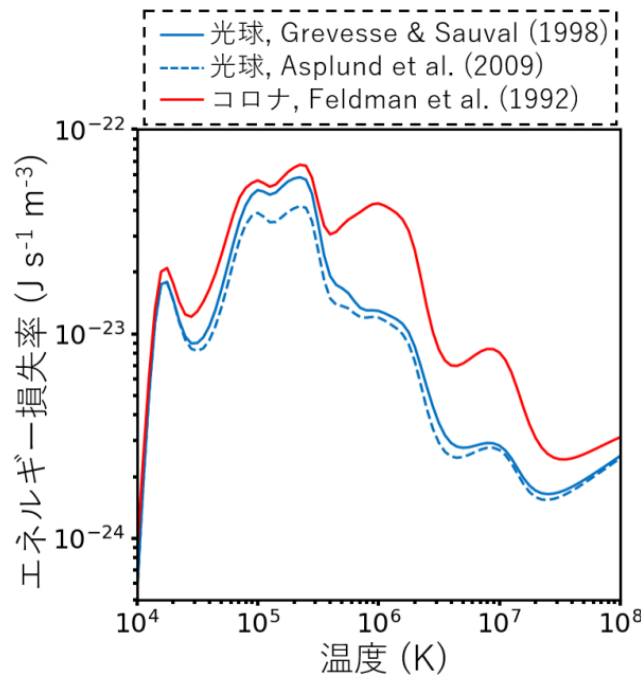


図 5.14 光学的に薄い系の放射損失関数：青色の実線は Grevesse & Sauval (1998) によってまとめられた光球での存在比、青色の破線は Asplund et al. (2009) によってまとめられた光球での存在比、赤色は Feldman et al. (1992) によってまとめられたコロナでの存在比を仮定して計算した値。電子密度は 10^{15} m^{-3} とした。CHIANTI (Dere et al., 2009) を用いて計算した。

定するかによって、値が大きく変化する。CHIANTI の原子過程データを用い、コロナの存在比と光球の存在比を想定して計算された放射損失関数を図 5.14 に示した。

この放射損失関数の手法を彩層に応用した研究もある (e.g. Goodman & Judge, 2012; Carlsson & Leenaarts, 2012)。Carlsson & Leenaarts (2012) は彩層での放射による単位体積・単位時間あたりのエネルギー損失を次の形で表している。

$$Q = \sum_{X,z} n_e n_H G_{X,z}(T) \cdot E_{X,z}(\tau) \tag{5.4.21}$$

$G_{X,z}(T)$ は元素 X の z 価のイオンについての放射損失関数である。 $E_{X,z}(\tau)$ はこの粒子種によって放射された光子が再度吸収されることなく系の外に出ていく確率 (脱出確率) であり、光学的深さ τ に依存する。コロナを考える場合はこの $E_{X,z}$ は 1 であると考えられるが、彩層のように光学的に深い場所を調べる際は 1 より小さくなることが期待される。彼らは計算された放射損失関数と実際に放射輸送方程式を解いた 1 次元シミュレーション結果を比較することで、脱出確率を求めている。そのようにして上式が求めれば、更に計算資源が必要な計算 (例えば 3 次元シミュレーション) において放射輸送方程式を解かずに放射損失を取り入れることができ、計算の実行が可能になる。

5.4.3 [トピック] コロナ輝線で見えるもの

Del Zanna & Mason (2018)

5.5 偏光

付録 2.A.3 では、古典的な電磁波の電場 (ベクトルポテンシャル) の振動方向によって、光は偏光と呼ばれる自由度を持つことを述べた。また、この自由度は光子を考える場合にはスピン角運動量という形で引き継がれることを付録 5.B.10 で述べている。前節までは議論を簡単にするために、放射場は「無偏光」であることを前提にしていた。無偏光とは、各々の光子の偏光状態がランダムであるために、光線全体としては統計的に特定の偏光状態に偏っていないということである。実際に太陽などで観測される光は様々な偏光状態にあることが期待されるが、流体現象に興味がある場合は、計算資源を節約するため、或いは物理の本質を掴むために無偏光の状態を仮定して議論がされることがある。一方で、偏光状態を知ることによって、観測しているプラズマ内の磁場の様子などを知ることができる。そのために各波長での偏光状態を観測することを偏光分光観測 (spectropolarimetry) と言うが、観測された偏光状態の情報から磁場を推定するためには、偏光を考慮に入れた放射輸送を解く必要がある。

付録 2.A.3 および 5.B.10 で説明しているように、例えば z 方向に伝搬する光子 1 個を考えたとき、右円偏光の状態 $|+\rangle$ と左円偏光の状態 $|-\rangle$ は x 方向と y 方向の直線偏光 $|x\rangle, |y\rangle$ の $\pi/2$ だけ位相をずらした重ね合わせで

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle) \quad (5.5.1)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle) \quad (5.5.2)$$

と表される。 $1/\sqrt{2}$ は状態を規格化 $\langle +|+ \rangle = 1$ するための係数である。一方で、偏光板を用いて x 方向に直線偏光した光線と y 方向に直線偏光した光線 (光線の向きは z 方向) を独立に^{†57}用意できたとして、この 2 つの光線を同じ放射強度で重ね合わせた場合、それぞれの 2 倍の放射強度を持った光線が出来上がるが、この光線は互いに直交する偏光状態が統計的に打ち消し合った結果、無偏光の状態になっている。このように、光子 1 個の偏光状態と光線全体の偏光状態は区別すべき概念であり、「重ね合わせ」という概念も 2 つ必要になる。すなわち、量子力学の原理としての重ね合わせと、光線同士の統計的な意味での重ね合わせである。

本節ではまず、上述の概念を整理するために純粋状態と混合状態の説明をし、光線の状態を的確に記述することができる密度行列を導入する。また、光線の偏光状態を記述するのに用いら

^{†57} ここで言う独立とは、片方の光線に対するもう一方の光線の相対的な位相差が時間的にランダムに変化すること。

れることの多いストークスパラメータについても説明する。その後、放射場を偏光させ得る効果の代表例として、磁場の存在によって起きるゼーマン効果と異方的な放射場によって起きる原子の偏極による効果について説明する。最後に、偏光状態を考慮した放射輸送方程式について概観する。

5.5.1 偏光状態の記述方法

密度行列

z 方向に伝搬する光線を考える。偏光板という装置に光を通すと、ある特定の向きに直線偏光した光子のみが通り抜けることができる。従って、偏光板を通り抜けた後の光線は、含まれる全ての光子が同じ向きに直線偏光している。このように、含まれる全ての光子が同じ偏光状態にあるような光線は完全偏光していると言う。光線を偏光板に通し、偏光板を回転させて、偏光軸の向きを x 方向や y 方向など、様々な向きに変え、透過する光線の強度を調べる実験を行う。無偏光の光線を準備してこの実験を行った場合、偏光板をどの向きにしても透過した光線の強度は元の光線の強度の半分になる。一方で、既に偏光板に通して x 方向に完全偏光している光線に対してこの実験を行った場合、偏光板の偏光軸を x 方向にすると透過光は元の光線と同じ強度になり、偏光軸を y 方向にすると偏光板は光線を完全に遮断する。このように、完全偏光している光線に対しては、その光線が 100% 透過するようなフィルターを (理想的には) 作ることができる^{†58}が、無偏光の光線のように、完全偏光していない状態の光線に対してはそのようなフィルターを作ることができない。どんなフィルターに対しても、そのフィルターが通す偏光状態に直交する状態の光子を含んでいるからである。

引き続き光線の向きは z 方向とする。 x 方向に完全偏光した光線全体の状態を $|x\rangle$ と書くことにする。つまり、系の全ての光子が x 方向に偏光している状態である。このようにケット $|\rangle$ を用いて書かれる状態を純粋状態と言う。完全偏光した光線は純粋状態にある。光線が完全に右 (左) 円偏光している状態、つまり含まれる光子が全て右 (左) 円偏光している状態を $|+\rangle$ ($|-\rangle$) と書くことにすると、 $|x\rangle$ との間には

$$|x\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) \quad (5.5.3)$$

という関係がある。同様に、 y 方向に完全偏光した光線全体の状態 $|y\rangle$ との間には

$$|y\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \quad (5.5.4)$$

^{†58} 例えば $1/4$ 波長板という装置と偏光板を組み合わせることで、右 (左) 円偏光の光子のみを透過するフィルターを作ることできる。 $1/4$ 波長板は直線偏光の光子を円偏光に、円偏光の光子を直線偏光に、相互に変換することができる装置である。

という関係がある。このように、純粋状態の相対的な位相が規定された上での重ね合わせをコヒーレントな重ね合わせと言う。 $|+\rangle, |-\rangle$ は

$$\langle +|+\rangle = 1, \quad \langle -|-\rangle = 1, \quad \langle +|-\rangle = 0 \quad (5.5.5)$$

という正規直交関係を満たし、 $|x\rangle, |y\rangle$ も

$$\langle x|x\rangle = 1, \quad \langle y|y\rangle = 1, \quad \langle x|y\rangle = 0 \quad (5.5.6)$$

という正規直交関係を満たす。光線の偏光状態の状態空間 (2 次元) は $|+\rangle$ と $|-\rangle$ を基底にして表現できると同時に、 $|x\rangle$ と $|y\rangle$ を基底に選ぶこともできる。 $|+\rangle$ と $|-\rangle$ を基底に選ぶと、各状態は次のように縦数ベクトルを用いて表すこともできる。

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.5.7)$$

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \quad (5.5.8)$$

完全偏光していない状態は純粋状態に対して混合状態と呼ばれる。混合状態の記述には密度行列 $\hat{\rho}$ と呼ばれるエルミート演算子が用いられる。例えば無偏光の光線は、 x 方向に完全偏光した強度 I の光線 $|x\rangle$ と y 方向に完全偏光した同じ強度 I の光線 $|y\rangle$ を独立に用意して重ねることによって得られる。このように、相対的な位相がランダムである光線の重ね合わせを非コヒーレントな重ね合わせと言う。無偏光の光線を表す密度行列は次のように表される。

$$\hat{\rho} = I|x\rangle\langle x| + I|y\rangle\langle y| \quad (5.5.9)$$

上式によって表される演算子 $\hat{\rho}$ は無偏光の光線と 1 対 1 に対応していて、光線の情報を全て持つ。例えば、無偏光の光線は完全に右円偏光した光線 $|+\rangle$ と左円偏光した光線 $|-\rangle$ を同じ強度で重ねることでも得られる。上式に式 (5.5.3) と (5.5.4) を代入すると、

$$\hat{\rho} = I|+\rangle\langle +| + I|-\rangle\langle -| \quad (5.5.10)$$

と書き換えられることから、確かに 2 つの方法で用意した光線は同じ混合状態にあることが分かる。 $|+\rangle$ と $|-\rangle$ を基底に取って演算子 $\hat{\rho}$ を行列を用いて表すと、次のように書ける。

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \langle +|\hat{\rho}|+\rangle & \langle +|\hat{\rho}|-\rangle \\ \langle -|\hat{\rho}|+\rangle & \langle -|\hat{\rho}|-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (5.5.11)$$

この光線の強度は $\hat{\rho}$ のトレースを取ることで得られる。演算子のトレースとは、何らかの基底を選んでその演算子を行列表示したときの対角要素の和のことである。どのような基底を選んでも不変な量、つまり演算子が固有に持つ基底の取り方に依らない量である。今考えている $\hat{\rho}$ の場合は

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = \langle +|\hat{\rho}|+\rangle + \langle -|\hat{\rho}|-\rangle \quad (5.5.12)$$

$$= \langle x|\hat{\rho}|x\rangle + \langle y|\hat{\rho}|y\rangle \quad (5.5.13)$$

$$= 2I \quad (5.5.14)$$

となる。今は強度 I の光線 2 つを重ねた光線を考えていたので、上式は確かにこの光線の強度を表している。各対角要素をトレースで割った量はその偏光状態にある光子が含まれる割合を表す。例えば右円偏光にある光子が含まれる割合は

$$\frac{\langle +|\hat{\rho}|+\rangle}{\text{Tr}(\hat{\rho})} = \frac{1}{2} \quad (5.5.15)$$

である。例えば一般に

$$|e\rangle = \cos\beta |+\rangle + \sin\beta \exp(i\delta) |-\rangle \quad (5.5.16)$$

という偏光状態のみ透過するフィルター^{†59}に強度 $2I$ の無偏光の光線を当てた場合、透過される強度は

$$\langle e|\hat{\rho}|e\rangle = [\cos^2\beta + \sin^2\beta \exp(i\delta)\exp(-i\delta)]I = I \quad (5.5.17)$$

と計算できる。つまり、無偏光の光線にどのようなフィルターを当てても、透過される光線の強度はもとの半分であることが言える。

x 方向に完全偏光した強度 I の光線を表す密度行列は

$$\hat{\rho} = I |x\rangle \langle x| \quad (5.5.18)$$

$$= \frac{I}{2} (|+\rangle \langle +| + |+\rangle \langle -| + |-\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -|) \quad (5.5.19)$$

$$= \frac{I}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.5.20)$$

である。最後の段は $|+\rangle$ と $|-\rangle$ を基底に取って行列表示したものである。この光線に式 (5.5.16) の偏光状態を透過するフィルターをかざすと、透過光の強度は

$$\langle e|\hat{\rho}|e\rangle = \frac{I}{2} (\cos\beta \quad \sin\beta \exp(-i\delta)) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \exp(i\delta) \end{pmatrix} \quad (5.5.21)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \sin\beta \cos\beta \cos\delta \right) I \quad (5.5.22)$$

と計算できる。 x 方向の直線偏光を透過するフィルターの場合は $\beta = 3\pi/4, \delta = 0$ を上式に代入すると、透過光の強度はもとの光線と同じ I であることが分かる。一方で、右円偏光を透過するフィルターの場合は $\beta = 0$ を上式に代入することで、透過光の強度は $I/2$ であることが計算できる。これは、用意した直線偏光の光線が右円偏光と左円偏光の 1:1 の量子力学的な重ね合わせの状態であることに対応している。つまり、式 (5.5.3) の右辺第 1, 2 項の係数それぞれの絶対値の 2 乗を計算すると、どちらも $1/2$ になる。

密度行列の性質を幾つか述べる。

^{†59} $\langle e|e\rangle = 1$ であることと、 $|e\rangle$ 全体の位相には興味がないことを考慮すると、完全偏光状態は全てこのような表式で書ける。

- 一般に密度行列は次の関係を満たす。

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^2) \leq [\text{Tr}(\hat{\rho})]^2 \quad (5.5.23)$$

等号は密度行列の表す状態が純粋状態である場合のみ成り立つ。実際に x 方向に完全偏光した光線を表す密度行列 (5.5.20) について計算すると、

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = I^2 \quad (5.5.24)$$

となり、等号が成り立っている。一方で、強度 $2I$ の無偏光の光線を表す密度行列 (5.5.11) について計算すると、

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^2) = 2I^2 < (2I)^2 \quad (5.5.25)$$

となり、等号は成り立っていない。

- 例えば、 $n = 1, 2, \dots$ に対して $|\psi_n\rangle$ で表される強度 I_n の完全偏光を非コヒーレントに混ぜ合わせた混合状態を考える。混ぜ合わせた後の強度を $I = \sum_n I_n$ と書くと、それぞれの完全偏光が混ぜ合わされる割合は $W_n = I_n/I$ と書ける。この混合状態に対して観測量 \hat{O} を観測したときの期待値は次のように表される。

$$\langle \hat{O} \rangle = \sum_n W_n \langle \psi_n | \hat{O} | \psi_n \rangle \quad (5.5.26)$$

それぞれの $|\psi_n\rangle$ を適当な基底 $|\phi_m\rangle$ (例えば $|+\rangle$ と $|-\rangle$) で展開して、密度行列の定義も用いると、次のように書き換えられる。

$$\langle \hat{O} \rangle = \sum_n \sum_{m, m'} W_n \langle \psi_n | \phi_m \rangle \langle \phi_m | \hat{O} | \phi_{m'} \rangle \langle \phi_{m'} | \psi_n \rangle \quad (5.5.27)$$

$$= \sum_{m, m'} \langle \phi_{m'} | \left(\sum_n W_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \right) | \phi_m \rangle \langle \phi_m | \hat{O} | \phi_{m'} \rangle \quad (5.5.28)$$

$$= \sum_{m'} \frac{\langle \phi_{m'} | \hat{\rho} \hat{O} | \phi_{m'} \rangle}{\text{Tr}(\hat{\rho})} \quad (5.5.29)$$

$$= \frac{\text{Tr}(\hat{\rho} \hat{O})}{\text{Tr}(\hat{\rho})} \quad (5.5.30)$$

つまり、期待値を求めたい状態を表す密度行列と \hat{O} の積のトレースを取ることによって計算できる。

- 系が部分系 A と B から成る場合を考える。全系の密度行列を $\hat{\rho}$ と書くことにする。各部分系の基底 $|a\rangle_A, |b\rangle_B$ を用いると、部分系 A の状態に作用する演算子 $\hat{O}^{(A)}$ の期待値は

次のように計算できる。

$$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{O}^{(A)}) = \sum_{a,b} \langle a, b | \hat{\rho} \hat{O}^{(A)} | a, b \rangle_{A+B} \quad (5.5.31)$$

$$= \sum_a \langle a | \left(\sum_b \langle b | \hat{\rho} | b \rangle_B \right) \hat{O}^{(A)} | a \rangle_A \quad (5.5.32)$$

$$= \sum_a \langle a | \mathrm{Tr}^{(B)}(\hat{\rho}) \hat{O}^{(A)} | a \rangle_A \quad (5.5.33)$$

$$= \mathrm{Tr}^{(A)}(\hat{\rho}^{(A)} \hat{O}^{(A)}) \quad (5.5.34)$$

$$\text{ただし, } \hat{\rho}^{(A)} = \mathrm{Tr}^{(B)}(\hat{\rho}) = \sum_b \langle b | \hat{\rho} | b \rangle_B \quad (5.5.35)$$

$\hat{\rho}^{(A)}$ は部分系 A の密度行列であり、 $\hat{\rho}$ の部分系 B についてのトレースを取ることで求まる。

ストークスパラメータ

次の 4 つの量の測定によって、与えられた光線の偏光状態を決定できる。

- 放射強度 I を測定する。
- x 方向の直線偏光を透過するフィルターをかざしたときの透過光強度を I_0 、 y 方向の直線偏光を透過するフィルターをかざしたときの透過光強度を I_{90} としたとき、

$$Q = I_0 - I_{90} \quad (5.5.36)$$

を測定する。

- x 軸から y 軸の方に 45° 傾いた直線偏光を透過するフィルターをかざしたときの透過光強度を I_{45} 、 135° 傾いた直線偏光を透過するフィルターをかざしたときの透過光強度を I_{135} としたとき、

$$U = I_{45} - I_{135} \quad (5.5.37)$$

を測定する。

- 右円偏光を透過するフィルターをかざしたときの透過光強度を I_+ 、左円偏光を透過するフィルターをかざしたときの透過光強度を I_- としたとき、

$$V = I_+ - I_- \quad (5.5.38)$$

を測定する。

これらのパラメータ I, Q, U, V はストークスパラメータと呼ばれる^{†60}。45° および 135° 傾いた直線偏光状態は次のように表せる。

$$|e_{45}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + |y\rangle) \quad (5.5.39)$$

$$= \frac{-1+i}{2}|+\rangle + \frac{1+i}{2}|-\rangle \quad (5.5.40)$$

$$|e_{135}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|x\rangle + |y\rangle) \quad (5.5.41)$$

$$= \frac{1+i}{2}|+\rangle + \frac{-1+i}{2}|-\rangle \quad (5.5.42)$$

例えば $\rho_{+-} = \langle +|\hat{\rho}|-\rangle$ のように書くことにする。上式の関係および式 (5.5.3), (5.5.4) を用いると、各透過光強度は次のように表せる。

$$I_0 = \langle x|\hat{\rho}|x\rangle \quad (5.5.43)$$

$$= \frac{1}{2}(\rho_{++} - \rho_{+-} - \rho_{-+} + \rho_{--}) \quad (5.5.44)$$

$$I_{90} = \langle y|\hat{\rho}|y\rangle \quad (5.5.45)$$

$$= \frac{1}{2}(\rho_{++} + \rho_{+-} + \rho_{-+} + \rho_{--}) \quad (5.5.46)$$

$$I_{45} = \langle e_{45}|\hat{\rho}|e_{45}\rangle \quad (5.5.47)$$

$$= \frac{1}{2}(\rho_{++} - i\rho_{+-} + i\rho_{-+} + \rho_{--}) \quad (5.5.48)$$

$$I_{135} = \langle e_{135}|\hat{\rho}|e_{135}\rangle \quad (5.5.49)$$

$$= \frac{1}{2}(\rho_{++} + i\rho_{+-} - i\rho_{-+} + \rho_{--}) \quad (5.5.50)$$

よって各ストークスパラメータは次のようになる。

$$I = \rho_{++} + \rho_{--} \quad (5.5.51)$$

$$Q = -\rho_{+-} - \rho_{-+} \quad (5.5.52)$$

$$U = -i\rho_{+-} + i\rho_{-+} \quad (5.5.53)$$

$$V = \rho_{++} - \rho_{--} \quad (5.5.54)$$

これを逆に表すことで、 $|+\rangle, |-\rangle$ を基底に取ったときの密度行列は、ストークスパラメータで次のように表されることが分かる。

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{++} & \rho_{+-} \\ \rho_{-+} & \rho_{--} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I+V & -Q+iU \\ -Q-iU & I-V \end{pmatrix} \quad (5.5.55)$$

^{†60} 文献によっては逆符で定義されているので注意が必要である。本書は Landi Degl'Innocenti & Landolfi (2004) の定義に倣う。

或いは、 $|x\rangle, |y\rangle$ を基底に取った場合の行列表示は次のように書ける。

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \langle x|\hat{\rho}|x\rangle & \langle x|\hat{\rho}|y\rangle \\ \langle y|\hat{\rho}|x\rangle & \langle y|\hat{\rho}|y\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + Q & U - iV \\ U + iV & I - Q \end{pmatrix} \quad (5.5.56)$$

密度行列の性質 (5.5.23) より、ストークスパラメータは次の関係を満たさなければならない。

$$Q^2 + U^2 + V^2 \leq I^2 \quad (5.5.57)$$

このことに関連して、

$$p = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I} \quad (5.5.58)$$

という量を導入する。上式より、 p は

$$0 \leq p \leq 1 \quad (5.5.59)$$

を満たす。 $p = 1$ となるのは光線が完全偏光の状態 (純粋状態) にある場合のみである。逆に、 $p = 0$ となるのは $Q = U = V = 0$ のときのみであり、これは無偏光の光線に該当する。 p は偏光度と呼ばれる。 $0 < p < 1$ の場合を部分偏光と言う。

5.5.2 ゼーマン効果

付録 (5.B.8) で説明しているように、原子が外部磁場の下に置かれると電子軌道の縮退が解けて、電子の持つ角運動量の磁場方向成分にエネルギー準位が依存するようになる。これをゼーマン分裂と言う。原子が放射 (吸収) することのできる光子は、束縛電子の角運動量と光子スピン角運動量との間に成り立つ角運動量保存則を満たすようなものに限られるため、分裂したそれぞれの準位による遷移は特定の偏光状態の光子しか放射 (吸収) できない。故に、磁場の存在する領域がその遷移の波長帯において光学的に厚い場合は、その領域を通り抜けた光線が全体として偏光することになる。例えば太陽表面から放射された連続光が温度の低い上空を通過して吸収線を形成する状況を考える。この場合、特定の偏光 $|e\rangle$ の光子だけが吸収された結果、吸収線は $|e\rangle$ と直交する偏光状態になっている。ただし、その偏光度は系の光学的厚さに依存する。

磁場の向きに z 軸を取り、束縛電子全体の状態を $|\alpha, J, M\rangle$ と書くことにする。 J は全角運動量 \hat{J} の大きさを表す量子数、 M はその z 成分の量子数であり、 α は電子軌道を表すのに必要な他の量子数をまとめたものである。この原子に関するある遷移 $(\alpha, J) \leftrightarrow (\alpha', J')$ に注目して、その遷移の低い方の準位と高い方の準位の量子数とランダウの g 因子をそれぞれ M, M', g, g' と書くことにする。つまり、高い方の準位に関する量にはプライム ($'$) を付ける。磁場が無いときのこの遷移の振動数を ν_0 と書くと、磁場 \mathbf{B} が弱い場合の振動数は次のようになる。

$$\nu_{MM'}^{JJ'} = \nu_0 + \frac{\mu_B B}{h} (g' M' - g M) \quad (5.5.60)$$

μ_B はボーア磁子、 h はプランク定数である。

電気双極近似の下での遷移率を考える場合、双極子モーメント $\langle \alpha, J, M | e\hat{x} | \alpha', J', M' \rangle$ を実際に計算すると波動関数の対称性からゼロになるような遷移は起こらない。どのような遷移のみが起こり得るのかを記述するルールは選択律と呼ばれることを節 5.3.1 の脚注 (304 ページ) で述べた。一般に電気双極遷移では

$$\Delta M = M' - M = 0, \pm 1 \quad (5.5.61)$$

を満たす遷移しか起こらないという選択律がある。特に、放射 (吸収) する光子の伝搬方向が z 軸 (量子化軸) 方向であった場合は $\Delta M = \pm 1$ の遷移しか起こらない。この選択律は角運動量保存則を意味する。付録 5.B.10 で説明しているように、右円偏光 $|+\rangle$ の光子は伝搬方向と同じ向きに大きさ \hbar のスピン角運動量を持ち、左円偏光 $|-\rangle$ の光子は伝搬方向と逆向きに大きさ \hbar のスピン角運動量を持つ。例えば原子が光子を自発放射して $J' = 1$ の準位から $J = 0$ の準位へ遷移する過程を考える。各 M' 値からの遷移の振動数帯はゼーマン分裂によって十分に離れているため、互いに干渉しないとする^{†61}。光子の放射方向が磁場と同じ z 軸正の向き^{†62}であった場合は、 $M' = 1$ からの遷移については右円偏光の光子のみが放射され、 $M' = -1$ からの遷移については左円偏光の光子のみが放射される。既述した通り、この場合は $M' = 0$ からの遷移は起こらない。

一方で、光子の放射方向が z 軸 (磁場の向き) と垂直である場合を考える。座標軸を y 軸周りに $\pi/2$ だけ回転させて新たに得られる座標系を (x', y', z') とし、 z' 軸正の向きに光子が放射されるとする。 z 軸 (z' 軸) を量子化軸としたときの放射前の原子の磁気量子数を M (N) と書き、それぞれの場合の固有状態を $|J, M\rangle_z, |J, N\rangle_{z'}$ のように書くことにする。まず、 $M = 1$ からの遷移について考える。付録 5.B.7 で説明している回転行列を用いると、 $|1, 1\rangle_z$ と $|1, N\rangle_{z'}$ の間には次の関係があることが分かる。

$$|1, 1\rangle_z = \frac{1}{2} |1, 1\rangle_{z'} - \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 0\rangle_{z'} + \frac{1}{2} |1, -1\rangle_{z'} \quad (5.5.62)$$

上式の各係数を c_N のように書く。つまり、 $c_1 = 1/2, c_0 = 1/\sqrt{2}, c_{-1} = 1/2$ である。光子の放射後の系全体の状態は次のように書ける。

$$|\psi\rangle_{\text{out}} \propto \sum_{N, \lambda} c_N a_{N \rightarrow 0, \lambda} |0, 0\rangle_{z'} \otimes |\lambda\rangle_{\text{ph}} \quad (5.5.63)$$

$|\lambda\rangle_{\text{ph}}$ は放射された光子の状態であり、右円偏光の場合は $\lambda = 1$ 、左円偏光の場合は $\lambda = -1$ である。 $a_{N \rightarrow 0, \lambda}$ は状態 $|1, N\rangle_{z'}$ から $|0, 0\rangle_{z'} \otimes |\lambda\rangle_{\text{ph}}$ への確率振幅である。つまり、 $|a_{N \rightarrow 0, \lambda}|^2$ は、始状態が $|1, N\rangle_{z'}$ であったときに $|0, 0\rangle_{z'} \otimes |\lambda\rangle_{\text{ph}}$ へ遷移する確率を表す。

^{†61} つまり、例えば $|M' = 1\rangle$ と $|M' = 0\rangle$ のコヒーレントな重ね合わせで表される状態 $|\psi\rangle = c_1 |M' = 1\rangle + c_0 |M' = 0\rangle$ がある原子は存在しないと考える。このことは準位 $M' = 1$ と $M' = 0$ の間にコヒーレンスが無いと表現される。

^{†62} 原子は座標系の原点で静止していると考えている。

前述した選択律より、 $a_{+1 \rightarrow 0, +1}$, $a_{-1 \rightarrow 0, -1}$ 以外はゼロなので、この 2 つの確率振幅の絶対値は 1 であるはずだが、その位相関係を調べる。電気双極近似の下では、確率振幅は遷移双極子モーメントを用いて次のように書ける (付録 5.B.11 および節 5.3.1 参照)。

$$a_{+1 \rightarrow 0, +1} = A \langle 0, 0 | \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_+^* | 1, +1 \rangle_{z'} \quad (5.5.64)$$

$$a_{+1 \rightarrow 0, -1} = A \langle 0, 0 | \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_-^* | 1, -1 \rangle_{z'} \quad (5.5.65)$$

A は N に依らない係数であり、2 つの確率振幅に共通する。

$$\mathbf{e}_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y), \quad \mathbf{e}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) \quad (5.5.66)$$

はそれぞれ右円偏光、左円偏光の偏光ベクトルである。ウィグナー-エッカルトの定理 (詳しくは例えば Landi Degl'Innocenti & Landolfi (2004) を参照) より、一般に遷移双極子モーメントは 3-j 記号 (付録 5.B.7 参照) を用いて次の形式で書くことができる。

$$\langle \alpha', J', M' | \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_\lambda^* | \alpha, J, M \rangle = (-1)^{J'-M'} \begin{pmatrix} J' & 1 & J \\ -M' & -\lambda & M \end{pmatrix} \langle \alpha', J' || \hat{\mathbf{x}} || \alpha, J \rangle \quad (5.5.67)$$

$\langle \alpha', J' || \hat{\mathbf{x}} || \alpha, J \rangle$ は換算行列要素 (reduced matrix element) と呼ばれ、 M', M に依らない量である。3-j 記号の 2 行目の符号を全て反転させると $(-1)^{J'+1+J}$ 倍されるという性質を用いると、

$$a_{+1 \rightarrow 0, +1} = a_{+1 \rightarrow 0, -1} \quad (5.5.68)$$

であることが分かる。

以上の考察より、式 (5.5.63) は次のように書き換えられる。

$$|\psi\rangle_{\text{out}} \propto \frac{1}{2} a_{+1 \rightarrow 0, +1} |0, 0\rangle_{z'} \otimes (|+\rangle_{\text{ph}} + |-\rangle_{\text{ph}}) \quad (5.5.69)$$

$$\propto |0, 0\rangle_{z'} \otimes |y'\rangle_{\text{ph}} \quad (5.5.70)$$

よって、放射される光子は y' 軸 (y 軸) 方向、つまり磁場と垂直な方向に直線偏光していることが分かる。他の準位からの遷移については、回転行列を用いると

$$|1, 0\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 1\rangle_{z'} - \frac{1}{\sqrt{2}} |1, -1\rangle_{z'} \quad (5.5.71)$$

$$|1, -1\rangle_z = \frac{1}{2} |1, 1\rangle_{z'} + \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 0\rangle_{z'} + \frac{1}{2} |1, -1\rangle_{z'} \quad (5.5.72)$$

という関係が分かる。同様の考察により、 $M = -1$ の準位からの遷移で放射される光子も y' 軸 (y 軸) 方向に直線偏光している一方で、 $M = 0$ の準位からの遷移で放射される光子は x' 軸 (z 軸) 方向、つまり磁場と平行な方向に直線偏光していることが分かる。

5.5.3 原子の偏極

前節では磁場の存在によって放射場が偏光する効果のひとつであるゼーマン効果を説明した。磁場が存在しなくても放射場を偏光させる過程も存在する。例えば光球に照らされる彩層のように、原子集団が一方向から異方的に放射場に照らされる場合、特定の M 準位に原子の占有率が偏り、特定の遷移が起こる確率が大きくなることで、全体として偏光した光を放射することがある。このように、原子準位の占有率が偏る現象を原子の偏極と言う。

例えば低い準位 (l) が $J_l = 0$ で高い準位 (u) が $J_u = 1$ である遷移を考える。外部磁場は無いとして、双方 M レベルでは縮退している。このとき、 $M_l = 0$ と $M_u = -1, 0, 1$ 間の各遷移の線強度は、式 (5.5.67) より

$$S_{M_u, M_l} \propto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ M_u & -M_u & 0 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{3} \quad (5.5.73)$$

と書ける。つまり、全ての遷移の線強度は等しい。この原子集団が z 軸方向に異方的な放射場によって照らされているとする。このとき、放射場の吸収に伴う励起では選択律より $M_u = 0$ への遷移は起こらない一方で、 $M_u = 0$ からは脱励起していく。ただし、ここで注意すべきなのは、原子を励起させる過程は光子の吸収だけではないということである。例えば電子との衝突によっても励起は起こり、その際には $M_u = -1, 0, 1$ の各遷移が平等に起きる。この過程が光子の吸収よりも頻繁に起きる場合は原子の偏極は起きない。しかし、薄い彩層のように、このような緩和過程の起きる頻度が小さい場合には、 $M_u = -1, 1$ の占有率が $M_u = 0$ よりも多くなる。その結果、 $M_u = -1, 1$ からの脱励起の割合が多くなる。前節で述べたように、これらの遷移によって z 軸に垂直な方向に光子が放射される場合、 z 軸に直交した直線偏光になるため、光は全体として直線偏光する。

今は M_u レベルが縮退している場合を考えているため、例えば x 方向に直線偏光している光子

$$|x\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) \quad (5.5.74)$$

を吸収して励起した場合、励起後の原子の状態は

$$|\psi\rangle \propto -\frac{1}{\sqrt{2}}a_{0,+ \rightarrow +1} |M_u = +1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}a_{0,- \rightarrow -1} |M_u = -1\rangle \quad (5.5.75)$$

と書ける。 $a_{0\lambda \rightarrow M}$ は $|0, 0\rangle \otimes |\lambda\rangle_{\text{ph}}$ から $|M_u = M\rangle$ への遷移の確率振幅である。つまり、 $M_u = \pm 1$ の状態のコヒーレントな重ね合わせで表される状態にある原子も存在する。このことを $M_u = +1$ と $M_u = -1$ の状態間にコヒーレンスがあると言う。今の場合 $M_u = 1$ からの脱励起の場合も $M_u = -1$ からの場合も同じ直線偏光の光子を放射するため、状態 $|\psi\rangle$ の原子が脱励起した場合もやはり同じ直線偏光の光子を放射する。このような縮退した準位の占有率を体系的に考えるためには原子の密度行列 $\hat{\rho}$ を考える。 $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$ となるように規格化した場合は、

$\hat{\rho}$ の対角要素 $\langle M_u = M | \hat{\rho} | M_u = M \rangle$ は $M_u = M$ の占有率を表す。上述したように $M_u = +1$ と $M_u = -1$ の状態間にコヒーレンスがあった場合は、非対角要素

$$\langle M_u = +1 | \hat{\rho} | M_u = -1 \rangle = \langle M_u = -1 | \hat{\rho} | M_u = +1 \rangle^* \quad (5.5.76)$$

が非ゼロになる。次節では放射場との相互作用の結果、この $\hat{\rho}$ がどのように変化するかを記述する方程式について説明する。

節 5.3.5 で述べたように、共鳴散乱は光子の吸収に伴って励起した後、自発放射に伴って脱励起する過程と解釈できる。つまり、上述の議論は、共鳴散乱によって 90° 散乱された光が直線偏光する仕組みの説明になる。

5.5.4 偏光を考慮した放射輸送

前節までの議論からも分かるように、原子によって吸収・放射される放射場を知るためには原子の各準位の占有率を知る必要がある。一方で原子の占有率は放射場に依存する。このように、偏極も考慮した放射輸送問題は、放射場と原子の相互作用する 2 系についての問題と捉えられる。放射場の状態は、放射場についての密度行列 $\hat{\rho}^{(R)}$ を基にして定義されるストークスパラメータによって表される。一方で原子の状態は、原子についての密度行列 $\hat{\rho}^{(A)}$ によって表される。この問題を解くためには原理的には次の 2 つの方程式を連立して解く必要がある。

- ストークスパラメータについての放射輸送方程式
- 原子の密度行列の時間発展方程式 (統計平衡方程式)

Landi Degl'Innocenti & Landolfi (2004) は量子力学の原理から出発し、様々な仮定を課すことで、この 2 つの式を導出している。本節では彼らの導出過程を簡単に概観した後、2 式の大まかな意味を説明する。

方程式導出の流れ

1. 放射場は規格化体積 \mathcal{V} での固有モードを考えることで第二量子化 (付録 5.B.10 参照) し、フォック状態を基底として考える。放射場の密度行列はこのフォック状態に作用する演算子なので、光線の偏光状態に対して考えていた節 5.5.1 の密度行列とは意味が異なる。放射場の密度行列 $\hat{\rho}^{(R)}$ も原子の密度行列 $\hat{\rho}^{(A)}$ もトレースが 1 になるように規格化されている。これは原子の数密度が $1/\mathcal{V}$ に規格化されていることに対応する。
2. 系全体のハミルトニアンは付録 5.A.5 および節 5.3.1 で説明しているように、

$$\hat{H} = \hat{H}^{(R)} + \hat{H}^{(A)} + \hat{V} \quad (5.5.77)$$

と表される。第 1 項からそれぞれ放射場のハミルトニアン、原子のハミルトニアン、両者

の間の相互作用ハミルトニアンである^{†63}。相互作用描像 (付録 5.B.13 参照) で考えると、系全体の密度行列 $\hat{\rho}_I$ は次の運動方程式に従う。

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_I(t) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{V}_I(t), \hat{\rho}_I(t)] \quad (5.5.78)$$

任意の演算子 \hat{O} の期待値 $O(t) = \text{Tr}[\hat{\rho}_I(t)\hat{O}_I(t)]$ の時間発展方程式は、実際に時間微分を計算し、上式の運動方程式を用いることで書き下せる。

3. 相互作用 \hat{V} は電気双極近似の下で遷移双極子モーメントによって表される (節 5.3.1 参照)。
4. 全系の密度行列が放射場と原子の密度行列のテンソル積で表されると仮定する。

$$\hat{\rho}_I(t) = \hat{\rho}_I^{(R)}(t) \otimes \hat{\rho}_I^{(A)}(t) \quad (5.5.79)$$

これは、放射場の観測量 $\hat{O}^{(R)}$ と原子の観測量 $\hat{O}^{(A)}$ の積の期待値が期待値の積で表される (相関が無い) ことに対応する。

5. 放射場は特定の振動数の光子の非コヒーレントな重ね合わせによる集団であると考え。つまり、異なる振動数の光子がコヒーレントに重ね合わされた、有限のスペクトル幅 $\delta\nu$ を持つ光子は存在しないと考える。例えば異なる M の準位が $\delta\nu$ より細かいエネルギー差で分裂している場合、そのような光子が原子に吸収されると、各 M 準位のコヒーレントな重ね合わせで表される状態への励起が起き得る。例えば基底状態からエネルギー値 E_1, E_2 が微妙に異なる状態 $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ の重ね合わせで表される状態

$$|\psi(t)\rangle = c_1 \exp[-iE_1t/\hbar - \gamma_1t/2] |\phi_1\rangle + c_2 \exp[-iE_2t/\hbar - \gamma_2t/2] |\phi_2\rangle \quad (5.5.80)$$

への励起を考える。 γ_1, γ_2 は各状態の減衰率である (節 5.3.5 参照)。この遷移の線強度は

$$S_{0\psi}(t) \propto |\langle 0|e\hat{x} \cdot e_\lambda|\psi(t)\rangle|^2 \quad (5.5.81)$$

$$\begin{aligned} &\propto |c_1d_a|^2 \exp(-\gamma t) + |c_2d_2|^2 \exp(-\gamma t) \\ &\quad + c_1c_2^*d_1d_2^* \exp[-i(E_1 - E_2)t/\hbar - \gamma t] \\ &\quad + c_1^*c_2d_1^*d_2 \exp[i(E_1 - E_2)t/\hbar - \gamma t] \end{aligned} \quad (5.5.82)$$

$$\text{ただし, } d_m = \langle 0|e\hat{x} \cdot e_\lambda|\phi_m\rangle, \quad \gamma = (\gamma_1 + \gamma_2)/2 \quad (5.5.83)$$

と表される。つまり、線強度が $(E_1 - E_2)/\hbar$ の周波数で振動する。このような干渉効果を量子ビート (quantum beats) と言う。この現象は吸収係数には自然幅を持つ線輪郭関数の中心振動数が周期的に変化する効果として現れるはずだが、導出される方程式にはそのような効果は含まれない。よって、例えばゼーマン分裂によって M レベルが十分に離れているか或いは完全に縮退している場合はほぼ正しい結果を与えるが、縮退が少し

^{†63} 原子は静止していると考えている、つまり原子重心の位置演算子は考えていないため、例えばドップラー幅の線輪郭関数は恣意的に組み込む必要がある。

だけ解けていてかつ放射場のスペクトルが平らでないような系への応用では正しい結果を与えない可能性がある。

6. 原子の密度行列は次のように書ける。 $|m\rangle$ は原子ハミルトニアン^{†64}の適当な固有状態である。

$$\rho_{mm'} = \langle m | \hat{\rho}^{(A)}(t) | m' \rangle \tag{5.5.84}$$

$$= \text{Tr}^{(A)} \left[|m'\rangle \langle m| \hat{\rho}^{(A)}(t) \right] \tag{5.5.85}$$

$$= \text{Tr} \left[|m'\rangle \langle m| \hat{\rho}(t) \right] \tag{5.5.86}$$

$$= \text{Tr} \left[\hat{O}_I^{(A)}(t) \hat{\rho}_I(t) \right] \tag{5.5.87}$$

$$\text{ただし, } \hat{O}^{(A)} = |m'\rangle \langle m| \tag{5.5.88}$$

つまり、原子の密度行列を演算子 $\hat{O}_I^{(A)}$ の期待値と解釈して、その時間発展式を計算する。導出された式は統計平衡方程式 (statistical equilibrium equations) と呼ばれる。

7. Ω 方向に伝搬する振動数 ν の放射場成分に対する偏光テンソル演算子を、生成消滅演算子によって次のように定義する。

$$\hat{I}_{\lambda\lambda'}(\nu, \Omega) = \frac{h\nu^3}{c^2} \hat{a}_{\nu, \Omega, \lambda}^\dagger \hat{a}_{\nu, \Omega, \lambda'} \tag{5.5.89}$$

λ は光子の偏光の自由度を表す。この演算子は節 5.5.1 で考えた密度行列と同じ意味を持つ。例えば $\hat{I}_{\lambda\lambda'}$ を $\lambda \times \lambda'$ テンソルと捉えたときのトレースを取ると、

$$\hat{I} = \sum_{\lambda} \hat{I}_{\lambda\lambda} = \frac{h\nu^3}{c^2} \sum_{\lambda} \hat{N}_{\nu, \Omega, \lambda} \tag{5.5.90}$$

となる。 $\hat{N}_{\nu, \Omega, \lambda}$ はモード (ν, Ω, λ) の数演算子である。276 ページの脚注で述べている関係と、各モードは相空間の体積 h^3 を占めることを考慮すると、上式は放射強度を表す演算子であることが分かる。 $\hat{I}_{\lambda\lambda'}$ の期待値 $I_{\lambda\lambda'} = \text{Tr}[\hat{I}_{\lambda\lambda'} \hat{\rho}_I(t)]$ の時間発展式を書き下す^{†64}。

8. ストークスパラメータは式 (5.5.51)-(5.5.54) と同様に、次のようにして定義される。

$$I(\nu, \Omega) = I_{++}(\nu, \Omega) + I_{--}(\nu, \Omega) \tag{5.5.91}$$

$$Q(\nu, \Omega) = -I_{+-}(\nu, \Omega) - I_{-+}(\nu, \Omega) \tag{5.5.92}$$

$$U(\nu, \Omega) = -iI_{+-}(\nu, \Omega) + iI_{-+}(\nu, \Omega) \tag{5.5.93}$$

$$V(\nu, \Omega) = I_{++}(\nu, \Omega) - I_{--}(\nu, \Omega) \tag{5.5.94}$$

偏光テンソルの期待値の時間発展式をストークスパラメータについての式に書き換える。

^{†64} 相互作用描像での $\hat{I}_{\lambda\lambda'}$ はシュレディンガー描像の場合と形が変わらない。

9. 今までの議論を 3 次元実空間に拡張する。具体的には各点 \boldsymbol{x} について原子の密度行列 $\rho_{mm'}$ を評価する。一方で、放射場についても各点で評価し、求まった放射輸送方程式の d/dt を $\partial/\partial t + cd/ds$ に書き換える。 s は光線に沿った位置変数である。また、因子 $1/\mathcal{V}$ を原子の数密度 $\mathcal{N}(\boldsymbol{x})$ に書き換える。

統計平衡方程式

統計平衡方程式は次のような形式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_{mm'} = & -2\pi i\nu_{mm'}\rho_{mm'} + \sum_{nn'}\rho_{nn'}T_{mm'nn'}^A \\ & + \sum_{pp'}\rho_{pp'}T_{mm'pp'}^E + \sum_{pp'}\rho_{pp'}T_{mm'pp'}^S \\ & - \sum_{m''}[\rho_{mm''}R_{mm'm''}^A + \rho_{m''m'}R_{m'm''m}^A] \\ & - \sum_{m''}[\rho_{mm''}R_{mm'm''}^E + \rho_{m''m'}R_{m'm''m}^E] \\ & - \sum_{m''}[\rho_{mm''}R_{mm'm''}^S + \rho_{m''m'}R_{m'm''m}^S] \end{aligned} \quad (5.5.95)$$

右辺第 1 項は、放射場との相互作用が無くとも非対角要素 ($m \neq m'$ の場合の $\rho_{mm'}$) に起きる振動を表す。導出の際に課した条件より、異なるエネルギー準位間の非対角要素はゼロであり、状態 $|m\rangle$ と $|m'\rangle$ が縮退している場合のみ非対角要素を考えることになる。 T が係る項は放射場との相互作用の結果、別の行列要素から注目する行列要素へコヒーレンスが移動する効果を表し、 R が係る項は逆に注目する行列要素から別の行列要素へ移動する効果を表す。添え字 A,E,S はそれぞれ吸収、自発放射、誘導放射に起因する効果であることを表す。

例えば吸収によって注目する行列要素の絶対値が増える時間率を表す $T_{mm'nn'}^A$ は次のように書かれる。

$$T_{mm'nn'}^A = \frac{2\pi}{\epsilon_0\hbar^2c} \sum_{\lambda,\lambda'} \int_{4\pi} \frac{d\Omega}{4\pi} \langle m|e\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{e}_\lambda(\Omega)|n\rangle \langle m'|e\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{e}_{\lambda'}(\Omega)|n'\rangle^* \bar{I}_{\lambda'\lambda}(\nu_{mn}, \Omega) \quad (5.5.96)$$

ただし、 $\bar{I}_{\lambda'\lambda}(\nu_{mn}, \Omega)$ は複素線輪郭関数 $\Phi(\nu_{mn} - \nu)$ を乗じて注目する遷移振動数 $\nu_{mn} = (E_m - E_n)/h$ の周りで積分することで、偏光テンソル $I_{\lambda'\lambda}(\nu, \Omega)$ を平均した量を表す。

$$\bar{I}_{\lambda'\lambda}(\nu_{mn}, \Omega) = \int I_{\lambda'\lambda}(\nu, \Omega)\Phi(\nu_{mn} - \nu)d\nu \quad (5.5.97)$$

複素線輪郭関数は、自然幅を考える場合は次のように書ける。

$$\Phi(\nu_{mn} - \nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma_{mn}}{\Gamma_{mn}^2 + (\nu_{mn} - \nu)^2} + \frac{i}{\pi} \frac{\nu_{mn} - \nu}{\Gamma_{mn}^2 + (\nu_{mn} - \nu)^2} \quad (5.5.98)$$

$$\text{ただし, } \Gamma_{mn} = \frac{\gamma_m + \gamma_n}{4\pi} \quad (5.5.99)$$

γ_m, γ_n は状態 $|m\rangle, |n\rangle$ の減衰率である。特に放射場が無偏光かつ等方的であった場合、

$$I_{\lambda'\lambda}(\nu, \Omega) = \frac{1}{2}I(\nu)\delta_{\lambda'\lambda} \quad (5.5.100)$$

として式 (5.3.19) と同様に $d\Omega$ についての積分を実行すれば、 $m = m, n = n$ の場合について次のように計算できる。

$$T_{mnmn}^A = \frac{2\pi |\langle m | e\hat{x} | n \rangle|^2}{3\epsilon_0 \hbar^2 c} \bar{I} = B_{nm} \bar{I} \quad (5.5.101)$$

B_{nm} はアインシュタイン係数である。これは節 5.3.1 の結果と整合的である。

電子との衝突による励起や脱励起を考慮する場合は統計平衡方程式の右辺にそれらの効果を表す項が加わる。

ストークスパラメータに対する放射輸送方程式

偏光テンソル $I_{\lambda'\lambda}(\nu, \Omega)$ に対する放射輸送方程式は次のように表される。

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d}{ds} \right) I_{\lambda'\lambda} = - \sum_{\mu} [g_{\lambda'\mu} I_{\mu\lambda} + g_{\lambda\mu}^* I_{\lambda'\mu}] + \sum_{\mu} [h_{\lambda'\mu} I_{\mu\lambda} + h_{\lambda\mu}^* I_{\lambda'\mu}] + \frac{1}{2} [f_{\lambda'\lambda} + f_{\lambda\lambda'}^*] \quad (5.5.102)$$

右辺の $g_{\lambda'\lambda}, h_{\lambda'\lambda}, f_{\lambda'\lambda}$ はそれぞれ吸収、誘導放射、自発放射による効果を表す。次のように書ける。

$$g_{\lambda'\lambda}(\nu, \Omega) = \frac{\pi\nu\mathcal{N}}{2\epsilon_0\hbar c} \sum_{m,n,n'} \langle m | e\hat{x} \cdot \mathbf{e}_{\lambda'}(\Omega) | n \rangle \langle m | e\hat{x} \cdot \mathbf{e}_{\lambda}(\Omega) | n' \rangle^* \rho_{nn'} \Phi(\nu_{mn} - \nu) \quad (5.5.103)$$

$$h_{\lambda'\lambda}(\nu, \Omega) = \frac{\pi\nu\mathcal{N}}{2\epsilon_0\hbar c} \sum_{m,m',n} \langle n | e\hat{x} \cdot \mathbf{e}_{\lambda'}^*(\Omega) | m \rangle^* \langle n | e\hat{x} \cdot \mathbf{e}_{\lambda}^*(\Omega) | m' \rangle \rho_{m'm} \Phi(\nu_{mn} - \nu) \quad (5.5.104)$$

$$f_{\lambda'\lambda}(\nu, \Omega) = \frac{2h\nu^3}{c^2} h_{\lambda'\lambda}(\nu, \Omega) \quad (5.5.105)$$

例えば $g_{\lambda'\lambda}$ は低い準位の密度行列要素 $\rho_{nn'}$ と各遷移の双極子モーメント、複素線輪郭関数 $\Phi(\nu_{mn} - \nu)$ を乗じて各遷移についての和を取っている。

特に放射場が無偏光でかつ密度行列の非対角要素が全てゼロの場合は、

$$I_{\lambda'\lambda}(\nu, \Omega) = \frac{1}{2}I(\nu, \Omega)\delta_{\lambda'\lambda}, \quad \rho_{nn'} = \rho_n \delta_{nn'} \quad (5.5.106)$$

と置いて式 (5.5.102) の両辺の \sum_{λ} を取ることで、放射輸送方程式は

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d}{ds} \right) I = - \sum_{\lambda} \frac{1}{2} (g_{\lambda\lambda} + g_{\lambda\lambda}^*) I + \sum_{\lambda} \frac{1}{2} (h_{\lambda\lambda} + h_{\lambda\lambda}^*) I + \sum_{\lambda} \frac{1}{2} (f_{\lambda\lambda} + f_{\lambda\lambda}^*) \quad (5.5.107)$$

となる。例えば右辺第 1 項の係数は、全吸収方向についての平均を取ることで、

$$\sum_{\lambda} \frac{1}{2}(g_{\lambda\lambda} + g_{\lambda\lambda}^*) = \frac{\pi\nu\mathcal{N}}{3\epsilon_0\hbar c} \sum_{m,n} |\langle m|e\hat{\boldsymbol{x}}|n\rangle|^2 \rho_n \phi(\nu_{mn} - \nu) \quad (5.5.108)$$

$$= \frac{h\nu}{4\pi} \sum_{m,n} \mathcal{N} \rho_n B_{nm} \phi(\nu_{mn} - \nu) \quad (5.5.109)$$

と書ける。 $\phi(\nu_{mn} - \nu)$ は複素線輪郭関数の実部である。 $\mathcal{N}\rho_n$ は準位 n にある原子の数密度なので、上式は節 5.3.2 で導入した吸収係数に相当することが分かる。

ストークスパラメータをまとめた縦数ベクトル

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} \quad (5.5.110)$$

をストークスベクトルと言う。ストークスベクトルに対する放射輸送方程式は次の形式で表される。

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d}{ds} \right) \vec{I} = \vec{\epsilon} - \underline{K} \vec{I} \quad (5.5.111)$$

$\vec{\epsilon}$ は各パラメータに対する放射率であり、

$$\vec{\epsilon} = (\epsilon_I, \epsilon_Q, \epsilon_U, \epsilon_V)^T \quad (5.5.112)$$

$$\epsilon_I = \text{Re}(f_{++} + f_{--}) \quad (5.5.113)$$

$$\epsilon_Q = -\text{Re}(f_{+-} + f_{-+}) \quad (5.5.114)$$

$$\epsilon_U = \text{Im}(f_{+-} - f_{-+}) \quad (5.5.115)$$

$$\epsilon_V = \text{Re}(f_{++} - f_{--}) \quad (5.5.116)$$

と表される。Re, Im はそれぞれ続く括弧内の量の実部、虚部を取るという意味である。

\underline{K} は吸収係数を拡張した概念であり、伝搬行列 (propagation matrix) と呼ばれる。各係数を次のように定める。

$$\eta_I = \text{Re}(g_{++} + g_{--}) - \text{Re}(h_{++} + h_{--}) \quad (5.5.117)$$

$$\eta_Q = -\text{Re}(g_{+-} + g_{-+}) + \text{Re}(h_{+-} + h_{-+}) \quad (5.5.118)$$

$$\eta_U = \text{Im}(g_{+-} - g_{-+}) - \text{Im}(h_{+-} - h_{-+}) \quad (5.5.119)$$

$$\eta_V = \text{Re}(g_{++} - g_{--}) - \text{Re}(h_{++} - h_{--}) \quad (5.5.120)$$

$$\rho_Q = -\text{Im}(g_{+-} + g_{-+}) + \text{Im}(h_{+-} + h_{-+}) \quad (5.5.121)$$

$$\rho_U = -\text{Re}(g_{+-} - g_{-+}) + \text{Re}(h_{+-} - h_{-+}) \quad (5.5.122)$$

$$\rho_V = \text{Im}(g_{++} - g_{--}) - \text{Im}(h_{++} - h_{--}) \quad (5.5.123)$$

すると、 \underline{K} は次のように表される。

$$\underline{K} = \begin{pmatrix} \eta_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \eta_Q & \eta_U & \eta_V \\ \eta_Q & 0 & 0 & 0 \\ \eta_U & 0 & 0 & 0 \\ \eta_V & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_V & -\rho_U \\ 0 & -\rho_V & 0 & \rho_Q \\ 0 & \rho_U & -\rho_Q & 0 \end{pmatrix} \quad (5.5.124)$$

第 1 項の行列は物質によって放射場が偏光状態に関係なく吸収される効果を表し、吸収行列 (absorption matrix) と呼ばれる。第 2, 3 項の行列は、物質が等方的な場合はゼロになる効果である。第 2 項の行列は偏光状態によって吸収されやすさが異なるために放射場の偏光状態を変化させる効果であり、二色性行列 (dichroism matrix) と呼ばれる。第 3 項の行列は放射場が物質を貫く間に位相がずれて偏光状態が入れ替わる効果を表して、分散行列 (dispersion matrix) と呼ばれる。

物質が局所熱平衡 (LTE) にある場合、原子の密度行列の要素はボルツマン因子を用いて次のように表される。

$$\rho_{nn'} = \delta_{nn'} \frac{\exp[-E_n/(k_B T)]}{\sum_n \exp[-E_n/(k_B T)]} \quad (5.5.125)$$

この場合は統計平衡方程式を解かなくても放射輸送方程式を解くことができる。また、実際に計算することで、各 $i = I, Q, U, V$ に対して

$$\varepsilon_i = \eta_i B_\nu \quad (5.5.126)$$

であることが分かる (詳しくは Landi Degl'Innocenti & Landolfi, 2004)。よって、放射輸送方程式から ε_i を消去でき、次のように書き換えられる。

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d}{ds} \right) \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = -\underline{K} \begin{pmatrix} I - B_\nu \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} \quad (5.5.127)$$

5.5.5 [トピック] 太陽の磁場を知る

本節でこれまで色々と述べてきたように、磁場が存在すると原子のエネルギー準位が分裂し、放射される光が偏光する。故に適切な吸収線のストークスパラメータを観測することで、その吸収線が形成される高度の磁場の情報を得ることができる。この節は Borrero & Ichimoto (2011), Stenflo (2003) を参考にしている。

ゼーマン効果の観測例

図 5.15 は観測衛星ひのでが撮影した黒点である。ひのでに搭載された SP と呼ばれる偏光分光観測装置によって測定された、図 5.15 の 2 点 A, B におけるストークスパラメータのスペク

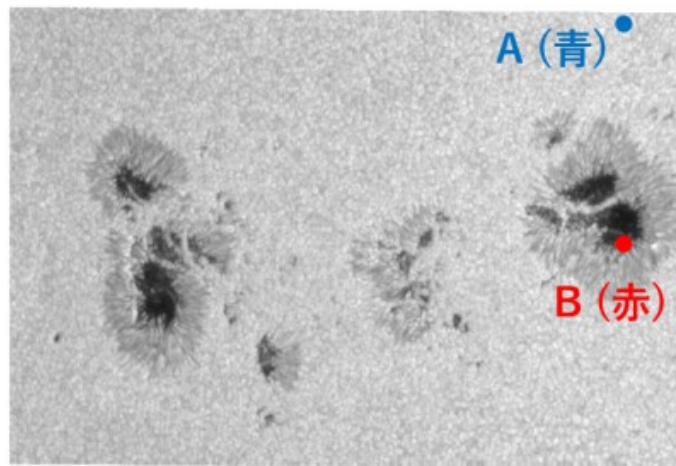


図 5.15 観測衛星ひのでに搭載された装置 SOT/SP が 2016 年 9 月 3 日に連続光で観測した光球：HAO/CSAC のサイトで公開されているデータを用いた。キャリブレーションについては Lites & Ichimoto (2013) を参照。

トルを図 5.16 に示した。点 A は磁場の弱い領域、点 B は黒点内の磁場の強い領域である。図を見ると、630.15 nm と 630.25 nm 付近に吸収線がある。これらは鉄原子によって、光球で形成されている。

例えば 630.25 nm の方の吸収線は、 $J = 1$ である低い準位 (l) と $J = 0$ である高い準位 (u) の間の遷移に対応する。これは節 5.5.2 で説明した場合と同類である。よって、磁場が存在すると、 $M_l = 1 \leftrightarrow M_u = 0$ 、 $M_l = 0 \leftrightarrow M_u = 0$ 、 $M_l = -1 \leftrightarrow M_u = 0$ の 3 つの遷移に対応する吸収線に分裂する。図を見ると、点 B での I は、確かに先端が 3 つに分裂しているように見える。点 B では Q, U, V の値が大きくなっている。 V は 630.25 nm 付近に 2 つの山を持つ。これは $M_l = 1 \leftrightarrow M_u = 0$ と $M_l = -1 \leftrightarrow M_u = 0$ の遷移に対応する。磁場の視線方向に (反) 平行な成分が存在するために現れる偏光である。対して、 U を見ると、630.25 nm 付近に 2 つの正の山と 1 つの負の山を持つ。これは磁場の視線方向に垂直な成分が存在するために現れる偏光である。

視線方向に対する磁場の向きによって吸収線のストークスパラメータがどのように変化するかを視覚的に示した動画を YouTube に上げたので見て欲しい^{†65}。

磁場の推定

図 5.17 は図 5.15 で示した領域についてのひので/SP の観測データから、インバージョンと呼ばれる手法を用いて推定された黒点の磁場構造である。図 5.16 の 2 つの吸収線から推定されたものなので、光球の高度での磁場の様子を表す。この図はおよそ次のようにして計算された。

^{†65} 動画の URL : <https://youtu.be/-hmTdmYggR8>

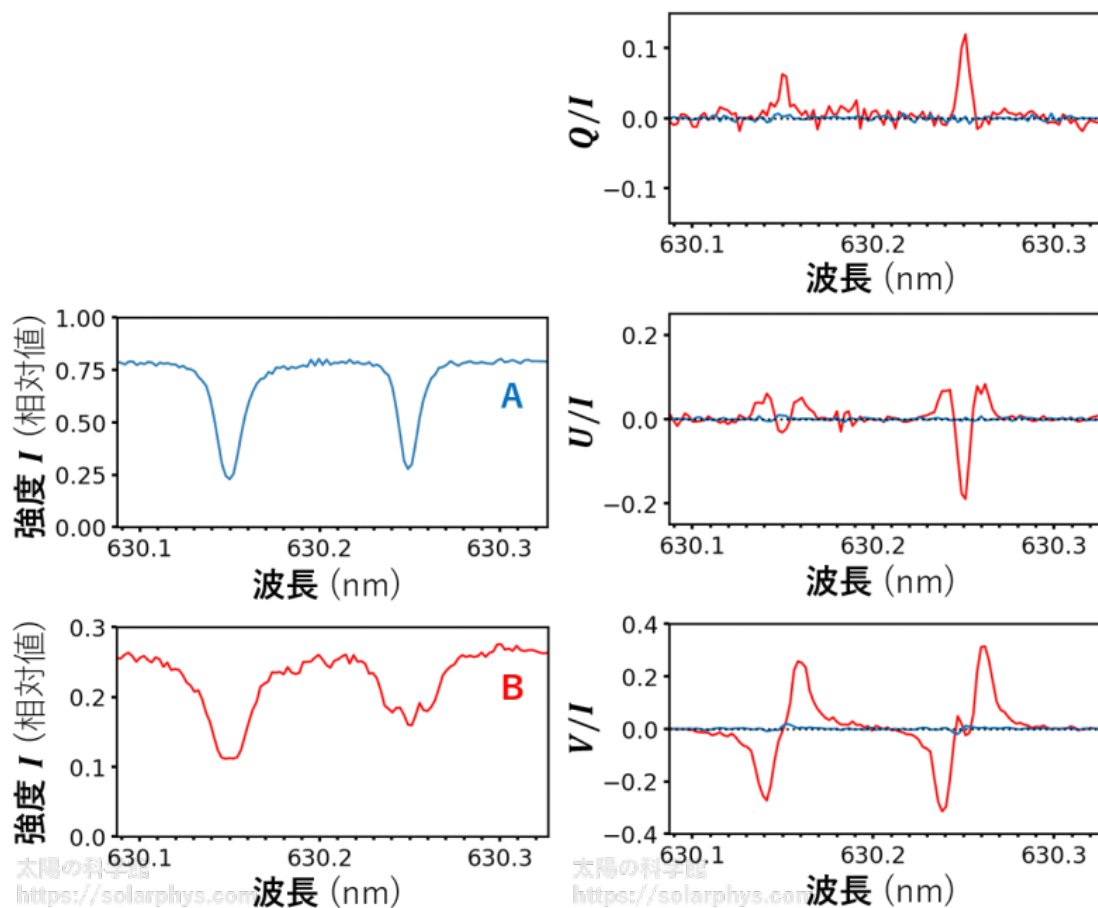


図 5.16 図 5.15 の 2 点でのストークスパラメータのスペクトル：点 A のデータは青色、点 B のデータは赤色のグラフで示されている。HAO/CSAC のサイトで公開されているデータを用いた。キャリブレーションについては Lites & Ichimoto (2013) を参照。

630 nm 付近の波長 λ の放射場に注目する。パラメータ

$$\vec{X} = (\mathbf{B}, T, P_g, P_e, \rho, V_{\text{los}}, V_{\text{turb}}) \tag{5.5.128}$$

が与えられれば、太陽表面の黒体放射に対して節 5.5.4 で説明した放射輸送方程式を解くことによって、観測されるストークスパラメータに対応するストークスベクトル $\vec{I}^{\text{syn}}(\lambda_k, \vec{X})$ を計算できる。ただし、 \mathbf{B} は磁場の成分、 T は気体の温度、 P_g, P_e は全圧力と電子の分圧、 ρ は質量密度、 V_{los} は視線方向の流速である。このとき、次の仮定が課される。

1. 観測の時空間分解能より細かいスケールでの気体の動き (乱流) による効果もモデルに組み込まれる。 V_{turb} はそのモデルに必要なパラメータである。
2. 今は光球で形成される吸収線について考えるため、気体と放射場は局所熱平衡にあるとする。故に統計平衡方程式を解く必要はない。
3. 吸収線は光球の中の薄い層で形成されるため、形成層の内部ではパラメータ \vec{X} は変化し

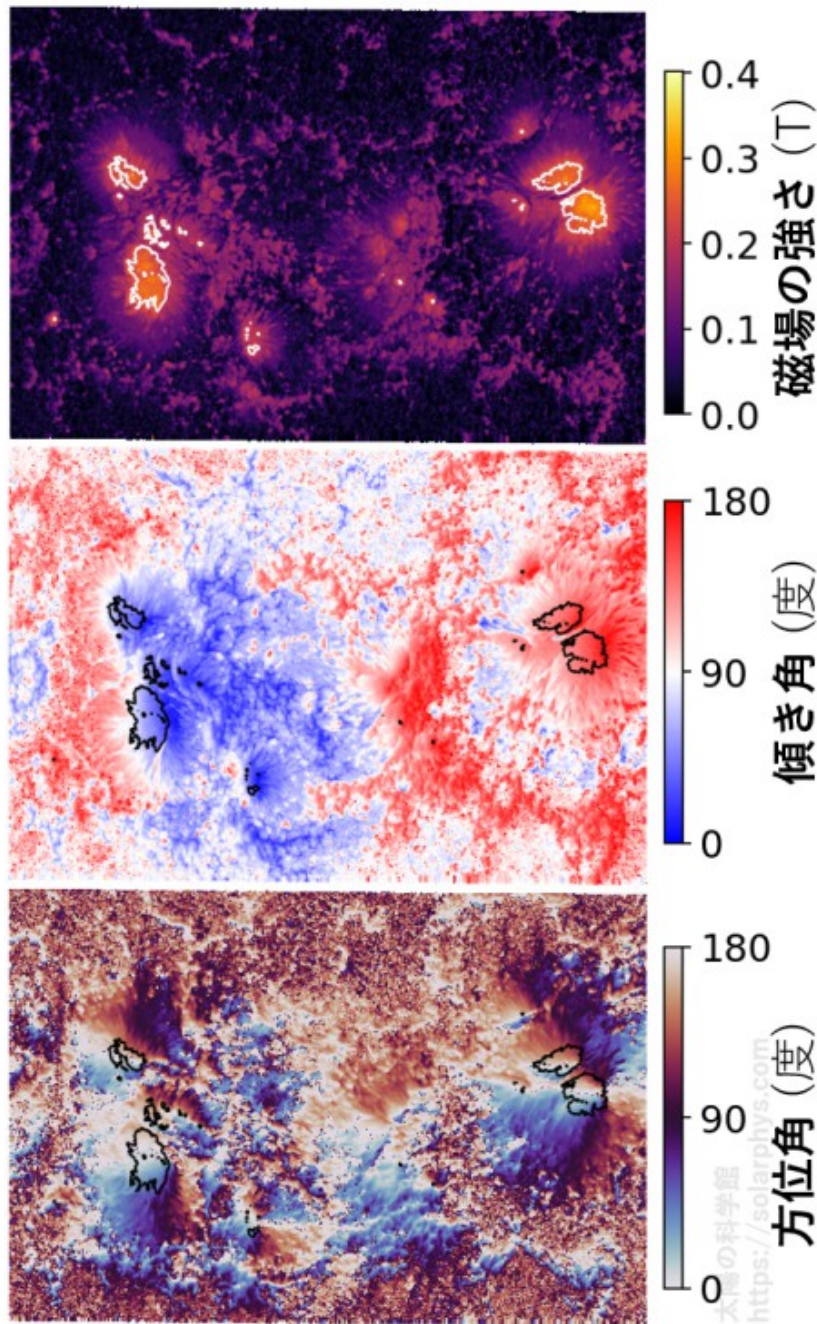


図 5.17 インバージョンによって推定された黒点の光球での磁場構造：観測された黒点は太陽円盤の左半球に位置している。つまり、黒点を右斜め上から見下ろしている。上段は磁場強度、中段は磁場の視線方向に対する角度 (傾き角)、下段は視線方向に垂直な面内の方位角 ϕ を表す。磁場の方位角が ϕ である場合と $\phi + \pi$ である場合では放射場が同じ直線偏光状態になるため、この 2 つを区別することはできない。HAO/CSAC のサイトで公開されているデータを用いた。キャリブレーションについては Lites & Ichimoto (2013) を参照。

ないとみなし、 \vec{X} を光学的深さに依らない定数として与える。

実際に観測されたストークスベクトル $\vec{I}^{\text{obs}}(\lambda_k)$ と計算された $\vec{I}^{\text{syn}}(\lambda_k, \vec{X})$ に対して

$$\chi^2 \propto \sum_{i=0}^3 \sum_{k=1}^M \left[\frac{I_i^{\text{obs}}(\lambda_k) - I_i^{\text{syn}}(\lambda_k, \vec{X})}{\sigma_{ik}} \right]^2 \quad (5.5.129)$$

を計算する。ただし、 I_0, I_1, I_2, I_3 はそれぞれ I, Q, U, V を表す。 σ_{ik} は i 番目のストークスパラメータの観測の不確かさである。 M は観測した波長のビン数である。 χ^2 は観測結果と計算結果の間の誤差を意味する。 χ^2 を最小にするようなパラメータの組 \vec{X} を探す。見つければ、その \vec{X} 中の B が磁場の推定値である。求まった磁場は吸収線が形成される層での平均値と解釈できる。

説明したようなインバージョンによる磁場推定に関する問題は次のように整理できる。

- χ^2 を最小化するアルゴリズムについて、高速化が求められる。
- 上述の仮定 1 に関連して、乱流による効果をどのようにモデル化するか。
- 上述の仮定 2 に関連して、例えば彩層で形成される吸収線を用いて彩層の磁場を調べたい場合には、局所熱平衡からのずれが重要になってくるため、統計平衡方程式も解く必要が出てくる。
- 上述の仮定 3 を課さない場合、パラメータ \vec{X} は光学的深さ τ の関数として与えることになる。
- 磁場の視線方向に垂直な面内の方位角を ϕ としたとき、伝搬行列の成分は

$$\eta_Q \propto \cos(2\phi), \quad \eta_U \propto \sin(2\phi) \quad (5.5.130)$$

という依存性を持つ。よって、磁場の方位角が ϕ である場合と $\phi + \pi$ である場合は同じ Q, U 値になるので、この 2 つの場合をインバージョンによって区別することはできない。他の考察によって区別する必要がある。この問題は方位角の両義性 (azimuthal ambiguity) と呼ばれる。

ハンレ効果

磁場の存在によって分裂した吸収線がそれぞれに偏光している現象 (ゼーマン効果) を観測することによって、磁場の情報を得ることができると述べてきた。しかし、磁場が弱い場合や吸収線が形成される領域が高温の場合は、ゼーマン分裂幅よりドップラー幅の方が大きくなり、分裂した吸収線の線輪郭は重なる。分裂した各吸収線が互いに直交する偏光状態にあった場合は、互いの偏光状態が非コヒーレントに重なることで相殺し、観測される光は無偏光に近い状態になってしまう。このため、ゼーマン効果は弱い磁場に対しては感度がない。例えば、先ほども考えた鉄原子 (原子量 56 程度) の 630.25 nm の吸収線 (ランデ因子 2.5) を考え、形成高度の温

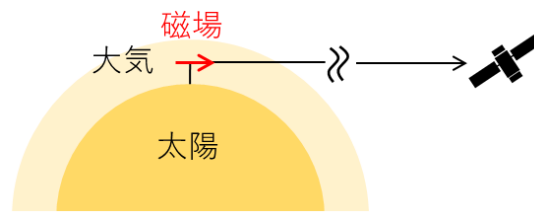


図 5.18 太陽の縁を観測したときの位置関係の模式図

度は 1 万度として、ゼーマン分裂幅とドップラー幅が等しいという立式をすると、

$$B \sim 0.08 \text{ T} \quad (5.5.131)$$

という結果を得る。つまり、この吸収線を用いたゼーマン効果による推定は、0.08 T 程度かそれ以上の強さの磁場にしか感度がない。このように、ゼーマン効果を用いた方法では黒点の光球での磁場のような強い磁場しか調べることができない場合が多い。彩層の磁場などの $10^{-4} \sim 10^{-2} \text{ T}$ のオーダーの磁場を調べるためには、別のメカニズムにも頼る必要がある。

例えば、太陽円盤の縁を観測する。彩層で形成される吸収線を見ると、共鳴散乱によって 90 度散乱された光を見ることになるので、この吸収線は直線偏光している (節 5.5.3 参照)。この吸収線の形成層に視線方向の磁場があったとすると (図 5.18)、ゼーマン分裂によって各 M 準位間のコヒーレンスが弱まる。ただし、量子化軸は磁場の方向に取っている。すると、 $\Delta M = +1$ の遷移と $\Delta M = -1$ の遷移によって自発放射される逆向きの円偏光が互いに打ち消し合うようになり、観測される直線偏光の偏光度は小さくなる。この偏光度の変化は M 準位間のコヒーレンスの変化に起因するものなので、自然幅に対して無視できない幅の分裂が起きれば観測される。故にこの現象はドップラー幅よりも小さい分裂しか起こさないような弱い磁場に対しても感度がある。今は一種の理想化された位置関係と磁場の向きを例に考察したが、一般に磁場が存在すると、共鳴散乱による偏光の仕方が変化する。この効果はハンレ効果と呼ばれる。上述したように、ハンレ効果は準位間のコヒーレンスの変化に起因するので、この効果をインバージョンに組み込むためには統計平衡方程式も解く必要がある。

上述したように、ハンレ効果はゼーマン効果よりも弱い磁場に感度がある。ハンレ効果とゼーマン効果の有用性の違いは他にもある。例えば、光球の静穏領域 (黒点のような強い磁場が無い領域) におけるネットワーク間磁場 (internetwork field) と呼ばれる種類の弱く (10 mT 程度)、空間的に細かい構造をした磁場を測定したい場合、観測機器の分解能が問題になる。ゼーマン効果を用いた観測では、磁場が分解できていない細かい空間スケールの構造を持っていた際に、観測結果の解釈が難しくなる。異なる極性の磁場が作り出す逆符号のストークスパラメータが相殺し、シグナルが弱く観測されたり、図 5.16 よりも複雑な線輪郭のスペクトルが観測されることがある。そのような観測結果をどのように解釈するのかは、研究者の間で論争が起きてきた。例えば Sr の 460.7 nm 線は光球で形成され、共鳴散乱を起こす。このような吸収線を用い

ることで、光球磁場のハンレ効果を用いた観測が行える。ハンレ効果はゼーマン効果とは違い、磁場の極性に依らず直線偏光度が減少する。ただし、鉛直磁場に感度が無いという弱点もある。このように、ハンレ効果とゼーマン効果は互いに互いの弱点を補うような関係にあり、ゼーマン効果の観測だけでは分からなかった知見がハンレ効果の観測から得られることがある。光球の弱磁場観測の歴史と成果について詳しくは Bellot Rubio & Orozco Suárez (2019) にまとまっている。

この節、すなわち偏光の観測から光球や彩層などの磁場を推定する手法について詳しく知りたい方は、例えば del Toro Iniesta & Ruiz Cobo (2016), de la Cruz Rodríguez & van Noort (2017) を読むと良い。また、ハンレ効果のように、特に彩層上部やコロナにおいて偏光が生じる仕組みについてのレビューには、Trujillo Bueno et al. (2017), Raouafi et al. (2016) がある。電波観測も含め、コロナの磁場を推定する手法については Casini et al. (2017) にまとめられている。

付録 5.A 解析力学の基礎知識

ニュートン力学の範疇で物体の運動を記述するにはまず、ニュートンの運動法則から出発するが、作用というものを考えることから出発するという定式化もできる。これは解析力学と呼ばれる。解析力学の手法を用いれば、運動を実空間での座標に囚われずに一般的に取り扱える。また、次の付録で説明する量子力学の定式化の土台となるので、そのための必要最小限の知識をここでまとめておく。

この付録の前半は主に須藤靖 (2008), ランダウ & リフシッツ (1973) を参考にし、電磁場の節についてはサクライ (1967), Grynberg et al. (2010) も参考にした。

5.A.1 最小作用の原理

ある力学系を考えると、その力学系を特徴づけるものとしてラグランジアンと呼ばれる関数を考えることができる。例えばポテンシャル $V(x)$ の中で 1 次元的に運動する質点 1 つを考える場合、ラグランジアンは次のように、質点 m の位置 x と速度 $\dot{x} = dx/dt$ の関数として書ける。

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) \quad (5.A.1)$$

あるいは長さ l の紐につながれた質量 M の重りからなる振り子の運動を考えると、紐に張力が働いている限りにおいて、振り子の振れ角 θ とその時間微分 $\dot{\theta}$ の関数として

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2 - Mgl(1 - \cos \theta) \quad (5.A.2)$$

と書ける。ラグランジアンは解析力学的に運動を考える場合の出発点なので、他の理論から導き出されるものではなく、考える系についての巧みな考察から、実験結果との照合を経て考え出されるものであるが、上記の 2 例のように系全体の運動エネルギーからポテンシャルエネルギーを引いたものとして表される。一般の力学系でのラグランジアンは何かしらの座標値 q_1, q_2, \dots とその時間微分 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots$ 、時刻 t の関数 $L(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, t)$ として表される。

ある座標 q を考えているときに、ニュートン力学を用いて我々が知りたいのは q の時間変化、すなわち関数 $q(t)$ の形である。いま、適当な $q(t)$ の形を考えると、ラグランジアンは q, \dot{q} を介して t の関数になるので、次の量を考えることができる。

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (5.A.3)$$

この I を作用と言う。ここで関数 $q(t), \dot{q}(t)$ の形を、微小な関数 $\delta q(t), \delta \dot{q}(t) = d\delta q/dt$ の分だけ

$$q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t), \quad \dot{q}(t) \rightarrow \dot{q}(t) + \delta \dot{q}(t) \quad (5.A.4)$$

と変化させると、一般にはそれに伴って作用の値も微小量 δI だけ変化する。ただし端点は固定して ($\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0, \delta \dot{q}(t_0) = \delta \dot{q}(t_1) = 0$) 考える。しかし、 I が $q(t), \dot{q}(t)$ の関数形の変化に対して極大か極小になっている場合には、 δI は ($\delta q, \delta \dot{q}$ の 1 次のオーダーで) ゼロになる。 I が停留値をとるような $q(t), \dot{q}(t)$ の関数形が実現される関数形である、というのが解析力学の原理である。最小作用の原理と呼ばれる。実際に一般的な場合について停留条件を計算してみる。

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \{L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)\} dt \quad (5.A.5)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \quad (5.A.6)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right\} \delta q dt \quad (5.A.7)$$

2 段目から 3 段目の変形では第 2 項を部分積分した。これより、停留条件は

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (5.A.8)$$

という条件に置き換えられることが分かる。もっと一般に $L(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, t)$ のときは、各 q_i を独立して変化させて考えると、各 i について

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (5.A.9)$$

となる。これはラグランジュの運動方程式と呼ばれる。例えば上記の振り子の例でラグランジアンをこの式 (この場合 $q = \theta, \dot{q} = \dot{\theta}$) に代入して計算すると、 θ についての微分方程式

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (5.A.10)$$

が出てくる。あとはこの微分方程式を適切な初期条件下で解けば、 θ の時間変化が求まる。

5.A.2 ハミルトニアンと正準方程式

前節ではラグランジュ形式での定式化を説明したが、ハミルトンの正準形式と呼ばれる定式化の方法もある。系のラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ が与えられているときに、

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (5.A.11)$$

を一般座標 q に共役な一般運動量と言う。例えば前節の質点の例では $p_x = m\dot{x}$ 、振り子の例では $p_\theta = Ml^2\dot{\theta}$ である。更に、一般運動量とラグランジアンを用いて定義される

$$H(q, p, t) = \dot{q}p - L(q, \dot{q}, t) \quad (5.A.12)$$

をハミルトニアンと言う。 \dot{q} を消去して q, p の関数として表すことに注意して欲しい。ハミルトニアンを用いると運動方程式は

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (5.A.13)$$

と表される。これは正準方程式と呼ばれる。また、正準方程式に現れる変数 q, p を正準変数と呼ぶ。例えば前節の質点の例でポテンシャルが

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2 \quad (5.A.14)$$

と表される系を考える。このような系は調和振動子と呼ばれる。例えば、ばねにつながれた重りの運動が調和振動子になる。このとき、ハミルトニアンは

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \quad (5.A.15)$$

となり、正準方程式より

$$\dot{x} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -m\omega^2x \quad (5.A.16)$$

という関係が出てくる。ここから p を消去すると

$$m\ddot{x} = -m\omega^2x \quad (5.A.17)$$

となる。これは、 x に比例する復元力による運動を表すニュートンの運動方程式である。

5.A.3 荷電粒子のハミルトニアン

電磁場がベクトルポテンシャル \mathbf{A} によって

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (5.A.18)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.A.19)$$

と与えられる場合の、非相対論的速さの粒子についてのラグランジアンは次のように書ける。

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_k^2 + e\dot{x}_k A_k \quad (5.A.20)$$

ただし、 e は粒子の電荷であり、電子の場合は負の値をとるような定義である。実際にラグランジュの運動方程式に代入すると、

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \quad (5.A.21)$$

$$0 = e\dot{x}_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} (m\dot{x}_i + eA_i) \quad (5.A.22)$$

$$m\ddot{x}_i = e \left(-\frac{dA_i}{dt} + \dot{x}_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \right) \quad (5.A.23)$$

$$m\ddot{x}_i = e \left(-\frac{\partial A_i}{\partial t} - \dot{x}_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k} + \dot{x}_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \right) \quad (5.A.24)$$

と計算できる^{†66}。ここで、 $\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}$ が

$$\varepsilon_{ijk} \dot{x}_j B_k = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \dot{x}_j \frac{\partial A_m}{\partial x_l} \quad (5.A.25)$$

$$= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \dot{x}_j \frac{\partial A_m}{\partial x_l} \quad (5.A.26)$$

$$= \dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \dot{x}_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \quad (5.A.27)$$

と変形できること^{†67}を考慮すると、式 (5.A.24) はローレンツ力が働く荷電粒子の運動方程式であることが確認できる。

x_i に共役な一般運動量は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \quad (5.A.28)$$

$$= m\dot{x}_i + eA_i \quad (5.A.29)$$

なので、ハミルトニアンは

$$H = p_i \dot{x}_i - L \quad (5.A.30)$$

$$= \frac{1}{2m} (p_i - eA_i)^2 \quad (5.A.31)$$

と書ける。

^{†66} この式における dA_i/dt は粒子が感じる時間変化という意味なので、4 段目のように変形できる。

^{†67} 今考えている \dot{x}_i は場の量ではなく粒子の速度なので、この変形はベクトル解析の公式とは意味合いが異なる。

5.A.4 電磁場の正準形式

付録 5.B.10 で放射場の量子化を考えるとこのために、電磁場が満たす正準形式の方程式を見つけておく。本節ではまず、電荷密度と電流密度が存在しない系を考える。次節で荷電粒子との共存系の場合に議論を拡張する。

放射ゲージでのベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ と電場 \mathbf{E} の時間発展方程式は次のように表される (付録 2.A.1 参照)。

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{E} \tag{5.A.32}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -c^2 \nabla^2 \mathbf{A} \tag{5.A.33}$$

\mathbf{A}, \mathbf{E} を一辺 L 、体積 $V = L^3$ の立方体領域の中で考える。境界条件に周期的境界条件

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L} n_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{L} n_z; \quad n_x, n_y, n_z \text{ は整数} \tag{5.A.34}$$

を課すと、境界条件を満たす固有モード

$$\mathbf{u}_{k,\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \mathbf{e}_{k,\alpha} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \tag{5.A.35}$$

だけが存在を許される。ただし、 $\mathbf{e}_{k,\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$) は境界条件を満たす波数ベクトル $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ が与えられたときに、それに垂直な向き

$$\mathbf{e}_{k,1} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{e}_{k,2} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{e}_{k,1} \cdot \mathbf{e}_{k,2} = 0 \tag{5.A.36}$$

を向く実単位ベクトルであり、偏極ベクトルと呼ばれる。 \mathbf{A}, \mathbf{E} がどちらも横波であることが取り込まれている。 $\mathbf{e}_{k,1}, \mathbf{e}_{k,2}, \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ の順に右手系になるような向きにとる。また、固有モードが正規直交関係

$$\int_V (\mathbf{u}_{k,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{k',\alpha'}^*) dV = \delta_{kk'} \delta_{\alpha\alpha'} \tag{5.A.37}$$

を満たすように係数 $1/\sqrt{V}$ を付けた。 $\mathbf{u}_{k,\alpha}^*$ は $\mathbf{u}_{k,\alpha}$ の複素共役を表す。また、 $\delta_{kk'} = \delta_{k_x, k'_x} \delta_{k_y, k'_y} \delta_{k_z, k'_z}$ と書く。 \mathbf{k} が反対の向きの際の偏極ベクトル $\mathbf{e}_{-\mathbf{k},\alpha}$ を

$$\mathbf{e}_{-\mathbf{k},1} = \mathbf{e}_{\mathbf{k},2}, \quad \mathbf{e}_{-\mathbf{k},2} = \mathbf{e}_{\mathbf{k},1} \tag{5.A.38}$$

を満たすようにとることにすると、例えば $\mathbf{u}_{-\mathbf{k},1}^* = \mathbf{u}_{\mathbf{k},2}$ などの関係があるので、

$$\int_V (\mathbf{u}_{k,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{k',\alpha'}^*) dV = \delta_{k,-k'} \delta_{\alpha\alpha'} \tag{5.A.39}$$

$$\int_V (\mathbf{u}_{k,\alpha}^* \cdot \mathbf{u}_{k',\alpha'}) dV = \delta_{k,-k'} \delta_{\alpha\alpha'} \tag{5.A.40}$$

という関係もあることが分かる。ただし $\bar{\alpha}$ は、 $\alpha = 1$ のとき $\bar{\alpha} = 2$ というように、 α とは逆の値の意味で用いる。 \mathbf{A} , \mathbf{E} はこれらの固有モードの重ね合わせとして

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} \tilde{A}_{k,\alpha}(t) \mathbf{u}_{k,\alpha}(\mathbf{x}) \quad (5.A.41)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} \tilde{E}_{k,\alpha}(t) \mathbf{u}_{k,\alpha}(\mathbf{x}) \quad (5.A.42)$$

と展開できる。ただし、 \mathbf{A} , \mathbf{E} は実数の値を取るという条件から

$$\tilde{A}_{k,\alpha}^* = \tilde{A}_{-k,\bar{\alpha}}, \quad \tilde{E}_{k,\alpha}^* = \tilde{E}_{-k,\bar{\alpha}} \quad (5.A.43)$$

が成り立つ必要がある^{†68}。

式 (5.A.32), (5.A.33) が各モードについて成り立つことから、

$$\frac{d\tilde{A}_{k,\alpha}}{dt} = -\tilde{E}_{k,\alpha} \quad (5.A.44)$$

$$\frac{d\tilde{E}_{k,\alpha}}{dt} = \omega_k^2 \tilde{A}_{k,\alpha} \quad (5.A.45)$$

$$\text{ただし, } \omega_k = c|\mathbf{k}| \quad (5.A.46)$$

という式を得る。ここで、次の新たな変数を導入する。

$$c_{k,\alpha} = \frac{1}{2} \left(\tilde{A}_{k,\alpha} - \frac{i}{\omega_k} \tilde{E}_{k,\alpha} \right) \quad (5.A.47)$$

$$d_{k,\alpha} = \frac{1}{2} \left(\tilde{A}_{k,\alpha} + \frac{i}{\omega_k} \tilde{E}_{k,\alpha} \right) \quad (5.A.48)$$

逆に表すと、

$$\tilde{A}_{k,\alpha} = c_{k,\alpha} + d_{k,\alpha} \quad (5.A.49)$$

$$\tilde{E}_{k,\alpha} = i\omega_k(c_{k,\alpha} - d_{k,\alpha}) \quad (5.A.50)$$

である。条件 (5.A.43) より、 $c_{k,\alpha}$, $d_{k,\alpha}$ は次の条件を満たさねばならないことが分かる。

$$c_{k,\alpha}^* = d_{-k,\bar{\alpha}}, \quad d_{k,\alpha}^* = c_{-k,\bar{\alpha}} \quad (5.A.51)$$

つまり、 $c_{k,\alpha}$ と $d_{-k,\bar{\alpha}}$ は非独立であり、全ての (\mathbf{k}, α) についての $c_{k,\alpha}$ の時間発展だけを追えば、 $d_{k,\alpha}$ は上式より求まる。 $c_{k,\alpha}$ を用いると、時間発展方程式 (5.A.44), (5.A.45) は次のように書き換えられる。

$$\frac{dc_{k,\alpha}}{dt} + i\omega_k c_{k,\alpha} = 0 \quad (5.A.52)$$

^{†68} 実際に $\tilde{A}_{k,\alpha}$ や $\tilde{E}_{k,\alpha}$ を実部と虚部に分けて書き、 $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ もオイラーの公式より \cos と \sin に分解し、展開式の $\sum_{k,\alpha}$ の中に現れる各 (\mathbf{k}, α) についての $\tilde{A}_{k,\alpha} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \tilde{A}_{-k,\bar{\alpha}} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ の項がゼロになる条件を考えると分かる。

また、 \mathbf{A} は

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} [c_{\mathbf{k},\alpha}(t) + d_{\mathbf{k},\alpha}(t)] \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}(\mathbf{x}) \quad (5.A.53)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} [c_{\mathbf{k},\alpha}(t) \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}(\mathbf{x}) + c_{-\mathbf{k},\bar{\alpha}}^*(t) \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}(\mathbf{x})] \quad (5.A.54)$$

と書き換えられる。上式は全ての (\mathbf{k}, α) について和を取っているので、第 2 項について、モード (\mathbf{k}, α) の項と $(-\mathbf{k}, \bar{\alpha})$ の項を入れ換えることで

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} [c_{\mathbf{k},\alpha}(t) \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}(\mathbf{x}) + c_{\mathbf{k},\alpha}^*(t) \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}^*(\mathbf{x})] \quad (5.A.55)$$

と書き直すことができる。

次に、電磁場のエネルギー

$$U = \int_V \left(\frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \right) dV \quad (5.A.56)$$

$$= \int_V \left(\frac{\epsilon_0}{2} \left| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\nabla \times \mathbf{A}|^2 \right) dV \quad (5.A.57)$$

を計算する。まず、

$$\int_V \left| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right|^2 dV = \sum_{\mathbf{k},\alpha} \sum_{\mathbf{k}',\alpha'} \int_V \left(\dot{c}_{\mathbf{k},\alpha} \dot{c}_{\mathbf{k}',\alpha'} \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}',\alpha'} + \dot{c}_{\mathbf{k},\alpha}^* \dot{c}_{\mathbf{k}',\alpha'}^* \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}^* \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}',\alpha'}^* \right. \\ \left. + \dot{c}_{\mathbf{k},\alpha} \dot{c}_{\mathbf{k}',\alpha'}^* \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}',\alpha'}^* + \dot{c}_{\mathbf{k},\alpha}^* \dot{c}_{\mathbf{k}',\alpha'} \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}^* \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}',\alpha'} \right) dV \quad (5.A.58)$$

$$= \sum_{\mathbf{k},\alpha} \left(-\omega_{\mathbf{k}}^2 c_{\mathbf{k},\alpha} c_{-\mathbf{k},\bar{\alpha}} - \omega_{\mathbf{k}}^2 c_{\mathbf{k},\alpha}^* c_{-\mathbf{k},\bar{\alpha}}^* + 2\omega_{\mathbf{k}}^2 c_{\mathbf{k},\alpha} c_{\mathbf{k},\alpha}^* \right) \quad (5.A.59)$$

となる。ただし、式 (5.A.37), (5.A.39), (5.A.40) の関係を用いた。一方で、 $|\nabla \times \mathbf{A}|^2$ の項を計算するには

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}',\alpha'}^*) dV \\ = \int_V \nabla \cdot [\mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha} \times (\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}',\alpha'}^*)] dV + \int_V \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}',\alpha'}^*)] dV \quad (5.A.60)$$

$$= - \int_V \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha} \nabla^2 \mathbf{u}_{\mathbf{k}',\alpha'}^* dV \quad (5.A.61)$$

$$= |\mathbf{k}'|^2 \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\alpha\alpha'} \quad (5.A.62)$$

という関係が有用である。ただし、ベクトル解析の公式と、周期的境界条件より表面積分項がゼロになること、横波なので $\nabla \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}',\alpha'}^* = 0$ であること、および式 (5.A.37) の関係を用いた。ま

た同様にして、

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{u}_{k,\alpha}) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_{k',\alpha'}) dV = |\mathbf{k}'|^2 \delta_{k,-k'} \delta_{\alpha\alpha'} \quad (5.A.63)$$

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{u}_{k,\alpha}^*) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_{k',\alpha'}^*) dV = |\mathbf{k}'|^2 \delta_{k,-k'} \delta_{\alpha\alpha'} \quad (5.A.64)$$

という関係も分かる。これらを用いると、

$$\begin{aligned} \int_V |\nabla \times \mathbf{A}|^2 dV &= \sum_{\mathbf{k},\alpha} \sum_{\mathbf{k}',\alpha'} \left[c_{k,\alpha} c_{k',\alpha'} \int_V (\nabla \times \mathbf{u}_{k,\alpha}) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_{k',\alpha'}) dV \right. \\ &\quad + c_{k,\alpha}^* c_{k',\alpha'}^* \int_V (\nabla \times \mathbf{u}_{k,\alpha}^*) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_{k',\alpha'}^*) dV \\ &\quad + c_{k,\alpha} c_{k',\alpha'}^* \int_V (\nabla \times \mathbf{u}_{k,\alpha}) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_{k',\alpha'}^*) dV \\ &\quad \left. + c_{k,\alpha}^* c_{k',\alpha'} \int_V (\nabla \times \mathbf{u}_{k,\alpha}^*) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_{k',\alpha'}) dV \right] \quad (5.A.65) \end{aligned}$$

$$= \sum_{\mathbf{k},\alpha} (|\mathbf{k}|^2 c_{k,\alpha} c_{-k,\bar{\alpha}} + |\mathbf{k}|^2 c_{k,\alpha}^* c_{-k,\bar{\alpha}}^* + 2|\mathbf{k}|^2 c_{k,\alpha} c_{k,\alpha}^*) \quad (5.A.66)$$

と計算できる。よって、

$$U = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} 2\epsilon_0 \omega_k^2 |c_{k,\alpha}|^2 \quad (5.A.67)$$

となる。 $c_{k,\alpha}$ は時間に依存した量であるが、 $|c_{k,\alpha}|^2$ は時間に依存しないので、 U は時間に依存しない量であることに留意されたい。ここで、

$$Q_{k,\alpha} = \sqrt{\epsilon_0} (c_{k,\alpha} + c_{k,\alpha}^*) \quad (5.A.68)$$

$$P_{k,\alpha} = -i\sqrt{\epsilon_0} \omega_k (c_{k,\alpha} - c_{k,\alpha}^*) \quad (5.A.69)$$

という実変数を導入する。逆に表すと、

$$c_{k,\alpha} = \frac{Q_{k,\alpha}}{2\sqrt{\epsilon_0}} + \frac{iP_{k,\alpha}}{2\sqrt{\epsilon_0}\omega_k}, \quad c_{k,\alpha}^* = \frac{Q_{k,\alpha}}{2\sqrt{\epsilon_0}} - \frac{iP_{k,\alpha}}{2\sqrt{\epsilon_0}\omega_k} \quad (5.A.70)$$

である。電磁場のエネルギーは $Q_{k,\alpha}, P_{k,\alpha}$ を用いると、

$$U = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} \frac{1}{2} (P_{k,\alpha}^2 + \omega_k^2 Q_{k,\alpha}^2) \quad (5.A.71)$$

というように、調和振動子のハミルトニアンと同じ形式で書ける。正準方程式

$$\dot{Q}_{k,\alpha} = \frac{\partial U}{\partial P_{k,\alpha}}, \quad \dot{P}_{k,\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial Q_{k,\alpha}} \quad (5.A.72)$$

を調べると式 (5.A.52) が出てくる。つまり、式 (5.A.71) の形式で書かれた U は自由電磁場のハミルトニアンであり、式 (5.A.68), (5.A.69) で導入した変数 ($Q_{k,\alpha}, P_{k,\alpha}$) の組は正準変数であることが言える。

付録 5.B.10 の為に、電磁場の運動量も展開係数 $c_{k,\alpha}$ で表しておく。運動量は

$$\mathbf{P} = \int_V \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV \quad (5.A.73)$$

$$= -\epsilon_0 \int_V \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \times (\nabla \times \mathbf{A}) dV \quad (5.A.74)$$

$$= -\epsilon_0 \sum_{\mathbf{k},\alpha} \sum_{\mathbf{k}',\alpha'} \omega \left[c_{k,\alpha} c_{k',\alpha'} \int_V \mathbf{u}_{k,\alpha} \times (\mathbf{k}' \times \mathbf{u}_{k',\alpha'}) dV \right. \\ \left. + c_{k,\alpha}^* c_{k',\alpha'}^* \int_V \mathbf{u}_{k,\alpha}^* \times (\mathbf{k}' \times \mathbf{u}_{k',\alpha'}^*) dV \right. \\ \left. - c_{k,\alpha}^* c_{k',\alpha'} \int_V \mathbf{u}_{k,\alpha}^* \times (\mathbf{k}' \times \mathbf{u}_{k',\alpha'}) dV \right. \\ \left. - c_{k,\alpha} c_{k',\alpha'}^* \int_V \mathbf{u}_{k,\alpha} \times (\mathbf{k}' \times \mathbf{u}_{k',\alpha'}^*) dV \right] \quad (5.A.75)$$

と展開できる。ここで、

$$\int_V \mathbf{u}_{k,\alpha} \times (\mathbf{k}' \times \mathbf{u}_{k',\alpha'}) dV = \int_V \mathbf{u}_{k,\alpha}^* \times (\mathbf{k}' \times \mathbf{u}_{k',\alpha'}^*) dV = -\mathbf{k} \delta_{k,-k'} \delta_{\alpha\bar{\alpha}'} \quad (5.A.76)$$

$$\int_V \mathbf{u}_{k,\alpha}^* \times (\mathbf{k}' \times \mathbf{u}_{k',\alpha'}) dV = \int_V \mathbf{u}_{k,\alpha} \times (\mathbf{k}' \times \mathbf{u}_{k',\alpha'}^*) dV = \mathbf{k} \delta_{kk'} \delta_{\alpha\alpha'} \quad (5.A.77)$$

という性質を用いれば、

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k},\alpha} \epsilon_0 \omega \mathbf{k} (c_{k,\alpha} c_{-k,\bar{\alpha}} + c_{k,\alpha}^* c_{-k,\bar{\alpha}}^* + 2|c_{k,\alpha}|^2) \quad (5.A.78)$$

と計算できる。上式の第 1,2 項は全ての (\mathbf{k}, α) について和を取ると相殺して寄与がゼロになるため、

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k},\alpha} 2\epsilon_0 \omega \mathbf{k} |c_{k,\alpha}|^2 \quad (5.A.79)$$

と書ける。

電磁場の角運動量は

$$\mathbf{J} = \epsilon_0 \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV \quad (5.A.80)$$

$$= -\epsilon_0 \int_V \mathbf{r} \times \left[\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] dV \quad (5.A.81)$$

と定義される。被積分関数はベクトル解析の公式を用いると分解でき、

$$J_i = -\epsilon_0 \int_V \left[\frac{\partial A_l}{\partial t} \epsilon_{ijm} x_j \frac{\partial A_l}{\partial x_m} + \epsilon_{ijl} \frac{\partial A_j}{\partial t} A_l - \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial A_l}{\partial t} \epsilon_{ijm} x_j A_m \right) \right] dV \quad (5.A.82)$$

となる。第 3 項はガウスの定理より表面積分に変わり、境界で \mathbf{A} がゼロとみなせるくらい領域 V を大きく取れば消える。第 1 項を J_i^O 、第 2 項を J_i^S と書くことにする。付録 5.B.10 の為に、 \mathbf{J}^S を展開係数で表しておく。

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^S = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \sum_{\mathbf{k}', \alpha'} i\epsilon_0 \omega \left[c_{\mathbf{k}, \alpha} c_{\mathbf{k}', \alpha'} \int_V (\mathbf{u}_{\mathbf{k}, \alpha} \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}', \alpha'}) dV \right. \\ \left. - c_{\mathbf{k}, \alpha}^* c_{\mathbf{k}', \alpha'}^* \int_V (\mathbf{u}_{\mathbf{k}, \alpha}^* \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}', \alpha'}^*) dV \right. \\ \left. - c_{\mathbf{k}, \alpha}^* c_{\mathbf{k}', \alpha'} \int_V (\mathbf{u}_{\mathbf{k}, \alpha}^* \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}', \alpha'}) dV \right. \\ \left. + c_{\mathbf{k}, \alpha} c_{\mathbf{k}', \alpha'}^* \int_V (\mathbf{u}_{\mathbf{k}, \alpha} \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}', \alpha'}^*) dV \right] \end{aligned} \quad (5.A.83)$$

と展開できる。

$$\int_V (\mathbf{u}_{\mathbf{k}, \alpha} \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}', \alpha'}) dV = \int_V (\mathbf{u}_{\mathbf{k}, \alpha}^* \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}', \alpha'}^*) dV = (-1)^{\alpha+1} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} \delta_{\alpha\alpha'} \quad (5.A.84)$$

$$\int_V (\mathbf{u}_{\mathbf{k}, \alpha}^* \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}', \alpha'}) dV = \int_V (\mathbf{u}_{\mathbf{k}, \alpha} \times \mathbf{u}_{\mathbf{k}', \alpha'}^*) dV = (-1)^{\alpha+1} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\alpha\bar{\alpha}'} \quad (5.A.85)$$

という性質を用いれば、

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^S = \sum_{\mathbf{k}} i\epsilon_0 \omega \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} (c_{\mathbf{k}, 1} c_{-\mathbf{k}, 1} - c_{\mathbf{k}, 1}^* c_{-\mathbf{k}, 1}^* - c_{\mathbf{k}, 2} c_{-\mathbf{k}, 2} + c_{\mathbf{k}, 2}^* c_{-\mathbf{k}, 2}^* \\ - 2c_{\mathbf{k}, 1}^* c_{\mathbf{k}, 2} + 2c_{\mathbf{k}, 1} c_{\mathbf{k}, 2}^*) \end{aligned} \quad (5.A.86)$$

と計算できる。全ての \mathbf{k} について和を取ると、下線を引いた項の寄与のみが残るため、

$$\mathbf{J}^S = \sum_{\mathbf{k}} 2i\epsilon_0 \omega \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} (c_{\mathbf{k}, 1} c_{\mathbf{k}, 2}^* - c_{\mathbf{k}, 1}^* c_{\mathbf{k}, 2}) \quad (5.A.87)$$

と書ける。

5.A.5 荷電粒子と放射場の共存系

前節では放射ゲージを用いて、電荷密度と電流密度が存在しない場合の電磁場 (自由電磁場) の正準形式を見つけた。本節では、電子や原子などの荷電粒子系と電磁場が共存する系における正準変数とハミルトニアンについて説明する。この場合、付録 2.A.8 で説明したクーロンゲージが用いられる。つまり本節の目的は、正準方程式に代入すると付録 2.A.8 で説明したマクス

ウェル-ローレンツ方程式系

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\mathbf{E}_\perp(\mathbf{x}, t) \quad (5.A.88)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_\perp(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -c^2 \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{j}_\perp(\mathbf{x}, t) \quad (5.A.89)$$

$$m_n \ddot{\mathbf{r}}_n(t) = \sum_{n \text{ 以外の } m} \frac{e_n e_m}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_n(t) - \mathbf{r}_m(t)}{|\mathbf{r}_n(t) - \mathbf{r}_m(t)|^3} - e_n \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}_n(t), t)}{\partial t} + e_n \dot{\mathbf{r}}_n(t) \times [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_n(t), t)] \quad (5.A.90)$$

$$\text{ただし, } \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (5.A.91)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \sum_n e_n \dot{\mathbf{r}}_n(t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{r}_n(t)) \quad (5.A.92)$$

$$\mathbf{j}_\perp \text{ は } \mathbf{j} \text{ の横成分 } (\nabla \cdot \mathbf{j}_\perp = 0) \quad (5.A.93)$$

を与えるようなハミルトニアン H と正準変数の組 (q_i, p_i) を見つけることである。

この場合も、前節と同じように $\mathbf{A}, \mathbf{E}_\perp$ を展開し、その展開係数に対して変数 $c_{k,\alpha}, d_{k,\alpha}$ を導入する。ただし、共存系の場合は式 (5.A.88), (5.A.89) より、各モード (\mathbf{k}, α) について

$$\frac{d\tilde{A}_{k,\alpha}}{dt} = -\tilde{E}_{k,\alpha} \quad (5.A.94)$$

$$\frac{d\tilde{E}_{k,\alpha}}{dt} = -\omega_k \tilde{A}_{k,\alpha} - \frac{1}{\epsilon_0} \tilde{j}_{k,\alpha} \quad (5.A.95)$$

$$\text{ただし, } \omega_k = c|\mathbf{k}| \quad (5.A.96)$$

という式を得る。 $\tilde{j}_{k,\alpha}$ は \mathbf{j}_\perp の展開係数である^{†69}。 $c_{k,\alpha}$ についての時間発展方程式は

$$\frac{dc_{k,\alpha}}{dt} + i\omega_k c_{k,\alpha} = \frac{i}{2\epsilon_0\omega_k} \tilde{j}_{k,\alpha} \quad (5.A.97)$$

というように、前節の方程式 (5.A.52) に電流密度の横成分による項が加わった形になる。

$$\int_V (\mathbf{u}_{k,\alpha}^* \cdot \mathbf{j}) dV = \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\alpha'} \tilde{j}_{k',\alpha'} \int_V (\mathbf{u}_{k,\alpha}^* \cdot \mathbf{u}_{k',\alpha'}) dV \quad (5.A.98)$$

$$= \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\alpha'} \tilde{j}_{k',\alpha'} \delta_{kk'} \delta_{\alpha\alpha'} \quad (5.A.99)$$

$$= \tilde{j}_{k,\alpha} \quad (5.A.100)$$

という関係と式 (5.A.92) より、

$$\tilde{j}_{k,\alpha} = \sum_n e_n \dot{\mathbf{r}}_n \cdot \mathbf{u}_{k,\alpha}^*(\mathbf{r}_n) \quad (5.A.101)$$

^{†69} \mathbf{j}_\perp も $\nabla \cdot \mathbf{j}_\perp = 0$ を満たすため、 \mathbf{A}, \mathbf{E} と同様に伝搬方向に垂直な基底 $\mathbf{u}_{k,\alpha}$ で展開できる。

と計算できる。更に、 $Q_{k,\alpha}, P_{k,\alpha}$ も $c_{k,\alpha}$ に対して前節と同じように導入する。

先に結論を述べると、荷電粒子と電磁場を併せた全系のハミルトニアンは次のように書ける。

$$H = H_{\text{kin}} + V_{\text{coul}} + H_{\text{rad}} \quad (5.A.102)$$

$$H_{\text{kin}} = \sum_n \frac{1}{2m_n} [\mathbf{p}_n - e_n \mathbf{A}(\mathbf{r}_n, t)]^2 \quad (5.A.103)$$

$$V_{\text{coul}} = \sum_n \sum_{m>n} \frac{e_n e_m}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|} \quad (5.A.104)$$

$$H_{\text{rad}} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} \frac{1}{2} (P_{k,\alpha}^2 + \omega_k^2 Q_{k,\alpha}^2) \quad (5.A.105)$$

$$\text{ただし, } \mathbf{A}(\mathbf{r}_n, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} \frac{e_{k,\alpha}}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \left[Q_{k,\alpha} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n) - \frac{P_{k,\alpha}}{\omega_k} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n) \right] \quad (5.A.106)$$

つまり、節 5.A.3 で考えた粒子のハミルトニアン H_{kin} と前節で考えた自由電磁場のハミルトニアン H_{rad} 、クーロン相互作用を表す項 V_{coul} を足し合わせたものになる。 $(\mathbf{r}_n, \mathbf{p}_n)$ の組と $(Q_{k,\alpha}, P_{k,\alpha})$ の組が共存系の場合においても正準変数となる。つまり、後に説明するが、上式のハミルトニアン H を $(\mathbf{r}_n, \mathbf{p}_n)$ について偏微分して得られる正準方程式は粒子 n の運動方程式 (5.A.90) に一致し、 $(Q_{k,\alpha}, P_{k,\alpha})$ について偏微分して得られる正準方程式は式 (5.A.97) に一致する。

このようにして荷電粒子と電磁場の共存系を、クーロン相互作用に束縛された粒子系

$$H_{\text{p}} = \sum_n \frac{\mathbf{p}_n^2}{2m_n} + V_{\text{coul}} \quad (5.A.107)$$

と放射場 H_{rad} 、両者の間の相互作用

$$H_{\text{int}} = \sum_n \left[-\frac{e_n}{m_n} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_n, t) + \frac{e_n^2}{2m_n} [\mathbf{A}(\mathbf{r}_n, t)]^2 \right] \quad (5.A.108)$$

に分けて考えることができる。付録 5.B で粒子系と放射場を量子力学的に扱う手法を説明する。節 5.3 では電子や原子による放射場の吸収、放射、散乱過程を、上述の定式化を土台として量子力学的に考察する。

以下、上述のハミルトニアンと正準変数が正しいマクスウェル-ローレンツ方程式系を与えることを確認する。まず、粒子の運動方程式を再現することを確認する。正準方程式

$$\dot{r}_{ni} = \frac{\partial H}{\partial p_{ni}} = \frac{\partial H_{\text{kin}}}{\partial p_{ni}} \quad (5.A.109)$$

を計算すると、

$$\dot{\mathbf{r}}_n = \frac{1}{m_n} [\mathbf{p}_n - e_n \mathbf{A}(\mathbf{r}_n, t)] \quad (5.A.110)$$

が出てくる。これは節 5.A.3 で導入した一般運動量の定義に一致する。一方で、正準方程式

$$\dot{p}_{ni} = -\frac{\partial H}{\partial r_{ni}} = -\frac{\partial H_{\text{kin}}}{\partial r_{ni}} - \frac{\partial V_{\text{coul}}}{\partial r_{ni}} \quad (5.A.111)$$

について、 H_{kin} の微分から出てくる項がベクトルポテンシャルによる力を受けて運動する粒子の運動方程式を再現することは節 5.A.3 で確認済みである。 V_{coul} の微分から微分から出てくる項が運動方程式 (5.A.90) の右辺第 1 項と一致することも直ぐに確認できる。

H_{kin} 中の $\mathbf{A}(\mathbf{r}_n, t)$ にも $(Q_{k,\alpha}, P_{k,\alpha})$ が含まれていることに注意して $(Q_{k,\alpha}, P_{k,\alpha})$ についての正準方程式を計算すると、

$$\dot{Q}_{k,\alpha} = P_{k,\alpha} + \sum_n \frac{e_n(\dot{\mathbf{r}}_n \cdot \mathbf{e}_{k,\alpha})}{\omega_k \sqrt{\epsilon_0 V}} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n) \quad (5.A.112)$$

$$\dot{P}_{k,\alpha} = -\omega_k^2 Q_{k,\alpha} + \sum_n \frac{e_n(\dot{\mathbf{r}}_n \cdot \mathbf{e}_{k,\alpha})}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n) \quad (5.A.113)$$

となる。ただし、式 (5.A.110) の関係を用いた。 $\dot{Q}_{k,\alpha} + i\dot{P}_{k,\alpha}/\omega_k$ を計算することで、上式を $c_{k,\alpha}$ についての時間発展方程式に変換すると、式 (5.A.97) に式 (5.A.101) を代入したものに一致する。

5.A.6 断熱不変量

節 6.1.5 で用いる概念を説明する。周期的な運動をする系があり、系の運動はあるパラメータ λ によって特徴づけられるとする。このパラメータとは、例えば振り子の例における振り子の長さ l のことを指す。簡単のために 1 次元、すなわち 1 つの一般座標 q で記述される系を考える。また、 λ が一定の場合には系は閉じていて、エネルギー E や運動の周期 $T(E)$ は保存されている^{†70}とする。 λ が

$$T \frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda \quad (5.A.114)$$

という関係を満たすようにゆっくりと時間変化する場合、エネルギー E はもはや保存しない。しかし、このような場合でも次の量は一定値に保たれる。

$$J(\lambda, E) = \oint_{H(q,p;\lambda)=E} p(q; \lambda, E) dq \quad (5.A.115)$$

^{†70} この系のハミルトニアンを $H(q, p, t)$ とすると、エネルギーの時間変化は連鎖律より

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p}$$

と書けるが、正準方程式より第 2, 3 項は相殺するので、エネルギーが保存する必要十分条件は H が t に陽に依存しないことである。

これを断熱不変量 (adiabatic invariant) と言う^{†71}。 q, p は系の一般座標とそれに共役な運動量である。与えられた定数 λ, E に対して正準方程式が解かれていれば、 p は座標 q とパラメータ λ, E の関数として表すことができるはずである。 \oint は λ が変化しないと考えた場合の周期運動の経路 1 周期分で積分するという意味である。例えば q が振り子の振れ角 θ である場合は、振り子の行きの運動量の解 $p_+(\theta; \lambda, E)$ と帰りの運動量の解 $p_-(\theta; \lambda, E)$ を用いて、

$$J(\lambda, E) = \int_{\theta_{\min}(\lambda, E)}^{\theta_{\max}(\lambda, E)} p_+(\theta; \lambda, E) d\theta + \int_{\theta_{\max}(\lambda, E)}^{\theta_{\min}(\lambda, E)} p_-(\theta; \lambda, E) d\theta \quad (5.A.116)$$

を計算する。 J が本当に保存されるのかを確かめる。

まずは、 J が λ, E の微小変化に対してどのように依存するのか、つまり $J(\lambda, E)$ の偏微分を調べておく。連鎖律より

$$dJ = \frac{\partial J}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial J}{\partial E} dE \quad (5.A.117)$$

$$= d\lambda \oint \frac{\partial p}{\partial \lambda} dq + dE \oint \frac{\partial p}{\partial E} dq \quad (5.A.118)$$

と書ける。等式

$$H[q, p(q; \lambda, E); \lambda] = E \quad (5.A.119)$$

を λ で微分すると、

$$\frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0 \quad (5.A.120)$$

と書け、正準方程式より

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (5.A.121)$$

が成り立つことを用いると、

$$\frac{\partial p}{\partial \lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{1}{\dot{q}} \quad (5.A.122)$$

という関係が分かる。与えられた λ, E に対する周期運動のパラメータとしての時刻を t' と書くと、

$$\frac{dq}{\dot{q}} = dt' \quad (5.A.123)$$

と書ける。これを考慮すると、式 (5.A.118) の第 1 項は

$$\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda} dq = - \int_0^{T(\lambda, E)} \frac{\partial H[q(t'), p(t'); \lambda]}{\partial \lambda} dt' \quad (5.A.124)$$

^{†71} この場合の「断熱」とは、「 λ の変化がゆっくりであるときの」という意味合いである。

となる。ただし、 $T(\lambda, E)$ は与えられた λ, E に対する周期運動の周期である。一方で式 (5.A.119) の両辺を E で微分して同様の考察をすると、式 (5.A.118) の第 2 項は

$$\oint \frac{\partial p}{\partial E} dq = \int_0^{T(\lambda, E)} dt' = T(\lambda, E) \quad (5.A.125)$$

となる。つまり、 J を E で偏微分すると周期になる。まとめると、

$$dJ = \left[- \int_0^{T(\lambda, E)} \frac{\partial H[q(t'), p(t'); \lambda]}{\partial \lambda} dt' \right] d\lambda + T(\lambda, E) dE \quad (5.A.126)$$

と書ける。

λ が次のように時間変化する状況を考える。

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \alpha t \quad (5.A.127)$$

$$\text{ただし, } |\alpha|T_0 \ll \lambda_0 \quad (5.A.128)$$

T_0 は λ, E が一定値 λ_0, E_0 のときの周期を表す。これは $\alpha = 0$ と置いたときの周期であるとも言える。

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} H[q(t), p(t); \lambda(t)] = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \alpha \quad (5.A.129)$$

という関係を考慮すると、 J の時間変化は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J[\lambda(t), E(t)] &= \alpha \left[- \int_0^{T(\lambda, E)} \frac{\partial H[q(t'), p(t'); \lambda]}{\partial \lambda} dt' \right]_{\lambda=\lambda(t), E=E(t)} \\ &\quad + \alpha T[\lambda(t), E(t)] \frac{\partial H[q(t), p(t); \lambda]}{\partial \lambda} \end{aligned} \quad (5.A.130)$$

となる。 dJ/dt を (ほとんど)1 周期分で平均した量

$$\overline{\frac{d}{dt} J[\lambda(t), E(t)]} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} dt \frac{d}{dt} J[\lambda(t), E(t)] \quad (5.A.131)$$

を考える。これを α で展開したときのゼロ次の項は、 $\alpha = 0$ と置いて上式を計算したものであり、式 (5.A.130) からゼロだと分かる。よって、 α について 1 次の項の係数は、式 (5.A.130) を

α で割ってから $\alpha = 0$ としたものをを用いて上式を計算した結果に等しい。計算すると、

$$\int_0^{T_0} dt \left[\frac{1}{\alpha} \frac{d}{dt} J[\lambda(t), E(t)] \right]_{\alpha=0} = \int_0^{T_0} dt \left[- \int_0^{T(\lambda, E)} \frac{\partial H[q(t'), p(t'); \lambda]}{\partial \lambda} dt' \right]_{\lambda=\lambda_0, E=E_0} + T_0 \int_0^{T_0} dt \left[\frac{\partial H[q(t), p(t); \lambda]}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_0} \quad (5.A.132)$$

$$= -T_0 \int_0^{T_0} dt' \left[\frac{\partial H[q(t'), p(t'); \lambda]}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_0} + T_0 \int_0^{T_0} dt \left[\frac{\partial H[q(t), p(t); \lambda]}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_0} \quad (5.A.133)$$

$$= 0 \quad (5.A.134)$$

となる。つまり、

$$\frac{d}{dt} J[\lambda(t), E(t)] = \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (5.A.135)$$

であることが分かる。各周期の途中の短い時間で区切ると J は変動するかもしれないが、その変動を 1 周期で平均すると、 α について 2 次以上の微小量になる。このことを指して J が断熱不変量であると言う。

付録 5.B 量子力学の基礎知識

量子力学は微視的な視点での粒子の状態を記述する理論である。本書で必要な量子力学の知識として、量子力学の基本法則 (節 5.B.1, 5.B.2) を説明した後、非相対論的な粒子ひとつひとつの状態を扱うシュレディンガー理論による考察 (節 5.B.3 から 5.B.9) と、電磁波の量子的 (光子的) 取り扱い方 (節 5.B.10)、粒子同士の衝突問題を考える手法の基礎知識 (節 5.B.11 から 5.B.13) についてまとめた。本付録は量子力学の入門者向けというよりは、知識を整理するためのまとめ方になっていると思われる。適宜量子力学の教科書も参考にして欲しい。

本付録は私が東京大学理学部で受けた講義のノートを基に作成したが、補足的に Sakurai & Napolitano (2010), Atkins & Friedman (2010) も参考にした。また、角運動量固有状態に関する部分 (節 5.B.7) は Landi Degl'Innocenti & Landolfi (2004)、放射場に関する部分 (節 5.B.10) はサクライ (1967) を参考にした。

5.B.1 量子力学の基本法則

考える系の状態を $|\psi\rangle$ と書くことにする。 $|\psi\rangle$ がヒルベルト空間 (エルミート内積付き複素線形空間) のベクトルであることが量子力学の最初の法則である。ヒルベルト空間については付録 1.C.2 でも説明しているが、簡単に述べると、 $|\psi\rangle$ に対して複素数ベクトルと同じような方法論

を用いることができるということである。系の 2 つの状態 $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ を考えるとき、その線形結合

$$\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle \quad (5.B.1)$$

もまた、系の状態のひとつになる。ただし、 α, β は一般に複素数である。更に、数ベクトルの内積に相当するものとして、内積 $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ なるものを考えることができる。ただし、ここでいう内積とは次のような性質を持つ量である^{†72}。

- $\langle\psi_1 + \psi_2|\psi_3\rangle = \langle\psi_1|\psi_3\rangle + \langle\psi_2|\psi_3\rangle$
- $\langle\psi_1|\psi_2 + \psi_3\rangle = \langle\psi_1|\psi_2\rangle + \langle\psi_1|\psi_3\rangle$
- $\langle\alpha\psi_1|\psi_2\rangle = \alpha^* \langle\psi_1|\psi_2\rangle$
- $\langle\psi_1|\alpha\psi_2\rangle = \alpha \langle\psi_1|\psi_2\rangle$
- $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|\psi_1\rangle^*$
- $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$ であり、 $\langle\psi|\psi\rangle = 0$ となるのは $|\psi\rangle = 0$ のときだけである。

ただし、 α^* は α の複素共役を表す。 $\langle\alpha\psi_1|\psi_2\rangle$ とは、 $\alpha|\psi_1\rangle$ と $|\psi_2\rangle$ の内積という意味合いで記述している。

ある状態 $|\psi\rangle$ にある系において、観測量 \hat{A} を観測する場合を考える。観測量 \hat{A} がエルミート演算子であることが次の法則である。演算子とは、数ベクトル空間を考えたときの行列に相当する概念である。行列の基礎知識については適宜付録 1.A も参考にして欲しい。エルミート演算子とはエルミート行列に相当する概念で、

- $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$
- \hat{A} の固有値は全て実数である。
- \hat{A} の n 個の固有ベクトルは互いに線形独立であり、固有ベクトルからなる正規直交基底をとることができる。

などの性質を持つ。観測量 \hat{A} の固有値と固有ベクトルを $\hat{A}|i\rangle = a_i|i\rangle$ と書くと、状態 $|\psi\rangle$ において \hat{A} を観測したときの結果は a_i のうちのどれかであり、 a_i が得られる確率は $|\langle i|\psi\rangle|^2$ に比例する。普通は固有ベクトルを正規直交基底になるようにとる、すなわち $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ となるようにとる。このとき、系の一般の状態 $|\psi\rangle$ は \hat{A} の固有ベクトルで展開でき、

$$|\psi\rangle = \sum_i (\langle i|\psi\rangle) |i\rangle = \sum_i |i\rangle \langle i|\psi\rangle \quad (5.B.2)$$

と書ける。このことは単に

$$\sum_i |i\rangle \langle i| = \hat{1} \quad (5.B.3)$$

^{†72} $|\psi\rangle$ を縦数ベクトルに相当する概念と考えると、 $\langle\psi|$ はその縦数ベクトルの成分を複素共役にして横向きにしたもの、と捉えることができる。すると、内積 $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ は縦数ベクトルに横数ベクトルを左から乗じることに相当する。このように考えると、この $\langle | \rangle$ を使った記法は直観的に分かりやすいと思う。

と書かれる。つまり、上式は恒等演算子 (あらゆる状態を変えない演算子、単位行列に相当) であると解釈できる。 \sum_i は \hat{A} の全ての固有ベクトルについての和を取るという意味であり、一般には無限和になる。また、

$$\hat{A}|\psi\rangle = \sum_i (\langle i|\psi\rangle) \hat{A}|i\rangle \quad (5.B.4)$$

$$= \sum_i (\langle i|\psi\rangle) a_i |i\rangle \quad (5.B.5)$$

$$= \sum_i |i\rangle a_i \langle i|\psi\rangle \quad (5.B.6)$$

である。 \hat{A} を測定して固有値 a_i が得られる確率は

$$\frac{|\langle i|\psi\rangle|^2}{\sum_i |\langle i|\psi\rangle|^2} = \frac{|\langle i|\psi\rangle|^2}{\sum_i \langle\psi|i\rangle \langle i|\psi\rangle} \quad (5.B.7)$$

$$= \frac{|\langle i|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} \quad (5.B.8)$$

となるので、普通は状態 $|\psi\rangle$ を $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ と規格化して考え、式 (5.B.1) のような 2 状態の重ね合わせを考えると、重ね合わせた状態のノルムが 1 となるように係数を規格化する。このような規格化を適切に行えば、状態 $|\psi\rangle$ において \hat{A} を観測した結果の期待値は

$$\langle A \rangle_\psi = \sum_i a_i |\langle i|\psi\rangle|^2 \quad (5.B.9)$$

$$= \sum_i \langle\psi|i\rangle a_i \langle i|\psi\rangle \quad (5.B.10)$$

$$= \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle \quad (5.B.11)$$

と書ける。

固有値が連続的な場合もある。例えば位置演算子 \hat{x} の固有値 x_1, x_2 に対する固有ベクトルを $|x_1\rangle, |x_2\rangle$ と書くと、デルタ関数 $\delta(x)$ を用いて

$$\langle x_1|x_2\rangle = \delta(x_1 - x_2) \quad (5.B.12)$$

という直交性を満たすようにとれ、状態 $|\psi\rangle$ はこの固有ベクトルを用いて

$$|\psi\rangle = \int dx |x\rangle \langle x|\psi\rangle \quad (5.B.13)$$

と展開できる。この展開係数 $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ のことを波動関数と言う。状態 $|\psi\rangle$ を適切に規格化しておけば、位置 \hat{x} を観測したときに値 x を得る確率は

$$|\langle x|\psi\rangle|^2 = \left| \int \psi(x') \langle x|x'\rangle dx' \right|^2 \quad (5.B.14)$$

$$= |\psi(x)|^2 \quad (5.B.15)$$

というように、波動関数を用いて表せる。

考える系が部分系 A と B からなるとする。このとき、部分系 A の状態 (が属する線形) 空間を \mathcal{H}_A 、部分系 B の状態空間を \mathcal{H}_B と書くと、A と B を合わせた全系の状態空間はテンソル積 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ となる。つまり全系の状態 $|\psi\rangle_{A+B}$ は、系 A の基底 $\{|a\rangle; a = 1, 2, \dots, n_1\}$ と系 B の基底 $\{|b\rangle; b = 1, 2, \dots, n_2\}$ のテンソル積 (直積) $|a\rangle \otimes |b\rangle = |a, b\rangle$ を基底として

$$|\psi\rangle_{A+B} = \sum_{a,b} c_{ab} |a, b\rangle \quad (5.B.16)$$

と展開できる^{†73}。例えば部分系 A の基底に

$$\hat{X}_A |a\rangle = \sum_{a'} X_{aa'} |a'\rangle \quad (5.B.17)$$

と作用する演算子を考えた場合、この演算子は全系の基底には

$$\hat{X}_A |a, b\rangle = \sum_{a'} X_{aa'} |a', b\rangle \quad (5.B.18)$$

と作用する。つまり、基底 $|a, b\rangle$ の a の部分のみに作用する。付録 3.B.4 ではこのことを用いて、それぞれの原子スピンの状態を合わせた、2 原子分子全体での状態を考えた。

系に対する観測以外の操作は、系の状態に (反) ユニタリ演算子を作用させることで表される。次節で、系を時間 t だけ時間発展させる、すなわち系を時間 t の間だけ放っておく操作について考える。

5.B.2 シュレディンガー方程式

「系を時間 t だけ時間発展させる」という操作も前節で述べた最後の法則の通り、ユニタリ演算子 $\hat{U}(t)$ によって

$$|\psi\rangle \longrightarrow \hat{U}(t) |\psi\rangle \quad (5.B.19)$$

と表される。時間 t_1 だけ時間発展させた後に時間 t_2 だけ時間発展させることは、時間 $(t_1 + t_2)$ だけ時間発展させることに等しいので、この演算子は $\hat{U}(t_2)\hat{U}(t_1) = \hat{U}(t_1 + t_2)$ を満たす。そのようなユニタリ演算子は、適切なエルミート演算子 \hat{H} を用いて

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{it}{\hbar}\hat{H}\right) \quad (5.B.20)$$

^{†73} 逆に言うと、全系 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ の一般の状態は、 \mathcal{H}_A に属する状態と \mathcal{H}_B に属する状態のテンソル積では表されない。このような性質をエンタングルメントと言う。また、テンソル積 $|a\rangle \otimes |b\rangle$ で展開するのは、全系での基底の選び方の選択肢の 1 つに過ぎない。

と表される^{†74}。ただし、慣習としてディラック定数 \hbar をかませる。よって、時間 t だけ経過したときの状態を $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi\rangle$ と書くと、

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (5.B.21)$$

という関係があることが分かる。これは (時間非依存のハミルトニアンに対する) シュレディンガー方程式と呼ばれる。 \hat{H} はエネルギーの次元を持つ演算子で、系のハミルトニアンと呼ぶ。これは系のエネルギーを表すエルミート演算子であり、ニュートン力学 (解析力学、付録 5.A) におけるハミルトニアンに対応する概念である。系の状態 $|\psi\rangle$ が \hat{H} の固有ベクトル $|n\rangle$ で

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \quad (5.B.22)$$

と展開できるとき、この状態の時間発展は、 $|n\rangle$ に対する \hat{H} の固有値 (すなわち系の取り得るエネルギー値) を E_n として、

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n \exp\left(-\frac{it}{\hbar} \hat{H}\right) |n\rangle \quad (5.B.23)$$

$$= \sum_n c_n \exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right) |n\rangle \quad (5.B.24)$$

となる。系のエネルギーの期待値は

$$\langle H \rangle_{\psi(t)} = \langle \psi(t) | \hat{H} | \psi(t) \rangle \quad (5.B.25)$$

$$= \sum_n E_n |c_n|^2 \quad (5.B.26)$$

となり、時刻に依らず一定であることが分かる。これを系のエネルギーが保存されていると言う。 $|n\rangle$ は (エネルギー) 固有状態と呼ばれ、 $|n\rangle$ が従う関係

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (5.B.27)$$

は定常状態のシュレディンガー方程式と呼ばれる。

一方で、観測量の期待値について

$$\langle A \rangle_{\hat{U}(t)|\psi} = \langle \psi | \hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \hat{U}(t) | \psi \rangle = \langle \hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \hat{U}(t) \rangle_{|\psi} \quad (5.B.28)$$

なので、系の状態が $\hat{U}(t)|\psi\rangle$ と時間発展すると考える代わりに、時間 t 後には観測量を

$$\hat{A}(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \hat{U}(t) \quad (5.B.29)$$

^{†74} このことを数学的に整備する分野は群論とその表現論である。演算子 $\hat{U}(t)$ の全体集合はユニタリ群をなす。ユニタリ群はリー群の具体例の一つである。 \hat{H} はこのユニタリ群の生成子であり、 \hat{H} のつくる数学的構造はこのユニタリ群のリー代数と言う。

と変えて観測を行うと考える流儀もある。これを先ほどのシュレディンガー描像に対してハイゼンベルク描像と言う。こうして定義された時間に依存する演算子は、実際に時間微分を計算すると、

$$i\hbar \frac{d\hat{A}(t)}{dt} = [\hat{A}(t), \hat{H}] \quad (5.B.30)$$

という式に従うことが分かる。これはハイゼンベルクの運動方程式と呼ばれる。新しい記号が出てきたが、一般の演算子に対して

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (5.B.31)$$

という意味である。 $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ の場合、この 2 つの演算子は可換であることを示すので、この記号は交換関係と呼ばれる。

部分系 A, B からなる系を考える。部分系が相互作用しない場合、全系の時間発展演算子はそれぞれの部分系の時間発展演算子を用いて

$$\hat{U}_{A+B}(t) = \hat{U}_A(t)\hat{U}_B(t) \quad (5.B.32)$$

と書ける。従ってハミルトニアンに対しては

$$\hat{H}_{A+B} = \hat{H}_A + \hat{H}_B \quad (5.B.33)$$

となる。部分系間に相互作用がある場合はこれに相互作用を表す項が加わる。

5.B.3 座標表示による正準量子化

古典力学的ハミルトニアン $H(q, p)$ (付録 5.A.2) の形から量子力学におけるハミルトニアン演算子 \hat{H} の形を類推することを正準量子化と呼ぶ。量子化という操作は何らかのルール (本節で述べる量子化方法の場合は式 (5.B.34)) を恣意的に課すことから出発する。次に説明するような座標表示による正準量子化の手続きが上手くいくことが知られている。

1 次元の場合

位置演算子 \hat{x} とそれに共役な運動量演算子 \hat{p} の間に次の交換関係を要請する。

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad (5.B.34)$$

系の任意の状態 $|\psi(t)\rangle$ は \hat{x} の固有ベクトル $|x\rangle$ と波動関数 $\psi(x, t) = \langle x|\psi(t)\rangle$ を用いて

$$|\psi(t)\rangle = \int \psi(x, t) |x\rangle dx \quad (5.B.35)$$

と展開できる。つまり $\psi(x, t)$ は $|x\rangle$ を基底として表したときの $|\psi(t)\rangle$ の成分であり、 $|\psi(t)\rangle$ の代わりに $\psi(x, t)$ を用いて物事を考えることができる。これを座標表示と言う。座標表示でのハ

ミルトニアンないしはシュレディンガー方程式を考えるために幾つかの量を考える。まず、

$$\langle x|\hat{x}|\psi(t)\rangle = \int \psi(x', t) \langle x|\hat{x}|x'\rangle dx' \quad (5.B.36)$$

$$= \int x' \psi(x', t) \delta(x - x') dx' \quad (5.B.37)$$

$$= x\psi(x, t) \quad (5.B.38)$$

と書ける。一方で、交換関係より

$$\langle x|[\hat{x}, \hat{p}]|x'\rangle = i\hbar \langle x|x'\rangle \quad (5.B.39)$$

$$(x - x') \langle x|\hat{p}|x'\rangle = i\hbar \delta(x - x') \quad (5.B.40)$$

$$\langle x|\hat{p}|x'\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x') \quad (5.B.41)$$

となることが分かる^{†75}。よって、

$$\langle x|\hat{p}|\psi(t)\rangle = \int \psi(x', t) \langle x|\hat{p}|x'\rangle dx' \quad (5.B.42)$$

$$= -i\hbar \int \psi(x', t) \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x') dx' \quad (5.B.43)$$

$$= -i\hbar \int \frac{\partial \psi(x', t)}{\partial x'} \delta(x - x') dx' \quad (5.B.44)$$

$$= -i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \quad (5.B.45)$$

となる。ただし、2 段目から 3 段目の変形では部分積分をした。また、

$$\langle x|\hat{p}^2|x'\rangle = \int \langle x|\hat{p}|x''\rangle \langle x''|\hat{p}|x'\rangle dx'' \quad (5.B.46)$$

$$= -\hbar^2 \int \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x'') \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x'' - x') dx'' \quad (5.B.47)$$

$$= -\hbar^2 \int \delta(x - x'') \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \delta(x'' - x') dx'' \quad (5.B.48)$$

$$= -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \delta(x - x') \quad (5.B.49)$$

という関係が分かるので、同様にして

$$\langle x|\hat{p}^2|\psi(t)\rangle = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \quad (5.B.50)$$

^{†75} 2 段目から 3 段目の変形では、デルタ関数の性質

$$x \frac{d\delta(x)}{dx} = -\delta(x)$$

を用いた。

となる。例えば 1 粒子系を考える場合、古典的ハミルトニアン

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (5.B.51)$$

に倣って量子力学的ハミルトニアン演算子を

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \quad (5.B.52)$$

とする。すると、シュレディンガー方程式 (5.B.21) の両辺に $\langle x|$ を作用させて関係 (5.B.38), (5.B.50) を用いることで、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x, t) \quad (5.B.53)$$

を得る。これが座標表示でのシュレディンガー方程式である。座標表示で表す場合には

$$H(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \quad (5.B.54)$$

をハミルトニアン演算子と言うが、これはベクトル $|\psi\rangle$ に作用する演算子ではなく、乗算や微分として波動関数に作用する別の意味での演算子なので注意が必要である。

以上のことをまとめると、シュレディンガー方程式を座標表示で書く場合、古典的ハミルトニアンにおいて

$$x \longrightarrow \hat{x}, \quad p \longrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (5.B.55)$$

と置き換えたものが量子力学的ハミルトニアン演算子になるというルールで量子化をする。座標ではなく、運動量の固有状態で展開する場合 (運動量表示) は、 \hat{x} と \hat{p} についてエルミート対称な関係が得られる。次の関係は公式として覚えておくと便利である。

\hat{x} の固有状態を $|x\rangle$ 、 \hat{p} の固有状態を $|p\rangle$ と書く。

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle, \quad \hat{p}|p\rangle = p|p\rangle \quad (5.B.56)$$

各固有状態は次のように規格化されている。

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x'), \quad \langle p|p'\rangle = \delta(p - p') \quad (5.B.57)$$

- 完全性関係

$$\hat{1} = \int dx |x\rangle \langle x|, \quad \hat{1} = \int dp |p\rangle \langle p| \quad (5.B.58)$$

- 内積

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}px\right), \quad \langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}px\right) \quad (5.B.59)$$

- 共役な演算子を作用させた場合

$$\langle x | \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \langle x |, \quad \langle p | \hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \langle p | \quad (5.B.60)$$

- 微分演算子と平面波の交換

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \exp\left(\frac{i}{\hbar} px\right) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} px\right) \left(\frac{i}{\hbar} p + \frac{\partial}{\partial x}\right)^n \quad (5.B.61)$$

- 積分公式 ($a > 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iap^2) dp = \sqrt{\frac{\pi}{ia}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iap^2) dp = \sqrt{\frac{i\pi}{a}} \quad (5.B.62)$$

座標表示での内積は、

$$\langle \psi(t) | \phi(t) \rangle = \int dx \int dx' \psi^*(x, t) \phi(x', t) \langle x | x' \rangle \quad (5.B.63)$$

$$= \int \psi^*(x, t) \phi(x, t) dx \quad (5.B.64)$$

と書ける。 ψ^* は ψ の複素共役という意味である。また、座標表示での観測量 \hat{A} の期待値は、 $\psi(x, t)$ を

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \int \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx = 1 \quad (5.B.65)$$

というように適切に規格化していれば、

$$\langle A \rangle_{\psi(t)} = \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle \quad (5.B.66)$$

$$= \int dx \int dx' \psi^*(x, t) \psi(x', t) \langle x | \hat{A} | x' \rangle \quad (5.B.67)$$

$$= \int \psi^*(x, t) A(x) \psi(x, t) dx \quad (5.B.68)$$

と書ける。ただし、最後の段の $A(x)$ は、座標表示において波動関数に作用する演算子という意味である^{†76}。

状態空間 \mathcal{H}_A に属する状態 $|\psi\rangle_A$ を表す波動関数が $\psi(x_A)$ であり、別の状態空間 \mathcal{H}_B に属する状態 $|\phi\rangle_B$ を表す波動関数が $\phi(x_B)$ であったとする。このとき、これらの状態空間のテンソル積に属する状態 $|\psi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$ を表す波動関数は、単に 2 つの波動関数の積 (直積) $\psi(x_A)\phi(x_B)$ になる。ただし、変数 x_A と x_B は違う変数であることに注意を要する。状態空間 \mathcal{H}_A に属する

^{†76} ここでは、状態ベクトルと波動関数に作用する演算子の違いを示すために、前者にのみハット記号 $\hat{}$ を付けた。以後、演算子と固有値の違いを明確にするために、後者にもハット記号を付けることもある。どちらに当たるのかは文脈で判断されたい。

状態に作用する演算子は、座標表示では x_A に関する微分演算子として表されているので、直積を考える場合も相変わらず $\psi(x_A)$ のみに作用する。

3次元の場合

位置演算子と運動量演算子の交換関係を

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0 \quad (5.B.69)$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad (5.B.70)$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (5.B.71)$$

と定める。

一般に、観測量 \hat{A} と \hat{B} が可換ならば、 \hat{A} の固有ベクトルは \hat{B} の固有ベクトルでもある。よって、この場合は状態 $|\psi(t)\rangle$ を $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ の同時固有ベクトル $|x, y, z\rangle$ で

$$|\psi(t)\rangle = \int dx \int dy \int dz \psi(x, y, z, t) |x, y, z\rangle \quad (5.B.72)$$

と展開したときの係数 $\psi(x, y, z, t) = \langle x, y, z | \psi(t) \rangle$ を波動関数と呼ぶ。このように考えれば、1次元の場合の自然な拡張として、

$$x_i \longrightarrow x_i, \quad p_i \longrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (5.B.73)$$

と置き換えて量子化すれば良いことが分かる。

5.B.4 調和振動子：生成消滅演算子

調和振動子を量子系で考える。系のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} \quad (5.B.74)$$

である。定常状態のシュレディンガー方程式を座標表示で表すと、固有状態の波動関数 $\phi_n(x)$ は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) \phi_n(x) = E_n \phi_n(x) \quad (5.B.75)$$

という微分方程式に従う。これはエルミート多項式についての知識 (付録 1.C.4 参照) を用いることで、

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n!}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right) \quad (5.B.76)$$

$$\text{ただし, } n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.B.77)$$

$$H_n(\xi) = (-1)^n \exp(\xi^2) \frac{d^n}{d\xi^n} [\exp(-\xi^2)] \quad (5.B.78)$$

と解ける。それぞれの固有状態 $|n\rangle$ に対する固有値、すなわち系が持ちうるエネルギー値は

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad (5.B.79)$$

となる。

エネルギー固有値を調べる別の方法として、節 5.B.10 で必要になる生成消滅演算子を紹介する。次の演算子を導入する。

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p}, \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \hat{p} \quad (5.B.80)$$

\hat{a} は消滅演算子、 \hat{a}^\dagger は生成演算子と呼ばれる。これらは

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (5.B.81)$$

という関係があり、 \hat{a}, \hat{a}^\dagger を用いると、ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right) \quad (5.B.82)$$

$$= \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right) \quad (5.B.83)$$

と書き換えられることが分かる。 $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ は数演算子と呼ばれる。数演算子と生成消滅演算子の交換関係は

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}, \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \quad (5.B.84)$$

である。 \hat{H} が \hat{N} のみを用いて表せたので、 \hat{H} の代わりに \hat{N} の固有値を調べる。交換関係 (5.B.81) と \hat{N} の定義のみから次の 3 つの性質が言える。

1. \hat{N} の固有値は非負である。
2. $\hat{a}|\psi\rangle = 0$ ならば $|\psi\rangle$ は \hat{N} の固有値 0 に対する固有ベクトルである。
3. $|\alpha\rangle$ が \hat{N} の固有値 α に対する固有ベクトルで、かつ $\hat{a}|\alpha\rangle \neq 0$ ならば、 $\hat{a}|\alpha\rangle$ は固有値 $(\alpha - 1)$ に対する固有ベクトルである。一方で $\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle$ は固有値 $(\alpha + 1)$ に対する固有ベクトルである。

性質 1, 2 について

$|\psi\rangle$ を任意の規格化された状態として、

$$\langle\psi|\hat{N}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\psi\rangle \quad (5.B.85)$$

$$= |\hat{a}|\psi\rangle|^2 \geq 0 \quad (5.B.86)$$

という関係から分かる。

性質 3 について

$|\alpha\rangle$ が \hat{N} の固有値 α に対する規格化された固有ベクトルだとすると、

$$\hat{N}\hat{a}|\alpha\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}|\alpha\rangle \quad (5.B.87)$$

$$= (\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1)\hat{a}|\alpha\rangle \quad (5.B.88)$$

$$= (\hat{a}\hat{N} - \hat{a})|\alpha\rangle \quad (5.B.89)$$

$$= (\alpha - 1)\hat{a}|\alpha\rangle \quad (5.B.90)$$

だと分かる。よって $\hat{a}|\alpha\rangle \neq 0$ であれば $\hat{a}|\alpha\rangle$ は固有値 $(\alpha - 1)$ に対する固有ベクトルになる。同様にして $\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle$ がゼロでなければ固有値 $(\alpha + 1)$ に対する固有ベクトルであることも分かる。

$$|\hat{a}|\alpha\rangle|^2 = \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle \quad (5.B.91)$$

$$= \langle\alpha|\hat{N}|\alpha\rangle \quad (5.B.92)$$

$$= \alpha \quad (5.B.93)$$

であることなどに注意すると、固有値 $(\alpha - 1), (\alpha + 1)$ に対する規格化された固有ベクトル $|\alpha - 1\rangle, |\alpha + 1\rangle$ は、

$$|\alpha - 1\rangle = \alpha^{-1/2}\hat{a}|\alpha\rangle, \quad |\alpha + 1\rangle = (\alpha + 1)^{-1/2}\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle \quad (5.B.94)$$

などと表せる。

$\hat{a}^n|\alpha\rangle$ はゼロでなければ \hat{N} の固有値 $(\alpha - n)$ の固有ベクトルだが、固有値は非負なので下限があるため、 $\hat{a}^{n+1}|\alpha\rangle = 0$ となる n があるはずである。そのときの $\hat{a}^n|\alpha\rangle$ は性質 2 より、固有値 0 の固有ベクトルになる。以上のことをまとめると、 \hat{N} の固有値は非負整数でなければならず、 \hat{N} の固有値 0 に対する規格化された固有ベクトルを $|0\rangle$ とすると、各固有値 n に対する規格化された固有ベクトル $|n\rangle$ は、

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \quad (5.B.95)$$

と書ける。 $|n\rangle$ はハミルトニアン固有ベクトルでもあり、その固有値は式 (5.B.79) のようになることが分かる。

5.B.5 角運動量

古典力学的な質点の角運動量は

$$L_i = \varepsilon_{ijk}x_jp_k \quad (5.B.96)$$

と表せる量だった。これに倣って、量子力学的な軌道角運動量

$$\hat{L}_i = \varepsilon_{ijk} \hat{x}_j \hat{p}_k \quad (5.B.97)$$

を考える。 \hat{L}_i はエルミートである。 \hat{x}_i と \hat{p}_j の交換関係を考慮すると、

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z, \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x, \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y \quad (5.B.98)$$

という交換関係を満たすことが分かる。量子力学では、このような交換関係を満たす量全般を角運動量と呼ぶので、式 (5.B.97) で定義される量は特に軌道角運動量と呼んで区別される。角運動量の次元は \hbar の次元と同じなので、 $\hat{L}_i = \hbar \hat{l}_i$ と無次元化して、 \hat{l}_i を考えることにする。すると、交換関係は

$$[\hat{l}_x, \hat{l}_y] = i\hat{l}_z, \quad [\hat{l}_y, \hat{l}_z] = i\hat{l}_x, \quad [\hat{l}_z, \hat{l}_x] = i\hat{l}_y \quad (5.B.99)$$

となる。まずはこの交換関係を満たす角運動量の一般論を簡潔に説明する。次のような演算子を導入する。

$$\hat{l}^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2 \quad (5.B.100)$$

$$\hat{l}_+ = \hat{l}_x + i\hat{l}_y \quad (5.B.101)$$

$$\hat{l}_- = \hat{l}_x - i\hat{l}_y \quad (5.B.102)$$

$\hat{l}_+^\dagger = \hat{l}_-$ である。すると、 \hat{l}_i の交換関係のみを使って次の交換関係が計算できる。

$$[\hat{l}_+, \hat{l}_-] = 2\hat{l}_z, \quad [\hat{l}_z, \hat{l}_\pm] = \pm \hat{l}_\pm \quad (5.B.103)$$

$$[\hat{l}^2, \hat{l}_x] = [\hat{l}^2, \hat{l}_y] = [\hat{l}^2, \hat{l}_z] = [\hat{l}^2, \hat{l}_\pm] = 0 \quad (5.B.104)$$

特に 2 段目の交換関係より、 \hat{l}^2 の固有ベクトルでもあり、 \hat{l}_z の固有ベクトルでもある状態を考えることができる。この同時固有状態を $|l, m\rangle$ と書くと、生成消滅演算子の時に行ったような固有状態に関する地道な考察の結果、最終的に次のような性質があることが分かる。

$$\hat{l}^2 |l, m\rangle = l(l+1) |l, m\rangle, \quad l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \quad (5.B.105)$$

$$\hat{l}_z |l, m\rangle = m |l, m\rangle, \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l \quad (5.B.106)$$

$$\hat{l}_\pm |l, m\rangle = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} |l, m \pm 1\rangle \quad (5.B.107)$$

$$\hat{l}_+ |l, l\rangle = 0, \quad \hat{l}_- |l, -l\rangle = 0 \quad (5.B.108)$$

つまり、整数か半整数の値をとり得る l は角運動量の大きさに相当する量である。ただし、 \hat{l}^2 の固有値は $l(l+1)$ であることに注意を要する。 l を固定して考えると、角運動量のどれか 1 成分 (z 成分とする) は $-l \sim +l$ の $(2l+1)$ 通りの値をとり得る。これを m と書く。 z 成分と残り

の成分は非可換なので、両者が同時に確定した状態はつくれない。異なる m についての固有状態は昇降演算子 \hat{l}_{\pm} によって結ばれる。

次に、軌道角運動量の場合について、極座標表示で考える^{†77} ことによって固有状態の波動関数を求める。各演算子は座標表示では

$$\hat{l}_i = -i\varepsilon_{ijk}x_j \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (5.B.109)$$

と書ける。極座標との間の

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta \cos\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin\phi}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (5.B.110)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta \sin\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos\phi}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (5.B.111)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (5.B.112)$$

という関係を使えば、 \hat{l}_z, \hat{l}^2 の極座標表示は

$$\hat{l}_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (5.B.113)$$

$$\hat{l}^2 = -\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} = -\hat{\Omega}_{\theta\phi} \quad (5.B.114)$$

と書ける^{†78}。よって、極座標表示での固有状態の波動関数 $Y_{l,m}(\theta, \phi) = \langle \theta, \phi | l, m \rangle$ は

$$-\hat{\Omega}_{\theta\phi} Y_{l,m}(\theta, \phi) = l(l+1) Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (5.B.115)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} Y_{l,m}(\theta, \phi) = im Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (5.B.116)$$

という偏微分方程式に従う。この方程式はルジャンドル陪関数の知識を使うと解けて、

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = (-1)^{(m+|m|)/2} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos\theta) \exp(im\phi) \quad (5.B.117)$$

$$\text{ただし, } l = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l \quad (5.B.118)$$

となる。 $P_l^m(x)$ はルジャンドル陪関数、 $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ の形は球面調和関数と呼ばれる。それぞれの関数については付録 1.C.4 を参照のこと。一般の角運動量の場合は l に半整数も許されていたが、軌道角運動量の場合は整数しか許されないことに注意されたい。 $l = 0 \sim 4$ についての球面調和関数が図 1.11, 1.12, 1.13 (81 ページ) に示されているので参考にして欲しい。

^{†77} ハミルトニアンを極座標表示で考えるときに、極座標を正準座標と考えて求めた古典的ハミルトニアンを量子化すると上手くいかないことが知られている。極座標表示で考えるときも、デカルト座標系で正準量子化をしてから極座標に変換するという手順をとる。

^{†78} $\partial/\partial r$ が消えてしまう。

2 原子分子の回転運動を、剛体回転 (2 原子間の距離が変化しない回転) として考える^{†79}。粒子 A の座標を \mathbf{x}_A 、粒子 B の座標を \mathbf{x}_B というようにラベル付けして考える。粒子 A から見た B の相対位置 \mathbf{r} 、換算質量 μ 、慣性モーメント I を

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A \quad (5.B.119)$$

$$\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \quad (5.B.120)$$

$$I = \mu |\mathbf{r}|^2 \quad (5.B.121)$$

と導入すると、この運動は座標 \mathbf{r} にいる質量 μ の質点の剛体回転として扱える。角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ を考えると、回転によるエネルギーは

$$E = \frac{L^2}{2I} \quad (5.B.122)$$

と書ける。量子化して考えると、エネルギーは

$$E_j = \frac{\hbar^2}{2I} j(j+1), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (5.B.123)$$

という値をとり得ることが分かる。

電子などの粒子は軌道角運動量以外にも、スピンと呼ばれる固有の角運動量を持つ。例えば電子のスピン角運動量の大きさは $l = 1/2$ と決まっていて、スピンによって $m = -1/2, 1/2$ という 2 つの状態をとる。これは古典力学には対応するものがない運動である。節 5.B.10 で詳しく説明するが、光子も大きさ $l = 1$ のスピンを持つ。ただし、光子は光速で動くこと (質量を持たないこと) に関連して、 $m = 0$ の状態は許されないので、 $m = -1, 1$ の 2 つの状態をとる。これは古典的には左円偏光、右円偏光に対応する。場の量子論^{†80}の範疇で考えれば、 l が半整数のスピンを持つ粒子がフェルミ粒子であり、 l が整数のスピンを持つ粒子がボース粒子であることが分かる。

例えば電子のスピンには依らない運動を考えていて、その系のハミルトニアン \hat{H} の固有状態を $|n\rangle_0$ とする。

$$\hat{H} |n\rangle_0 = E_n |n\rangle_0 \quad (5.B.124)$$

^{†79} 実際は分子間ポテンシャルに従って原子間距離が変化する。回転の角運動量が大きくなると遠心力によって原子間距離が大きくなることによる修正が必要になる (e.g. [Atkins & Friedman, 2010](#), Appendix 10.1)。

^{†80} 電磁場を量子化すると、生成消滅し得る光子というボース粒子の集団として扱えることを節 5.B.10 で説明するが、高エネルギーの相対論的な粒子を考える際には、例えば電子でさえも生成消滅し得ると考える必要がある。そこで、電子 1 つ 1 つの状態を考えるのではなく、節 5.B.10 で説明する電磁場の量子化と同様の手法 (第二量子化) で電子の波動関数 (ただし相対論と電子のスピンを考慮したディラック場の理論における波動関数) を量子化し、電子の集団としての状態 (フォック状態) を考える。或いは非相対論的な場合でも、多粒子系を考える際には節 5.B.9 で述べる粒子の識別不能性を簡単に組み込むために、本付録で説明している波動関数 (シュレディンガー場) を第二量子化して考える。このように、電磁場や波動関数などの場の量を量子的に扱う理論は場の量子論 (quantum field theory) と呼ばれる。詳しくは、例えば [Schwartz \(2013\)](#) を参照。

一方で電子のスピン固有状態を $|\uparrow\rangle_s$ または $|\downarrow\rangle_s$ とする。すなわち、 \hbar で無次元化したスピン角運動量演算子 \hat{s} に対して

$$\hat{s}^2 |s\rangle_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} |s\rangle_s, \quad s = \uparrow \text{ or } \downarrow \quad (5.B.125)$$

$$\hat{s}_z |\uparrow\rangle_s = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle_s, \quad \hat{s}_z |\downarrow\rangle_s = -\frac{1}{2} |\uparrow\rangle_s \quad (5.B.126)$$

を満たす状態のことである。このとき、電子の運動状態とスピン状態を併せた全体の状態 $|n, s\rangle_{o+s} = |n\rangle_o \otimes |s\rangle_s$ を座標表示で考えたい場合、波動関数は次のように書かれる。

$$\psi_{n,s}(\mathbf{x}, \sigma) = \phi_n(\mathbf{x}) \chi_s(\sigma) \quad (5.B.127)$$

$\phi_n(\mathbf{x})$ は状態 $|n\rangle_o$ を表す波動関数である。 $\chi_s(\sigma)$ はスピン関数と呼ばれ、次のように規格化されている。

$$\int \chi_s^*(\sigma) \chi_{s'}(\sigma) d\sigma = \delta_{ss'} \quad (5.B.128)$$

σ はスピン座標と呼ばれる。 $\chi_s(\sigma)$ は単にスピン状態の内積を運動状態の波動関数と同じように何らかの変数についての積分で表すために導入される。よって、 $\chi_s(\sigma)$ の具体的な関数形には興味がなく、とにかく上式の直交関係を満たすものとして議論を進める。例えば何らかの演算子の行列要素 $\langle n, s | \hat{A} | n', s' \rangle_{o+s}$ を計算する場合は、

$$\int d^3x \int d\sigma \psi_{n,s}^*(\mathbf{x}, \sigma) \hat{A} \psi_{n',s'}(\mathbf{x}, \sigma) \quad (5.B.129)$$

というように、スピン変数についても積分する。

5.B.6 水素原子

水素原子に束縛された電子の軌道を考える。

エネルギーと角運動量の同時固有状態

後に水素原子における電子の運動に応用するため、球対称のポテンシャル $V(r)$ に従う粒子の波動関数について考察する。系のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r}) \quad (5.B.130)$$

である。まず、軌道角運動量 \hat{L}_i の定義に立ち返って計算すると

$$[\hat{L}_i, \hat{p}^2] = 0 \quad (5.B.131)$$

が分かる。また、 \hat{L}_i を極座標表示すると r 微分を含まないことから、

$$[\hat{L}_i, V(\hat{r})] = 0 \quad (5.B.132)$$

も分かる。するとこの 2 つの関係から

$$[\hat{L}_i, \hat{H}] = 0, \quad [\hat{L}^2, \hat{H}] = 0 \quad (5.B.133)$$

が分かるので、 $[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$ も併せると $\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_z$ の同時固有状態

$$\hat{H} |n, l, m\rangle = E_n |n, l, m\rangle \quad (5.B.134)$$

$$\hat{L}^2 |n, l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |n, l, m\rangle \quad (5.B.135)$$

$$\hat{L}_z |n, l, m\rangle = \hbar m |n, l, m\rangle \quad (5.B.136)$$

$$l = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -l, -l+1, \dots, l-1, l \quad (5.B.137)$$

を考えることができる。すると前節の議論より、この固有状態の極座標表示の波動関数は球面調和関数を使って $R(r)Y_{l,m}(\theta, \phi)$ と書け、定常状態のシュレディンガー方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\Omega}_{\theta\phi}}{r^2} \right) + V(r) \right] R(r)Y_{l,m}(\theta, \phi) = E_n R(r)Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (5.B.138)$$

に従う。ただし、 $\hat{\Omega}_{\theta\phi}$ は式 (5.B.114) で定義された微分演算子である。球面調和関数の性質

$$-\hat{\Omega}_{\theta\phi} Y_{l,m}(\theta, \phi) = l(l+1) Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (5.B.139)$$

を代入すると、 $R(r)$ は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + V(r) \right] R(r) = E_n R(r) \quad (5.B.140)$$

という微分方程式に従うことが分かる。

水素原子軌道

水素原子において、電子が従う逆 2 乗則のクーロン力によるポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (5.B.141)$$

$$= -\frac{\alpha\hbar c}{r} \quad (5.B.142)$$

と書ける。

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \simeq \frac{1}{137} \quad (5.B.143)$$

は微細構造定数と呼ばれる。\$e\$ は素電荷である。すると、式 (5.B.140)^{†81} はラゲールの陪多項式の知識 (付録 1.C.4 参照) を使うと解けて、

$$R_{n,l}(r) = -\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} \left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \left(\frac{2r}{na_0}\right)^l \exp\left(-\frac{r}{na_0}\right) L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right) \quad (5.B.144)$$

$$E_n = -\frac{m\alpha^2 c^2}{2n^2} \quad (5.B.145)$$

$$n = 1, 2, \dots \quad (5.B.146)$$

$$l = 0, 1, \dots, n-1 \quad (5.B.147)$$

$$\text{ただし, } L_k^s(x) = \frac{d^s}{dx^s} \left[\exp(x) \frac{d^k}{dx^k} (x^k \exp(-x)) \right] \quad (5.B.148)$$

$$a_0 = \frac{\hbar}{m\alpha} = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m} \quad (5.B.149)$$

となる。\$a_0\$ はボーア半径である。まとめると、エネルギー \$E_n (< 0)\$ を持つ状態は、スピンの自由度 2 も考慮すると \$\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2\$ 重に縮退している。\$n\$ は主量子数、\$l\$ は方位量子数、\$m\$ は磁気量子数と呼ばれる。

角運動量の合成

前の小節で、原子内に束縛された電子の軌道は主量子数を \$n\$ として \$n^2\$ 重に縮退していて、各軌道は \$l = 0, 1, \dots, n-1\$ の軌道角運動量を持つことを説明した。一方で、電子は \$l = 1/2\$ のスピンを持つことも説明した。\$\hbar\$ で無次元化した軌道角運動量演算子を \$\hat{l}^2, \hat{l}_z\$ などと書き、\$\hbar\$ で無次元化したスピン角運動量演算子を \$\hat{s}^2, \hat{s}_z\$ などと書くことにする。更に、それぞれの演算子の固有状態を

$$\hat{l}^2 |l, m\rangle_l = l(l+1) |l, m\rangle_l, \quad \hat{l}_z |l, m\rangle_l = m |l, m\rangle_l \quad (5.B.150)$$

$$m = -l, -l+1, \dots, l-1, l \quad (5.B.151)$$

$$\hat{s}^2 |s\rangle_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} |s\rangle_s, \quad \hat{s}_z |s\rangle_s = s |s\rangle_s \quad (5.B.152)$$

$$s = -\frac{1}{2} (\downarrow), \frac{1}{2} (\uparrow) \quad (5.B.153)$$

^{†81} ここでの質量 \$m\$ は、正確には電子質量 \$m_e\$ と陽子質量 \$m_p\$ の換算質量であるが、\$m_p \gg m_e\$ なので、ほぼ \$m = m_e\$ である。

と書くことにする。束縛電子の軌道の状態空間とスピンの状態空間のテンソル積を考え、軌道角運動量とスピン角運動量を合わせた全角運動量

$$\hat{j}^2 = (\hat{l}_i + \hat{s}_i)^2 \quad (5.B.154)$$

$$= \hat{l}^2 + \hat{s}^2 + 2\hat{l}_x\hat{s}_x + 2\hat{l}_y\hat{s}_y + 2\hat{l}_z\hat{s}_z \quad (5.B.155)$$

$$= \hat{l}^2 + \hat{s}^2 + \hat{l}_+\hat{s}_- + \hat{l}_-\hat{s}_+ + 2\hat{l}_z\hat{s}_z \quad (5.B.156)$$

$$\hat{j}_z = \hat{l}_z + \hat{s}_z \quad (5.B.157)$$

$$\hat{j}_+ = \hat{l}_x + \hat{s}_x + i(\hat{l}_y + \hat{s}_y) \quad (5.B.158)$$

$$\hat{j}_- = \hat{l}_x + \hat{s}_x - i(\hat{l}_y + \hat{s}_y) \quad (5.B.159)$$

を考える^{†82}。 \hat{j}^2, \hat{j}_z の固有ベクトルを

$$\hat{j}^2 |j, \mu\rangle = j(j+1) |j, \mu\rangle, \quad \hat{j}_z |j, \mu\rangle = \mu |j, \mu\rangle \quad (5.B.160)$$

と書いたとき、 $|j, \mu\rangle$ はテンソル積 $|l, m\rangle_l \otimes |s\rangle_s$ の重ね合わせとしてどのように表されるかを考える。例えば $l = 1$ の場合について考えると、

$$|3/2, 3/2\rangle = |1, 1\rangle_l \otimes |\uparrow\rangle_s \quad (5.B.161)$$

$$|3/2, 1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 0\rangle_l \otimes |\uparrow\rangle_s + \frac{1}{\sqrt{3}} |1, 1\rangle_l \otimes |\downarrow\rangle_s \quad (5.B.162)$$

$$|3/2, -1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |1, -1\rangle_l \otimes |\uparrow\rangle_s + \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 0\rangle_l \otimes |\downarrow\rangle_s \quad (5.B.163)$$

$$|3/2, -3/2\rangle = |1, -1\rangle_l \otimes |\downarrow\rangle_s \quad (5.B.164)$$

$$|1/2, 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |1, 0\rangle_l \otimes |\uparrow\rangle_s - \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 1\rangle_l \otimes |\downarrow\rangle_s \quad (5.B.165)$$

$$|1/2, -1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |1, -1\rangle_l \otimes |\uparrow\rangle_s - \frac{1}{\sqrt{3}} |1, 0\rangle_l \otimes |\downarrow\rangle_s \quad (5.B.166)$$

という関係がある^{†83}。右辺の各項の係数は一般にクレプシュ-ゴルダン係数と呼ばれる^{†84}。つまり、 $l = 1$ の場合の電子の軌道&スピンについての全状態空間 (6 次元) を、

$$|1, 1\rangle_l \otimes |\uparrow\rangle_s, \quad |1, 0\rangle_l \otimes |\uparrow\rangle_s, \quad |1, -1\rangle_l \otimes |\uparrow\rangle_s \quad (5.B.167)$$

$$|1, 1\rangle_l \otimes |\downarrow\rangle_s, \quad |1, 0\rangle_l \otimes |\downarrow\rangle_s, \quad |1, -1\rangle_l \otimes |\downarrow\rangle_s \quad (5.B.168)$$

^{†82} 異なる状態空間に作用する演算子なので \hat{l}_i と \hat{s}_i は可換である。また、 \hat{j}_i が角運動量の満たすべき交換関係を満たすことは少しの計算から分かる。

^{†83} $\mu = m + s$ なので、例えば $\mu = 3/2$ となるのは $m = 1, s = 1/2$ のときだけである。よって最上段の関係が分かる。すると、最上段の関係の両辺に \hat{j}_- を作用させて計算することで、1 段下 (2 段目) の関係が分かる。2 段目の右辺と直交する線形結合を考えて実際に \hat{j}^2 を作用させてみることで、下から 2 段目の関係が求まる。このような考察を繰り返すことで全ての関係が求まる。

^{†84} クレプシュ-ゴルダン係数については節 5.B.7 でもっと一般的にまとめている。

という基底を用いて考える代わりに、上記の関係で結ばれる

$$|3/2, 3/2\rangle, \quad |3/2, 1/2\rangle, \quad |3/2, -1/2\rangle, \quad |3/2, -3/2\rangle \quad (5.B.169)$$

$$|1/2, 1/2\rangle, \quad |1/2, -1/2\rangle \quad (5.B.170)$$

という基底で考えることもできる。もっと一般には、特定の l についての全状態空間を、 $j = l + 1/2, l - 1/2$ の場合の計 $2(2l + 1)$ 個の固有ベクトル $|j, \mu\rangle$ からなる基底で考えることができる。言い換えると、束縛電子の状態を (n, l, m, s) で指定する代わりに、 (n, j, μ) を用いて指定することができる。ただし、そのように考える場合、 j, μ がとり得る値は

$$j + \frac{1}{2} = 1, 2, \dots, n; \quad \mu = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j \quad (5.B.171)$$

となるが、 $j + 1/2 = 1 \sim n - 1$ の場合は (n, j, μ) で指定される状態は 2 つあり、 $j + 1/2 = n$ の場合は 1 つであることに注意が必要である。すなわち、特定の n の状態は

$$\sum_{(j+1/2)=1}^{n-1} 2 \cdot (2j + 1) + \left[2 \left(n - \frac{1}{2} \right) + 1 \right] = 2n^2 \quad (5.B.172)$$

個あることになり、 (n, l, m, s) で指定した場合と辻褃が合う。

微細構造

特殊相対論的效果を考慮して水素原子を考えると、束縛電子の状態を指定するには l よりも j を用いた方が都合が良い。ポテンシャル $V(r) = -\alpha\hbar c/r$ の下でディラック方程式^{†85}を解くと、 $\hat{H}, \hat{j}^2, \hat{j}_z$ の同時固有状態に対する固有エネルギーが

$$E_{n,j} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \alpha^2 / \left[n - j - 1/2 + \sqrt{(j + 1/2)^2 - \alpha^2} \right]^2}} \quad (5.B.173)$$

と求まる。すなわち、非相対論的な場合は固有エネルギーは n のみに依存したが、相対論を考慮すると n, j に依存する。上式を展開すると、

$$E_{n,j} = mc^2 \left[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^3} \left(\frac{1}{j + 1/2} - \frac{3}{4n} \right) - \dots \right] \quad (5.B.174)$$

と書ける。右辺第 1 項は静止エネルギーであり、第 2 項は非相対論的なシュレディンガー理論で導かれた結果である。第 3 項は第 2 項に比べて $\alpha^2 \sim 10^{-5}$ 程度小さいオーダーの項であり、微細構造 (fine structure) と呼ばれる。

^{†85} 量子力学に特殊相対論と電子のスピンを自然に組み込み、電子 1 つ 1 つの相対論的效果を考慮した状態を扱う手法としてディラック場の理論がある。ディラック場の理論においてシュレディンガー方程式に相当する方程式がディラック方程式である。詳しくは例えばサクライ (1967) を読んで欲しい。

微細構造は束縛電子のハミルトニアンに 2 つの項 \hat{H}_r, \hat{H}_{so} を加えることで、シュレディンガー理論の範疇で説明することができる。 \hat{H}_r は相対論的補正項である。シュレディンガー理論では古典力学に倣って、電子の運動エネルギーは $\hat{p}^2/(2m_e)$ と表されるが、相対論においてはローレンツ因子 $W = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ を用いて

$$m_e c^2 (W - 1) = \frac{\hat{p}^2}{2m_e} - \frac{\hat{p}^4}{8m_e^3 c^2} + \dots \quad (5.B.175)$$

と表される (節 7.7.1 参照)。よって、最低次の補正として、

$$\hat{H}_r = -\frac{\hat{p}^4}{8m_e^3 c^2} \quad (5.B.176)$$

をハミルトニアンに加える。

\hat{H}_{so} は電子の軌道角運動量とスピン角運動量の相互作用を表す項である。この項を古典的に解釈すると次のようになる。電子の静止系で見ると、原子核が周りを回っている。この原子核が作る電流 I によって磁場 B が発生する。電子の軌道半径を r とすると $B = \mu_0 I / (2r)$ である。軌道周期を P とすると、 $I = e/P$ と書ける。一方で、軌道角運動量の大きさ L は $L = m_e r v = 2\pi m_e r^2 / P$ と書ける。よって、

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{m_e c^2 r^3} \mathbf{L} \quad (5.B.177)$$

と書ける。一方で、電子がスピン \hat{S} (次元 \hbar) を持つと、磁気モーメント

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = -\frac{e}{m_e} \hat{S} \quad (5.B.178)$$

を持つ^{†86}。故に、磁場と磁気モーメントの相互作用は

$$\hat{H}_{so} = -\frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \hat{\mathbf{B}} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m_e^2 c^2 \hat{r}^3} \hat{S} \cdot \hat{L} \quad (5.B.179)$$

と書ける。係数 $1/2$ は電子の静止系から慣性系に移行する際に出てくる因子と解釈される。 $\hat{H}_r + \hat{H}_{so}$ を束縛電子ハミルトニアンに加え、節 5.B.8 で説明する摂動論という手法を用いることで、式 (5.B.174) の第 3 項を再現できる。詳しい計算は量子力学か量子化学の本を読んで欲しい。

^{†86} この磁気モーメントを無理やり古典的に解釈しようとする次のようになる。磁気モーメントの大きさは、 P を電子の「自転」周期として $\mu = -e\pi r^2 / P$ と書ける。 r はこの「回転」運動の有効的な半径である。一方で、スピン角運動量は P を用いると $S = 2\pi m_e r^2 / P$ と書ける量なので、 $\mu = -eS / (2m_e)$ が導かれる。量子論的に正しい磁気モーメントはこの 2 倍である。

5.B.7 角運動量固有状態の性質

節 5.B.8 および節 5.5.2 への応用の為に、角運動量固有状態の性質をいくつかまとめる。本節で説明している内容の詳しい説明を求める方は、例えば Landi Degl'Innocenti & Landolfi (2004) を読んで欲しい。

角運動量の合成 (一般論)

ある方向に z 軸を取り、それを量子化軸として角運動量固有状態を表すことにする^{†87}。なお、角運動量演算子は \hbar で無次元化して考える。前節で、水素内電子の軌道角運動量とスピン角運動量の合成について説明した。一般に角運動量演算子 \hat{j}_1 の固有状態 $|j_1, m\rangle$ と別の角運動量演算子 \hat{j}_2 の固有状態 $|j_2, m_2\rangle$ のテンソル積

$$|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \quad (5.B.180)$$

を考える。

$$\hat{j}_1^2 |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = j_1(j_1 + 1) |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \quad (5.B.181)$$

$$\hat{j}_{1z} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = m_1 |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \quad (5.B.182)$$

$$\hat{j}_2^2 |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = j_2(j_2 + 1) |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \quad (5.B.183)$$

$$\hat{j}_{2z} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = m_2 |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \quad (5.B.184)$$

$$\text{ただし, } -j_1 \leq m_1 \leq j_1, \quad -j_2 \leq m_2 \leq j_2 \quad (5.B.185)$$

2つの角運動量をベクトル的に合成した全角運動量を

$$\hat{J} = \hat{j}_1 + \hat{j}_2 \quad (5.B.186)$$

とし、 \hat{J}^2, \hat{J}_z の固有値をそれぞれ $J(J+1), M$ と書くと、特定の j_1, j_2 に対する $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$ で張られる $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ 次元の状態空間は

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \quad (5.B.187)$$

を満たす J に対する \hat{J} の固有状態 $|J, M\rangle$ ^{†88} を基底にして表すこともでき、両者の間には

$$|J, M\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M \rangle |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \quad (5.B.188)$$

^{†87} つまり、ある角運動量演算子 \hat{j} について、 \hat{j}^2 と \hat{j}_z の同時固有状態 $|j, m\rangle$ を考える。

^{†88} 例えば $j_1 = 1/2, j_2 = 2$ の場合は $J = 3/2, 5/2$ である。また例えば $j_1 = 1/2, j_2 = 3/2$ の場合は $J = 1, 2$ である。そのような固有状態は

$$\sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2J+1) = (2j_1+1)(2j_2+1)$$

個あるので辻褄が合う。

という関係がある。係数 $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M \rangle$ はクレプシュ-ゴルダン係数と呼ばれ、前節の脚注で説明したような考察を行うことで求められる。一般には次のように表される。

$$\begin{aligned} & \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M \rangle \\ &= \delta_{m_1+m_2, M} \cdot \sqrt{\frac{(2J+1)(j_1+j_2-J)!(J+M)!(J-M)!(j_1-m_1)!(j_2-m_2)!}{(j_1-j_2+J)!(j_2-j_1+J)!(j_1+j_2+J+1)!(j_1+m_1)!(j_2+m_2)!}} \\ & \cdot \sum_{r=0}^{j_1+j_2-J} (-1)^{j_1+j_2-J-r} \frac{(j_1-j_2+J+r)!(2j_2-r)!}{(J-j_2-m_1+r)!(j_2-m_2-r)!(j_1+j_2-J-r)!r!} \quad (5.B.189) \end{aligned}$$

各固有値が条件 (5.B.187) と $m_1 + m_2 = M$ のどちらか一方でも満たさない組み合わせの場合にはゼロになる。表 5.2 にいくつかの j_1, j_2 の組に対するクレプシュ-ゴルダン係数の値を載せた。例えば $j_1 = 2, j_2 = 1$ に対するクレプシュ-ゴルダン係数は、表の色が付いた列を縦に読むことで、

$$|3, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} |2, 1; 1, -1\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}} |2, 0; 1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}} |2, -1; 1, 1\rangle \quad (5.B.190)$$

であると分かる。各々の状態のノルムは 1 であることより、表の各列の値の絶対値を縦に足し合わせると 1 になることが言える。

クレプシュ-ゴルダン係数は次の直交性を持つ。

$$\sum_{m_1, m_2} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M \rangle \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J', M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \quad (5.B.191)$$

$$\sum_{J, M} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M \rangle \langle j_1, m'_1; j_2, m'_2 | J, M \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} \quad (5.B.192)$$

対称性を分かりやすくするために、新たな記号を導入する。クレプシュ-ゴルダン係数と次の関係にある記号を 3-j 記号と言う。

$$\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, -M \rangle = (-1)^{j_1-j_2-M} \sqrt{2J+1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & M \end{pmatrix} \quad (5.B.193)$$

3-j 記号は次の性質を持つ。

- 直交性

$$\sum_{\alpha, \beta} (2c+1) \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c' \\ \alpha & \beta & \gamma' \end{pmatrix} = \delta_{cc'} \delta_{\gamma\gamma'} \quad (5.B.194)$$

$$\sum_{c, \gamma} (2c+1) \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha' & \beta' & \gamma \end{pmatrix} = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'} \quad (5.B.195)$$

- 列を 1 つ入れ替えると $(-1)^{a+b+c}$ 倍される。つまり、列を 2 回入れ替える操作に対しては不変である。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = (-1)^{a+b+c} \begin{pmatrix} b & a & c \\ \beta & \alpha & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c & a \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix} \quad (5.B.196)$$

表 5.2 クレプシュ-ゴールドン係数表：例えば $1 \times 1/2$ の表は $j_1 = 1, j_2 = 1/2$ の場合の係数。表に正の値 c が記載されている場合、 \sqrt{c} が実際の係数の値であり、表に負の値 $-c$ が記載されている場合、 $-\sqrt{c}$ が実際の係数の値。Griffiths (2013) を参考にした。

$1/2 \times 1/2$				<table border="1"> <tr><td>1</td></tr> <tr><td>+1</td></tr> </table>		1	+1	<table border="1"> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> </table>		1	0	0	0																																																																																	
1																																																																																														
+1																																																																																														
1	0																																																																																													
0	0																																																																																													
<table border="1"> <tr><td>+1/2</td><td>+1/2</td></tr> <tr><td>+1/2</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>-1/2</td><td>+1/2</td></tr> </table>		+1/2	+1/2	+1/2	-1/2	-1/2	+1/2	<table border="1"> <tr><td>1/2</td><td>1/2</td></tr> <tr><td>1/2</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>-1/2</td><td>-1/2</td></tr> </table>		1/2	1/2	1/2	-1/2	-1/2	-1/2	1		1																																																																												
+1/2	+1/2																																																																																													
+1/2	-1/2																																																																																													
-1/2	+1/2																																																																																													
1/2	1/2																																																																																													
1/2	-1/2																																																																																													
-1/2	-1/2																																																																																													
$1 \times 1/2$				<table border="1"> <tr><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2</td></tr> </table>		3/2	+3/2	<table border="1"> <tr><td>3/2</td><td>1/2</td></tr> <tr><td>+1/2</td><td>+1/2</td></tr> </table>		3/2	1/2	+1/2	+1/2																																																																																	
3/2																																																																																														
+3/2																																																																																														
3/2	1/2																																																																																													
+1/2	+1/2																																																																																													
<table border="1"> <tr><td>+1</td><td>+1/2</td></tr> <tr><td>+1</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>0</td><td>+1/2</td></tr> </table>		+1	+1/2	+1	-1/2	0	+1/2	<table border="1"> <tr><td>1/3</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>2/3</td><td>-1/3</td></tr> <tr><td>0</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>-1</td><td>+1/2</td></tr> </table>		1/3	2/3	2/3	-1/3	0	-1/2	-1	+1/2	<table border="1"> <tr><td>3/2</td><td>1/2</td></tr> <tr><td>-1/2</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>2/3</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>1/3</td><td>-2/3</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> </table>		3/2	1/2	-1/2	-1/2	2/3	1/3	1/3	-2/3	-1	-1/2	-1	-1/2	1	1	<table border="1"> <tr><td>2</td></tr> <tr><td>+2</td></tr> </table>		2	+2																																																									
+1	+1/2																																																																																													
+1	-1/2																																																																																													
0	+1/2																																																																																													
1/3	2/3																																																																																													
2/3	-1/3																																																																																													
0	-1/2																																																																																													
-1	+1/2																																																																																													
3/2	1/2																																																																																													
-1/2	-1/2																																																																																													
2/3	1/3																																																																																													
1/3	-2/3																																																																																													
-1	-1/2																																																																																													
-1	-1/2																																																																																													
1	1																																																																																													
2																																																																																														
+2																																																																																														
<table border="1"> <tr><td>+1</td><td>+1</td></tr> <tr><td>+1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>+1</td></tr> </table>		+1	+1	+1	0	0	+1	<table border="1"> <tr><td>1/2</td><td>1/2</td></tr> <tr><td>1/2</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>1/2</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>1/6</td><td>1/2</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>-1</td><td>+1</td></tr> </table>		1/2	1/2	1/2	-1/2	1/2	-1/2	1/6	1/2	0	0	-1	+1	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1/6</td><td>1/2</td></tr> <tr><td>1/6</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>1/6</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>2/3</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>-1/3</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-1</td></tr> <tr><td>0</td><td>-1</td></tr> <tr><td>-1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1/2</td><td>1/2</td></tr> <tr><td>1/2</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>-2</td><td>-2</td></tr> <tr><td>-1</td><td>1</td></tr> </table>		2	1	0	0	0	0	1/6	1/2	1/6	-1/2	1/6	1/3	2/3	0	0	-1/3	2	1	-1	-1	0	-1	-1	0	1/2	1/2	1/2	-1/2	-1	-1	2	2	-2	-2	-1	1																																			
+1	+1																																																																																													
+1	0																																																																																													
0	+1																																																																																													
1/2	1/2																																																																																													
1/2	-1/2																																																																																													
1/2	-1/2																																																																																													
1/6	1/2																																																																																													
0	0																																																																																													
-1	+1																																																																																													
2	1																																																																																													
0	0																																																																																													
0	0																																																																																													
1/6	1/2																																																																																													
1/6	-1/2																																																																																													
1/6	1/3																																																																																													
2/3	0																																																																																													
0	-1/3																																																																																													
2	1																																																																																													
-1	-1																																																																																													
0	-1																																																																																													
-1	0																																																																																													
1/2	1/2																																																																																													
1/2	-1/2																																																																																													
-1	-1																																																																																													
2	2																																																																																													
-2	-2																																																																																													
-1	1																																																																																													
$2 \times 1/2$				<table border="1"> <tr><td>5/2</td></tr> <tr><td>+5/2</td></tr> </table>		5/2	+5/2	<table border="1"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2</td><td>+3/2</td></tr> </table>		5/2	3/2	+3/2	+3/2																																																																																	
5/2																																																																																														
+5/2																																																																																														
5/2	3/2																																																																																													
+3/2	+3/2																																																																																													
<table border="1"> <tr><td>+2</td><td>1/2</td></tr> <tr><td>+2</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>+1</td><td>+1/2</td></tr> </table>		+2	1/2	+2	-1/2	+1	+1/2	<table border="1"> <tr><td>1/5</td><td>4/5</td></tr> <tr><td>4/5</td><td>-1/5</td></tr> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+1/2</td><td>+1/2</td></tr> </table>		1/5	4/5	4/5	-1/5	5/2	3/2	+1/2	+1/2	<table border="1"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>2/5</td><td>3/5</td></tr> <tr><td>0</td><td>+1/2</td></tr> <tr><td>3/5</td><td>-2/5</td></tr> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>-1/2</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>3/5</td><td>2/5</td></tr> <tr><td>2/5</td><td>-3/5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>-2</td><td>+1/2</td></tr> <tr><td>4/5</td><td>1/5</td></tr> <tr><td>1/5</td><td>-4/5</td></tr> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>-3/2</td><td>-3/2</td></tr> <tr><td>-2</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> </table>		5/2	3/2	2/5	3/5	0	+1/2	3/5	-2/5	5/2	3/2	-1/2	-1/2	3/5	2/5	2/5	-3/5	-1	-1/2	-2	+1/2	4/5	1/5	1/5	-4/5	5/2	3/2	-3/2	-3/2	-2	-1/2	1	1																																											
+2	1/2																																																																																													
+2	-1/2																																																																																													
+1	+1/2																																																																																													
1/5	4/5																																																																																													
4/5	-1/5																																																																																													
5/2	3/2																																																																																													
+1/2	+1/2																																																																																													
5/2	3/2																																																																																													
2/5	3/5																																																																																													
0	+1/2																																																																																													
3/5	-2/5																																																																																													
5/2	3/2																																																																																													
-1/2	-1/2																																																																																													
3/5	2/5																																																																																													
2/5	-3/5																																																																																													
-1	-1/2																																																																																													
-2	+1/2																																																																																													
4/5	1/5																																																																																													
1/5	-4/5																																																																																													
5/2	3/2																																																																																													
-3/2	-3/2																																																																																													
-2	-1/2																																																																																													
1	1																																																																																													
2×1				<table border="1"> <tr><td>3</td></tr> <tr><td>+3</td></tr> </table>		3	+3	<table border="1"> <tr><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>+2</td><td>+2</td></tr> </table>		3	2	+2	+2																																																																																	
3																																																																																														
+3																																																																																														
3	2																																																																																													
+2	+2																																																																																													
<table border="1"> <tr><td>+2</td><td>+1</td></tr> <tr><td>+2</td><td>0</td></tr> <tr><td>+1</td><td>+1</td></tr> </table>		+2	+1	+2	0	+1	+1	<table border="1"> <tr><td>1/3</td><td>2/3</td></tr> <tr><td>2/3</td><td>-1/3</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>+1</td><td>+1</td></tr> <tr><td>+2</td><td>-1</td></tr> <tr><td>+1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>+1</td></tr> </table>		1/3	2/3	2/3	-1/3	3	2	+1	+1	+2	-1	+1	0	0	+1	<table border="1"> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>+1</td><td>+1</td><td>+1</td></tr> <tr><td>1/15</td><td>1/3</td><td>3/5</td></tr> <tr><td>8/15</td><td>1/6</td><td>-3/10</td></tr> <tr><td>6/15</td><td>-1/2</td><td>1/10</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>+1</td><td>-1</td><td>1/5</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>3/5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>+1</td><td>1/5</td></tr> <tr><td>1/2</td><td>3/10</td><td>3/10</td></tr> <tr><td>0</td><td>-2/5</td><td>0</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td></tr> <tr><td>6/15</td><td>1/2</td><td>1/10</td></tr> <tr><td>8/15</td><td>-1/6</td><td>-3/10</td></tr> <tr><td>1/15</td><td>-1/3</td><td>3/5</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>-2</td><td>-2</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-1</td></tr> <tr><td>-2</td><td>0</td></tr> <tr><td>2/3</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>1/3</td><td>-2/3</td></tr> <tr><td>3</td><td>-3</td></tr> <tr><td>-2</td><td>-1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> </table>		3	2	1	+1	+1	+1	1/15	1/3	3/5	8/15	1/6	-3/10	6/15	-1/2	1/10	3	2	1	0	0	0	+1	-1	1/5	0	0	3/5	-1	+1	1/5	1/2	3/10	3/10	0	-2/5	0	3	2	1	-1	-1	-1	6/15	1/2	1/10	8/15	-1/6	-3/10	1/15	-1/3	3/5	3	2	-2	-2	-1	-1	-2	0	2/3	1/3	1/3	-2/3	3	-3	-2	-1	1	1
+2	+1																																																																																													
+2	0																																																																																													
+1	+1																																																																																													
1/3	2/3																																																																																													
2/3	-1/3																																																																																													
3	2																																																																																													
+1	+1																																																																																													
+2	-1																																																																																													
+1	0																																																																																													
0	+1																																																																																													
3	2	1																																																																																												
+1	+1	+1																																																																																												
1/15	1/3	3/5																																																																																												
8/15	1/6	-3/10																																																																																												
6/15	-1/2	1/10																																																																																												
3	2	1																																																																																												
0	0	0																																																																																												
+1	-1	1/5																																																																																												
0	0	3/5																																																																																												
-1	+1	1/5																																																																																												
1/2	3/10	3/10																																																																																												
0	-2/5	0																																																																																												
3	2	1																																																																																												
-1	-1	-1																																																																																												
6/15	1/2	1/10																																																																																												
8/15	-1/6	-3/10																																																																																												
1/15	-1/3	3/5																																																																																												
3	2																																																																																													
-2	-2																																																																																													
-1	-1																																																																																													
-2	0																																																																																													
2/3	1/3																																																																																													
1/3	-2/3																																																																																													
3	-3																																																																																													
-2	-1																																																																																													
1	1																																																																																													
$3/2 \times 1/2$				<table border="1"> <tr><td>2</td></tr> <tr><td>+2</td></tr> </table>		2	+2	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>+1</td><td>+1</td></tr> </table>		2	1	+1	+1																																																																																	
2																																																																																														
+2																																																																																														
2	1																																																																																													
+1	+1																																																																																													
<table border="1"> <tr><td>+3/2</td><td>+1/2</td></tr> <tr><td>+3/2</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>+1/2</td><td>+1/2</td></tr> </table>		+3/2	+1/2	+3/2	-1/2	+1/2	+1/2	<table border="1"> <tr><td>1/4</td><td>3/4</td></tr> <tr><td>3/4</td><td>-1/4</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1/2</td><td>1/2</td></tr> <tr><td>-1/2</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>1/2</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>-1/2</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>3/4</td><td>1/4</td></tr> <tr><td>1/4</td><td>-3/4</td></tr> <tr><td>-3/2</td><td>+1/2</td></tr> <tr><td>-3/2</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> </table>		1/4	3/4	3/4	-1/4	2	1	0	0	1/2	1/2	-1/2	-1/2	1/2	-1/2	-1/2	-1/2	3/4	1/4	1/4	-3/4	-3/2	+1/2	-3/2	-1/2	1	1	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>-1</td></tr> <tr><td>-1</td><td>0</td></tr> <tr><td>-2</td><td>+1</td></tr> <tr><td>6/15</td><td>1/2</td></tr> <tr><td>8/15</td><td>-1/6</td></tr> <tr><td>1/15</td><td>-1/3</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>-2</td><td>-2</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-1</td></tr> <tr><td>-2</td><td>0</td></tr> <tr><td>2/3</td><td>1/3</td></tr> <tr><td>1/3</td><td>-2/3</td></tr> <tr><td>3</td><td>-3</td></tr> <tr><td>-2</td><td>-1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> </table>		2	1	0	-1	-1	0	-2	+1	6/15	1/2	8/15	-1/6	1/15	-1/3	3	2	-2	-2	-1	-1	-2	0	2/3	1/3	1/3	-2/3	3	-3	-2	-1	1	1																									
+3/2	+1/2																																																																																													
+3/2	-1/2																																																																																													
+1/2	+1/2																																																																																													
1/4	3/4																																																																																													
3/4	-1/4																																																																																													
2	1																																																																																													
0	0																																																																																													
1/2	1/2																																																																																													
-1/2	-1/2																																																																																													
1/2	-1/2																																																																																													
-1/2	-1/2																																																																																													
3/4	1/4																																																																																													
1/4	-3/4																																																																																													
-3/2	+1/2																																																																																													
-3/2	-1/2																																																																																													
1	1																																																																																													
2	1																																																																																													
0	-1																																																																																													
-1	0																																																																																													
-2	+1																																																																																													
6/15	1/2																																																																																													
8/15	-1/6																																																																																													
1/15	-1/3																																																																																													
3	2																																																																																													
-2	-2																																																																																													
-1	-1																																																																																													
-2	0																																																																																													
2/3	1/3																																																																																													
1/3	-2/3																																																																																													
3	-3																																																																																													
-2	-1																																																																																													
1	1																																																																																													
$3/2 \times 1$				<table border="1"> <tr><td>5/2</td></tr> <tr><td>+5/2</td></tr> </table>		5/2	+5/2	<table border="1"> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>+3/2</td><td>+3/2</td></tr> </table>		5/2	3/2	+3/2	+3/2																																																																																	
5/2																																																																																														
+5/2																																																																																														
5/2	3/2																																																																																													
+3/2	+3/2																																																																																													
<table border="1"> <tr><td>+3/2</td><td>+1</td></tr> <tr><td>+3/2</td><td>0</td></tr> <tr><td>+1/2</td><td>+1</td></tr> </table>		+3/2	+1	+3/2	0	+1/2	+1	<table border="1"> <tr><td>2/5</td><td>3/5</td></tr> <tr><td>3/5</td><td>-2/5</td></tr> <tr><td>+1/2</td><td>-1</td></tr> <tr><td>+3/2</td><td>-1</td></tr> <tr><td>+1/2</td><td>0</td></tr> <tr><td>-1/2</td><td>+1</td></tr> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>-1/2</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>3/10</td><td>8/15</td></tr> <tr><td>3/5</td><td>-1/15</td></tr> <tr><td>1/10</td><td>-2/5</td></tr> <tr><td>1/2</td><td>1/2</td></tr> <tr><td>1/2</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>-1/2</td><td>-1/2</td></tr> <tr><td>3/5</td><td>2/5</td></tr> <tr><td>2/5</td><td>-3/5</td></tr> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>-3/2</td><td>-3/2</td></tr> <tr><td>-1/2</td><td>-1</td></tr> <tr><td>-3/2</td><td>0</td></tr> <tr><td>3/5</td><td>2/5</td></tr> <tr><td>2/5</td><td>-3/5</td></tr> <tr><td>5/2</td><td>3/2</td></tr> <tr><td>-5/2</td><td>-5/2</td></tr> <tr><td>-3/2</td><td>-1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> </table>		2/5	3/5	3/5	-2/5	+1/2	-1	+3/2	-1	+1/2	0	-1/2	+1	5/2	3/2	-1/2	-1/2	3/10	8/15	3/5	-1/15	1/10	-2/5	1/2	1/2	1/2	-1/2	5/2	3/2	-1/2	-1/2	3/5	2/5	2/5	-3/5	5/2	3/2	-3/2	-3/2	-1/2	-1	-3/2	0	3/5	2/5	2/5	-3/5	5/2	3/2	-5/2	-5/2	-3/2	-1	1	1																															
+3/2	+1																																																																																													
+3/2	0																																																																																													
+1/2	+1																																																																																													
2/5	3/5																																																																																													
3/5	-2/5																																																																																													
+1/2	-1																																																																																													
+3/2	-1																																																																																													
+1/2	0																																																																																													
-1/2	+1																																																																																													
5/2	3/2																																																																																													
-1/2	-1/2																																																																																													
3/10	8/15																																																																																													
3/5	-1/15																																																																																													
1/10	-2/5																																																																																													
1/2	1/2																																																																																													
1/2	-1/2																																																																																													
5/2	3/2																																																																																													
-1/2	-1/2																																																																																													
3/5	2/5																																																																																													
2/5	-3/5																																																																																													
5/2	3/2																																																																																													
-3/2	-3/2																																																																																													
-1/2	-1																																																																																													
-3/2	0																																																																																													
3/5	2/5																																																																																													
2/5	-3/5																																																																																													
5/2	3/2																																																																																													
-5/2	-5/2																																																																																													
-3/2	-1																																																																																													
1	1																																																																																													

- 2 行目に負号を付けると $(-1)^{a+b+c}$ 倍される。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = (-1)^{a+b+c} \begin{pmatrix} a & b & c \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \end{pmatrix} \quad (5.B.197)$$

- 具体的な値の例

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{a-\alpha} \delta_{ab} \delta_{\alpha,-\beta} \frac{1}{\sqrt{2a+1}} \quad (5.B.198)$$

$$\begin{pmatrix} a & a & 1 \\ \alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{a-\alpha} \frac{\alpha}{\sqrt{a(a+1)(2a+1)}} \quad (5.B.199)$$

量子化軸の回転

「系の状態を時間 t だけ時間発展させる」という操作が時間発展演算子 $\hat{U}(t) = \exp(-it\hat{H}/\hbar)$ で表されたように、「系の状態を z 軸周りに角度 θ だけ回転させる」という操作^{†89}も次のユニタリ演算子 $\hat{D}_z(\theta)$ ($\hat{D}_z^\dagger(\theta) = \hat{D}_z^{-1}(\theta) = \hat{D}_z(-\theta)$) によって表される。

$$\hat{D}_z(\theta) = \exp(-i\theta\hat{J}_z) \quad (5.B.200)$$

\hat{J}_z は系の全角運動量を表す演算子の z 成分であり、 \hbar で無次元化されている。つまり、ハミルトニアンが系の時間発展の生成子であるのに対し、全角運動量演算子は系の回転の生成子である。ある状態 $|\psi\rangle$ にある系を z 軸周りに $-\theta$ だけ回転させると、

$$|\psi'\rangle = \hat{D}_z(-\theta)|\psi\rangle = \hat{D}_z^\dagger(\theta)|\psi\rangle \quad (5.B.201)$$

という状態に変化する。あるいは、デカルト系 (x, y, z) を z 軸周りに角度 θ だけ回転させて得られる別の座標系 (x', y', z') (z 軸と z' 軸は等しい) を考えたとき、角運動量の x 成分 \hat{J}_x と x' 成分 $\hat{J}_{x'}$ の間には次の関係がある。

$$\hat{J}_{x'} = \hat{D}_z(\theta)\hat{J}_x\hat{D}_z^\dagger(\theta) \quad (5.B.202)$$

状態 $|\psi\rangle$ に対して $\hat{J}_{x'}$ を測定した結果は、状態 $|\psi'\rangle$ に対して \hat{J}_x を測定した結果に等しいことを反映して、

$$\langle\psi|\hat{J}_{x'}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{D}_z(\theta)\hat{J}_x\hat{D}_z^\dagger(\theta)|\psi\rangle = \langle\psi'|\hat{J}_x|\psi'\rangle \quad (5.B.203)$$

が成り立つ。

ある方向に x, y, z 軸を取っているとす。一般に、次の 3 つの回転操作を行うことで、任意の向きに座標軸を回転させることができる。

^{†89} z 軸周りに角度 θ だけ回転させると表現した場合、 $\theta > 0$ のときは $z > 0$ の方角から原点を見下ろすと反時計回りに見えるような回転であり、 $\theta < 0$ のときはその逆回転である。

1. z 軸周りに角度 $\alpha(0 \leq \alpha \leq 2\pi)$ だけ座標軸を回転させる。このとき、 y 軸は新しい方向を向くが、この向きを w 軸と呼ぶことにする。
2. w 軸周りに角度 $\beta(0 \leq \beta \leq \pi)$ だけ座標軸を回転させる。このとき、 z 軸は新しい方向を向くが、この向きを z' 軸と呼ぶことにする。
3. z' 軸周りに角度 $\gamma(0 \leq \gamma \leq 2\pi)$ だけ座標軸を回転させる。

α, β, γ はオイラー角と呼ばれる。この操作を演算子で表すと

$$\hat{D}(\alpha, \beta, \gamma) = \hat{D}_{z'}(\gamma)\hat{D}_w(\beta)\hat{D}_z(\alpha) \quad (5.B.204)$$

となる。

ある方向に取った z 軸を量子化軸としたときの角運動量固有状態 $|J, M'\rangle$ に対して $\hat{D}(\alpha, \beta, \gamma)$ を作用させるとどうなるかという問題を考える。つまり、

$$\hat{D}(\alpha, \beta, \gamma) |J, M'\rangle = \sum_M \mathcal{D}_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) |J, M\rangle \quad (5.B.205)$$

と表したときの係数 $\mathcal{D}_{MM'}^J = \langle J, M | \hat{D} | J, M'\rangle$ を考える。これは回転行列と呼ばれ、物理的には次のように解釈できる。 (x, y, z) 座標に対してオイラー角 (α, β, γ) だけ回転させた別の座標軸 (x', y', z') を取る。上式の左辺が角運動量の z' 成分 $\hat{J}_{z'} = \hat{D}\hat{J}_z\hat{D}^\dagger$ の固有値 M' に対する固有状態であることは、直ぐに確かめられる。つまり、角運動量の大きさが J の系を用意して z' 成分の大きさを測定したところ、 M' であることが分かったとき、同時に z 成分を測定して M が得られる確率が $|\mathcal{D}_{MM'}^J|^2$ に相当する。 $\mathcal{D}_{MM'}^J$ は次のように表される。

$$\mathcal{D}_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = \exp[-i(\alpha M + \gamma M')] d_{MM'}^J(\beta) \quad (5.B.206)$$

$$d_{MM'}^J(\beta) = \sqrt{(J+M)!(J-M)!(J+M')!(J-M')!} \cdot \sum_t (-1)^t \frac{[\cos(\beta/2)]^{2J+M-M'-2t} [\sin(\beta/2)]^{2t-M+M'}}{(J+M-t)!(J-M'-t)!t!(t+M'-M)!} \quad (5.B.207)$$

t の和は現れる階乗の中身が負にならない範囲の整数 $t \geq 0$ について取る。 $J = 1/2, 1$ の場合の $d_{MM'}^J(\beta)$ の具体的な表式を表 5.3 に示した。 $d_{MM'}^J(\beta)$ は実関数であり、次の性質を持つ。

- 合成則

$$d_{MM'}^J(\beta_1 + \beta_2) = \sum_N d_{MN}^J(\beta_1) d_{NM'}^J(\beta_2) \quad (5.B.208)$$

- 対称性

$$d_{MM'}^J(\beta) = (-1)^{M-M'} d_{-M, -M'}^J(\beta) \quad (5.B.209)$$

$$= (-1)^{M-M'} d_{M'M}^J(\beta) \quad (5.B.210)$$

$$= (-1)^{M-M'} d_{MM'}^J(-\beta) \quad (5.B.211)$$

$$= (-1)^{J+M} d_{M, -M'}^J(\pi - \beta) \quad (5.B.212)$$

$$= (-1)^{J+M'} d_{M, -M'}^J(\pi + \beta) \quad (5.B.213)$$

また、 $\mathcal{D}_{MM'}^J$ は例えば次の性質を持つ。

- ユニタリ性

$$[\mathcal{D}_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)]^* = \mathcal{D}_{M'M}^J(-\gamma, -\beta, -\alpha) \quad (5.B.214)$$

- 直交性

$$\sum_N \mathcal{D}_{NM}^J(\alpha, \beta, \gamma) [\mathcal{D}_{NM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)]^* = \delta_{MM'} \quad (5.B.215)$$

$$\sum_N \mathcal{D}_{MN}^J(\alpha, \beta, \gamma) [\mathcal{D}_{M'N}^J(\alpha, \beta, \gamma)]^* = \delta_{MM'} \quad (5.B.216)$$

- 対称性

$$[\mathcal{D}_{MM'}^J(\alpha, \beta, \gamma)]^* = (-1)^{M-M'} \mathcal{D}_{-M, -M'}^J(\alpha, \beta, \gamma) \quad (5.B.217)$$

- 完結性 (合成則) : ある座標系 (x, y, z) をオイラー角 R_1 だけ回転させた後、新しい座標系 (x', y', z') に対して更にオイラー角 R_2 だけ回転させる操作全体を表す回転行列は次のように表される。

$$\mathcal{D}_{MM'}^J(R) = \langle J, M | \hat{D}'(R_2) \hat{D}(R_1) | J, M' \rangle = \sum_N \mathcal{D}_{MN}^J(R_1) \mathcal{D}_{NM'}^J(R_2) \quad (5.B.218)$$

- 角運動量の合成則からの帰結

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{MN}^J(\alpha, \beta, \gamma) \mathcal{D}_{M'N'}^{J'}(\alpha, \beta, \gamma) \\ &= \sum_K (2K+1) \begin{pmatrix} J & J' & K \\ M & M' & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & J' & K \\ N & N' & Q' \end{pmatrix} [\mathcal{D}_{QQ'}^K(\alpha, \beta, \gamma)]^* \end{aligned} \quad (5.B.219)$$

- ワイルの定理 : J と J' がどちらも整数であるかまたはどちらも半整数である場合、次の式が成り立つ。

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^\pi d\beta \sin \beta \mathcal{D}_{MN}^J(\alpha, \beta, \gamma) [\mathcal{D}_{M'N'}^{J'}(\alpha, \beta, \gamma)]^* = \frac{8\pi^2}{2J+1} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{NN'} \quad (5.B.220)$$

5.B.8 ゼーマン分裂

球対称の原子に束縛された電子全体の状態を考える場合、系のハミルトニアンは全角運動量演算子と可換なので、同時固有状態 $|\alpha, J, M\rangle$ を考えることができる。 J は全角運動量の大きさ、 M はその z 成分の大きさを表す量子数であり、 α は電子の状態を区別するのに必要なその他の量子数をまとめたものである。微細構造 (節 5.B.6 参照) まで考慮すると、エネルギー固有値は (α, J) に依るが、 M によって区別される状態は縮退している。しかし、この原子が巨視的な外部磁場 \mathbf{B} の下に置かれると、この縮退が解けてエネルギー固有値が M にも依存するようにな

表 5.3 関数 $d_{MM'}^J(\beta)$ の $J = 1/2, 1$ の場合の具体的な表式

	$J = 1/2$	$M' = -1/2$	$M' = 1/2$
$M = -1/2$		$\cos(\beta/2)$	$\sin(\beta/2)$
$M = 1/2$		$\sin(\beta/2)$	$\cos(\beta/2)$
$J = 1$	$M' = -1$	$M' = 0$	$M' = 1$
$M = -1$	$(1 + \cos \beta)/2$	$\sin \beta/\sqrt{2}$	$(1 - \cos \beta)/2$
$M = 0$	$-\sin \beta/\sqrt{2}$	$\cos \beta$	$\sin \beta/\sqrt{2}$
$M = 1$	$(1 - \cos \beta)/2$	$-\sin \beta/\sqrt{2}$	$(1 + \cos \beta)/2$

る。これをゼーマン分裂と言う。荷電粒子が角運動量を持つと磁気モーメントも持つが、この磁気モーメントが外部磁場と相互作用した結果、角運動量の磁場に対する向きにエネルギーが依存するわけである。このときのエネルギー固有値の変化量は磁場の強さに依存するが、磁場が弱い場合と強い場合ではその挙動が異なる。前者はゼーマン効果、後者 (或いは磁場が強くなると共に前者から後者の挙動に移行すること) はパッシェン-バック効果と呼ばれる。

摂動の一般論

系のハミルトニアンが次のように表される場合を考える。

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{V} \tag{5.B.221}$$

\hat{H}_0 はハミルトニアンの主要な部分で、そこに微小な効果 $\lambda \hat{V}$ が加わった形である。 \hat{H}_0 の固有値 $E_n^{(0)}$ と固有状態 $|\psi_{n,i}\rangle$ は既知であるとする。ただし、 $E_n^{(0)}$ に対応する固有状態は N_n 重に縮退していて、添え字 $i (i = 1, 2, \dots, N_n)$ は縮退の自由度を表しているとする。各状態は $\langle \psi_{n,i} | \psi_{n,j} \rangle = \delta_{ij}$ と規格化されている。

\hat{H} の固有状態 $|\psi_n\rangle$ とそれに対する固有値 E_n を計算する。

$$\hat{H} |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle \tag{5.B.222}$$

λ が十分に小さい場合は摂動展開という手法で計算できる。 $|\psi_n\rangle$ と E_n を次のように展開する。

$$|\psi_n\rangle = |\psi_{n,i}^{(0)}\rangle + \lambda |\psi_n^{(1)}\rangle + \lambda^2 |\psi_n^{(2)}\rangle + \dots \tag{5.B.223}$$

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots \tag{5.B.224}$$

上式を式 (5.B.222) に代入して、 λ の次数が同じ項を取り出すと、次のようになる。

$$0 \text{ 次: } (E_n^{(0)} - \hat{H}_0) |\psi_n^{(0)}\rangle = 0 \tag{5.B.225}$$

$$1 \text{ 次: } (E_n^{(0)} - \hat{H}_0) |\psi_n^{(1)}\rangle = (\hat{V} - E_n^{(1)}) |\psi_n^{(0)}\rangle \tag{5.B.226}$$

0 次の式より、 $|\psi_n^{(0)}\rangle$ は \hat{H}_0 の固有状態であり、従って $|\psi_{n,i}\rangle$ の重ね合わせで

$$|\psi_n^{(0)}\rangle = \sum_j c_j |\psi_{n,j}\rangle \quad (5.B.227)$$

と書ける。1 次の式の両辺に左から $\langle\psi_{n,i}|$ を作用させると、

$$0 = \langle\psi_{n,i}|(\hat{V} - E_n^{(1)})|\psi_n^{(0)}\rangle \quad (5.B.228)$$

を得る。この式に式 (5.B.227) を代入すると、次の式を得る。

$$\sum_j \langle\psi_{n,i}|\hat{V}|\psi_{n,j}\rangle c_j = E_n^{(1)} c_i \quad (5.B.229)$$

同様にして他の i に対する $\langle\psi_{n,i}|$ を 1 次の式に作用させることで、 N_n 個の式が導出され、行列にまとめると次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1N_n} \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2N_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{N_n1} & V_{N_n2} & \cdots & V_{N_nN_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N_n} \end{pmatrix} = E_n^{(1)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N_n} \end{pmatrix} \quad (5.B.230)$$

$$\text{ただし, } V_{ij} = \langle\psi_{n,i}|\hat{V}|\psi_{n,j}\rangle \quad (5.B.231)$$

2 次以上の摂動は無視する。同じ次数の項を取り出し易くするために敢えて摂動項を $\lambda\hat{V}$ と書いて議論したが、摂動項を \hat{V} と書き換えて同じ議論を行う^{†90}と、摂動が加わったことによるエネルギー固有値の変化量 $E_n^{(1)}$ は、上式の行列 (すなわち \hat{V}) の固有値問題を解くことで求まる。異なる値の固有値 $E_n^{(1)}$ が求まったならば、摂動の影響で縮退が解けたことになる。上式は永年方程式と呼ばれる。

特に、 $|\psi_{n,i}\rangle$ として \hat{H}_0 と何らかの観測量 \hat{O} の同時固有状態を考えていて、 i は \hat{O} の固有値 ν_i を区別するための量子数であり、 \hat{O} についての縮退は無いとする。

$$i \neq j \text{ ならば } \nu_i \neq \nu_j \quad (5.B.232)$$

このとき、 \hat{O} と \hat{V} が可換 $[\hat{O}, \hat{V}] = 0$ ならば、

$$0 = \langle\psi_{n,i}|(\hat{O}\hat{V} - \hat{V}\hat{O})|\psi_{n,j}\rangle \quad (5.B.233)$$

$$= (\nu_i - \nu_j) \langle\psi_{n,i}|\hat{V}|\psi_{n,j}\rangle \quad (5.B.234)$$

となるため、 $i \neq j$ のときは $V_{ij} = \langle\psi_{n,i}|\hat{V}|\psi_{n,j}\rangle = 0$ であり、式 (5.B.230) の行列は対角行列になる。故に、

$$E_{n,i}^{(1)} = \langle\psi_{n,i}|\hat{V}|\psi_{n,i}\rangle \quad (5.B.235)$$

を計算することによって N_n 個のエネルギー変化量 $E_{n,i}^{(1)}$ を求めることができる。このような $|\psi_{n,i}\rangle$ を「良い」非摂動状態と言う。

^{†90} これは上述の議論で $\lambda = 1$ と置く操作と等価である。

磁場が弱い場合のゼーマン分裂

原子に外部磁場 \mathbf{B} が加わった場合、ハミルトニアンに次の項が加わる^{†91}。

$$\hat{H}_B = \mu_B (\hat{\mathbf{L}} + 2\hat{\mathbf{S}}) \cdot \mathbf{B} \quad (5.B.236)$$

$$\text{ただし, } \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 0.927 \times 10^{-23} \text{ J T}^{-1} \quad (5.B.237)$$

$\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{S}}$ はそれぞれ束縛電子の全軌道角運動量と全スピン角運動量である。ただし、両方とも \hbar で無次元化されている。 μ_B はボーア磁子と呼ばれる。この項を摂動として前述した摂動論を用いる。

比較的原子量の小さい原子の束縛電子全体のエネルギー固有値は、微細構造まで考慮すると近似的に、電子配置を表す適当な量子数 (の組) β に加えて、全軌道角運動量 $\hat{\mathbf{L}}$ の大きさ L 、全スピン角運動量 $\hat{\mathbf{S}}$ の大きさ S 、全角運動量 $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ の大きさ J に依存する^{†92}。そして、それぞれのエネルギー固有値 $E_{\beta,L,S,J}$ に対する固有状態は $(2J+1)$ 重に縮退していて、例えば \hat{J}_z の固有値 M によって区別できる。この固有状態 $|\beta, L, S, J, M\rangle$ を非摂動状態とする。エネルギー固有値の 1 次の摂動を求めるために、

$$H_{MM'} = \langle \beta, L, S, J, M | \hat{H}_B | \beta, L, S, J, M' \rangle \quad (5.B.238)$$

$$= \mu_B \langle \beta, L, S, J, M | \hat{\mathbf{J}} | \beta, L, S, J, M' \rangle \cdot \mathbf{B} + \mu_B \langle \beta, L, S, J, M | \hat{\mathbf{S}} | \beta, L, S, J, M' \rangle \cdot \mathbf{B} \quad (5.B.239)$$

を要素とする行列を対角化する。そのために、次の式が成り立つことを用いる。

$$\langle \alpha, J, M | \hat{\mathbf{S}} | \alpha', J, M' \rangle = \left\langle \alpha, J, M \left| \frac{(\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{J}}) \hat{\mathbf{J}}}{J(J+1)} \right| \alpha', J, M' \right\rangle \quad (5.B.240)$$

これは射影定理 (projection theorem) と呼ばれる。詳しい説明は例えば Landi Degl'Innocenti & Landolfi (2004) を読んで欲しい。この式は現象論的には次のように解釈できる。今は外部磁場によるトルクが小さいので、全角運動量 \mathbf{J} は保存されると考えている。よって、全スピン角運動量 \mathbf{S} は勝手な方向を向けず、全軌道角運動量 \mathbf{L} と共に \mathbf{J} の周りを図 5.19 のように歳差運動するような組み合わせのみが許される。時間平均を取ると \mathbf{S} は \mathbf{J} に平行な成分のみを持つ。従って有効的には上式が成り立つことが期待される。上式に加え、

$$\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{J}} = \frac{1}{2} (\hat{J}^2 + \hat{S}^2 - \hat{L}^2) \quad (5.B.241)$$

と変形できることも用い、磁場 \mathbf{B} は z 方向を向いているとすると、 $\hat{H}_{MM'}$ は次のように計算で

^{†91} この項は 1 電子原子の場合には電磁場の存在下でのディラック方程式 (393 ページの脚注参照) の非相対論的極限を考えることによって導かれる。

^{†92} このように (L, S, J) を用いて準位を指定することができる場合を LS 結合と言う。詳しくは量子化学の本を読んで欲しい。

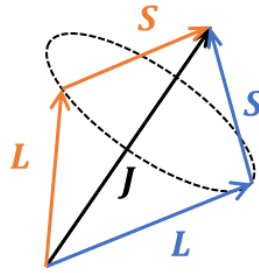


図 5.19 全角運動量 J と全軌道角運動量 L 、全スピン角運動量 S の間の関係

きる。

$$H_{MM'} = \mu_B B \langle \beta, L, S, J, M | \hat{J}_z | \beta, L, S, J, M' \rangle + \mu_B B \frac{\langle \beta, L, S, J, M | (\hat{J}^2 + \hat{S}^2 - \hat{L}^2) \hat{J}_z | \beta, L, S, J, M' \rangle}{2J(J+1)} \quad (5.B.242)$$

$$= \mu_B g_{LSJ} M B \delta_{MM'} \quad (5.B.243)$$

ただし、
$$g_{LSJ} = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (5.B.244)$$

g_{LSJ} はランデの g 因子と呼ばれる。 $H_{MM'}$ が対角化できたので、前述した摂動論に従って、非摂動状態からのエネルギー固有値の変化量 δE_M は次のように書ける。

$$\delta E_M = \mu_B g_{LSJ} M B \quad (5.B.245)$$

$|\beta, L, S, J, M\rangle$ の M についての縮退は解け、エネルギー準位は全軌道角運動量の外部磁場に平行な成分 M に依存するようになる。そのずれ幅は外部磁場の強さ B に比例する。

磁場が強い場合のゼーマン分裂 (パッシュェン-バック効果)

磁場が強くなってゼーマン分裂の幅が微細構造より大きくなっているような状況では、摂動論の非摂動状態として微細構造を考慮した状態 $|\beta, L, S, J, M\rangle$ を考えることができない。これは物理的には、 \hat{J} が外部磁場の影響で最早保存していると考えられないということである。微細構造は無視することにして外部磁場による摂動のみを考えることにする。この場合、非摂動状態として $|\beta, L, S, m_L, m_S\rangle$ を考える。すなわち、非摂動時のエネルギー固有値は β, L, S に依存し、各固有値に対する固有状態は $(2L+1)(2S+1)$ 重に縮退している。縮退したそれぞれの状態は \hat{L}_z, \hat{S}_z の固有値 (m_L, m_S) の組によって区別される。すると、摂動項 (5.B.236) の行列要素は次のように計算できる。

$$\langle \beta, L, S, m_L, m_S | \hat{H}_B | \beta, L, S, m'_L, m'_S \rangle = \mu_B (m_L + 2m_S) B \delta_{m_L m'_L} \delta_{m_S m'_S} \quad (5.B.246)$$

つまり、外部磁場によるエネルギー準位の変化量は次のように書ける。

$$\delta E = \mu_B (m_L + 2m_S) B \quad (5.B.247)$$

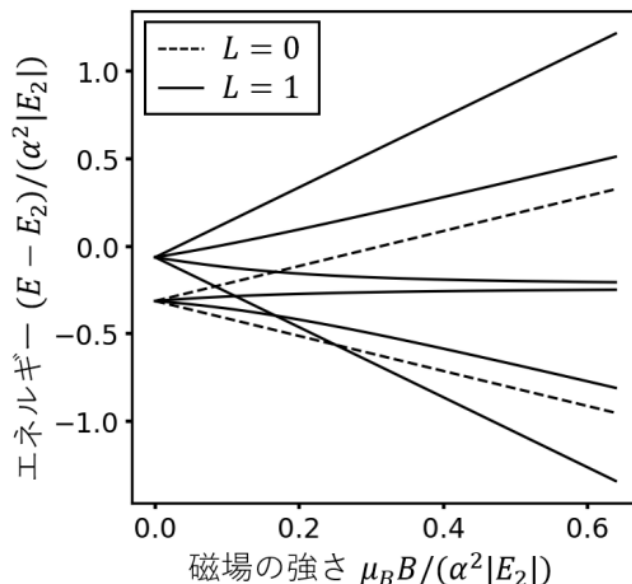


図 5.20 水素原子の $n = 2$ 軌道のゼーマン分裂の様子：破線は $L = 0$ の軌道、実線は $L = 1$ の軌道の準位を表す。縦軸は $E_2 = -m_e \alpha^2 c^2 / 8$ を原点に取っている。横軸はボーア磁子に乗じることで、磁場の強さをエネルギーの単位で表している。縦軸、横軸共に、 $\alpha^2 |E_2|$ で規格化されている。Griffiths (2013) を参考にした。

微細構造を無視すれば、外部磁場が十分に大きいときは $(m_L + 2m_S)$ の値に従って分裂する。

図 5.20 に水素原子の主量子数 $n = 2$ の電子軌道のゼーマン分裂の様子を示した。破線は $L = 0$ 、実線は $L = 1$ の軌道を表す。 $S = 1/2$ なので、 J のとり得る値は $1/2$ か $3/2$ である。よって、 $B = 0$ のときは微細構造により 2 つの準位に分裂している。磁場の弱い領域では、各準位はそれぞれの g_{LSJM} の値を傾きとして分裂する。 $(m_L + 2m_S)$ の取り得る値は $-2, -1, 0, 1, 2$ の 5 通りであり、 B が十分に大きい領域では各線は 5 種類の傾きに漸近している^{†93}。

5.B.9 粒子の識別不能性

同種の粒子は互いに識別することができない。場の量子論の範疇で考えると、この性質は理論に自然に組み込まれるが、シュレディンガー理論で考える場合には、問題に応じて自分の手で組み込む必要がある。考えている系において、同種の粒子を置換する (入れ替える) という操作 \hat{U} を考える。 \hat{U} の具体的な性質は問題によって異なる。識別不能性とは、この操作をしても系

^{†93} 図 5.20 で描かれているような線を求めるためには、微細構造ハミルトニアンと外部磁場によるハミルトニアンの和 $\hat{H}_r + \hat{H}_{so} + \hat{H}_B$ を束縛電子ハミルトニアンに対する摂動として扱い、例えば $|\beta, L, S, m_L, m_S\rangle$ を非摂動状態として用いて永年方程式を解くことになる。 $|\beta, L, S, m_L, m_S\rangle$ は良い非摂動状態ではないため、永年方程式には非対角要素が現れる。詳しくは量子力学か量子化学の本を読んで欲しい。

全体の状態 $|\psi\rangle$ が位相の任意性を残して変わらないということなので、 θ を実数として、

$$\hat{U}|\psi\rangle = \exp(i\theta)|\psi\rangle \quad (5.B.248)$$

と書ける。置換を 2 回行くと元に戻るので、

$$\hat{U}^2|\psi\rangle = \exp(2i\theta)|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad (5.B.249)$$

となる。すなわち $\exp(i\theta) = \pm 1$ である。置換を施しても状態が変わらない性質を持つ粒子がボース粒子、置換を施すと状態に負号が付く粒子がフェルミ粒子である。

2 つの同種粒子が同じ状態にあると仮定する。このとき、置換操作は恒等演算子になるので、系全体の状態 $|\psi\rangle$ は

$$\hat{U}|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad (5.B.250)$$

という関係を満たす。これはボース粒子の性質そのものなので、ボース粒子の場合は問題なくこの状態を考えられるが、フェルミ粒子の場合はその性質

$$\hat{U}|\psi\rangle = -|\psi\rangle \quad (5.B.251)$$

と併せて、 $|\psi\rangle = 0$ となる。すなわち、フェルミ粒子の場合は同種粒子が同じ状態にある、という系全体の状態を考えることができない。これはパウリの排他律と呼ばれる。

例えば H_2 分子の剛体回転運動の固有状態 $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ を考える場合、この 2 つの H 原子を置換するという操作は、節 5.B.5 で考えた相対位置 $\mathbf{r} = \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A$ において A と B を入れ替えるという操作なので、今まで考えていた \mathbf{r} を $-\mathbf{r}$ に置き換えるという操作になる。つまり、座標 x_i を反転させるという操作であり、その操作は極座標においては

$$\theta \longrightarrow \pi - \theta, \quad \phi \longrightarrow \phi + \pi \quad (5.B.252)$$

と置き換える操作に相当する。図 1.11, 1.12, 1.13 を見ればイメージが掴められるが^{†94}、球面調和関数には

$$l \text{ が奇数のとき, } Y_{l,m}(\pi - \theta, \phi + \pi) = -Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (5.B.253)$$

$$l \text{ が偶数のとき, } Y_{l,m}(\pi - \theta, \phi + \pi) = Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (5.B.254)$$

という性質がある。節 3.B.4 ではこのことを用いて、オルト水素とパラ水素に関する考察をした。

^{†94} 図において、 z 軸周りに 180° 回転させてから z 軸を反転させるという操作を考えている。

5.B.10 量子力学的放射場：光子

節 5.A.4 と 5.A.5 で述べた放射場に関する正準変数 $Q_{k,\alpha}(t), P_{k,\alpha}(t)$ について、各時刻において次の交換関係を満たすことを要請して、放射場を量子化する。

$$[\hat{Q}_{k,\alpha}, \hat{P}_{k',\alpha'}] = i\hbar\delta_{kk'}\delta_{\alpha\alpha'} \quad (5.B.255)$$

$$[\hat{Q}_{k,\alpha}, \hat{Q}_{k',\alpha'}] = 0 \quad (5.B.256)$$

$$[\hat{P}_{k,\alpha}, \hat{P}_{k',\alpha'}] = 0 \quad (5.B.257)$$

そして次のような演算子を導入する。

$$\hat{a}_{k,\alpha} = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\hat{Q}_{k,\alpha} + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}\hat{P}_{k,\alpha}, \quad \hat{a}_{k,\alpha}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}\hat{Q}_{k,\alpha} - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}}\hat{P}_{k,\alpha} \quad (5.B.258)$$

この演算子は

$$[\hat{a}_{k,\alpha}, \hat{a}_{k',\alpha'}^\dagger] = \delta_{kk'}\delta_{\alpha\alpha'} \quad (5.B.259)$$

$$[\hat{a}_{k,\alpha}, \hat{a}_{k',\alpha'}] = 0 \quad (5.B.260)$$

$$[\hat{a}_{k,\alpha}^\dagger, \hat{a}_{k',\alpha'}^\dagger] = 0 \quad (5.B.261)$$

という交換関係を満たすことが少しの計算から分かる。これは生成消滅演算子 (節 5.B.4 参照) のアイデンティティである。式 (5.A.70) と見比べると、節 5.A.4 での $c_{k,\alpha}, c_{k,\alpha}^*$ について、

$$c_{k,\alpha} \longrightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega}}\hat{a}_{k,\alpha}, \quad c_{k,\alpha}^* \longrightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega}}\hat{a}_{k,\alpha}^\dagger \quad (5.B.262)$$

と置き換えることによって量子化をしていることになる^{†95}。この置き換えによって、ベクトルポテンシャルは

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega}} \mathbf{e}_{k,\alpha} \left[\hat{a}_{k,\alpha}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \hat{a}_{k,\alpha}^\dagger(t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \right] \quad (5.B.263)$$

という演算子になる^{†96}。このように、引数 \mathbf{x}, t を持つ演算子は場の演算子と呼ばれる。式 (5.A.67) において $2|c_{k,\alpha}|^2$ が $c_{k,\alpha}^* c_{k,\alpha} + c_{k,\alpha} c_{k,\alpha}^*$ という形で出てきた項をまとめたものである

^{†95} このように、場の量を平面波展開して係数を生成消滅演算子に置き換える量子化の手法は第二量子化と呼ばれる。 $p_i \rightarrow -i\hbar\partial/\partial x_i$ と置き換える量子化の手法を第一種の量子化と考えるのである。このような第一量子化が、古典的に粒子と考えられていた存在に波動性を取り入れる手続きであると考え、第二量子化は古典的に場の量 (波動) と考えられていた存在に粒子性を取り入れる手続きであると解釈できる。

^{†96} 今は MKSA 単位系で記述しているので $\sqrt{\hbar/(2\epsilon_0 V \omega)}$ という因子が出てくる。ガウス単位系での記述にするには、 ϵ_0 を $1/(4\pi)$ に書き換え、ガウス単位系でのベクトルポテンシャルは MKSA 単位系における $c\mathbf{A}$ として定義されていることを考慮する。すると、この因子は $\sqrt{2\pi\hbar c^2/(V\omega)}$ と書き換えられる。

ことを思い出して、

$$2|c_{k,\alpha}|^2 \rightarrow \frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega} (\hat{a}_{k,\alpha}^\dagger \hat{a}_{k,\alpha} + \hat{a}_{k,\alpha} \hat{a}_{k,\alpha}^\dagger) \quad (5.B.264)$$

$$= \frac{\hbar}{\epsilon_0\omega} \left(\hat{a}_{k,\alpha}^\dagger \hat{a}_{k,\alpha} + \frac{1}{2} \right) \quad (5.B.265)$$

$$= \frac{\hbar}{\epsilon_0\omega} \left(\hat{N}_{k,\alpha} + \frac{1}{2} \right) \quad (5.B.266)$$

と置き換えれば、放射場のハミルトニアンは調和振動子の場合と同じように、

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} \hbar\omega \left(\hat{N}_{k,\alpha} + \frac{1}{2} \right) \quad (5.B.267)$$

と書ける。

任意の固有モード (\mathbf{k}, α) について、その固有モードにおける数演算子 $\hat{N}_{k,\alpha}$ の、固有値 $n_{k,\alpha}$ (非負整数) に対する固有状態を $|n_{k,\alpha}\rangle$ と書き、各モードでの固有状態のテンソル積

$$|n_{k_1,1}, n_{k_1,2}, n_{k_2,1}, \dots, n_{k_l,\alpha}, \dots\rangle = |n_{k_1,1}\rangle \otimes |n_{k_1,2}\rangle \otimes |n_{k_2,1}\rangle \otimes \dots \otimes |n_{k_l,\alpha}\rangle \otimes \dots \quad (5.B.268)$$

を考える。このような状態はフォック状態と呼ばれる。ここに $\hat{N}_{k_l,\alpha}$ を作用させると、 $|n_{k_l,\alpha}\rangle$ の部分のみに作用し、

$$\hat{N}_{k_l,\alpha} |n_{k_1,1}, n_{k_1,2}, n_{k_2,1}, \dots, n_{k_l,\alpha}, \dots\rangle = n_{k_l,\alpha} |n_{k_1,1}, n_{k_1,2}, n_{k_2,1}, \dots, n_{k_l,\alpha}, \dots\rangle \quad (5.B.269)$$

となる。よって、この状態は \hat{H} の固有状態でもあり、その固有値は

$$E = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} \left(n_{k,\alpha} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (5.B.270)$$

となる^{†97}。つまり、固有モード (\mathbf{k}_l, α) にある光子のエネルギーを $\hbar\omega_{k_l}$ とすれば、フォック状態 $|n_{k_1,1}, n_{k_1,2}, n_{k_2,1}, \dots, n_{k_l,\alpha}, \dots\rangle$ は固有モード (\mathbf{k}_l, α) にある光子数が $n_{k_l,\alpha}$ に確定した状態と解釈できる。全てのモードにおいて $\hat{N}_{k,\alpha}$ の固有値がゼロである状態

$$|0\rangle = |0_{k_1,1}, 0_{k_1,2}, 0_{k_2,1}, \dots, 0_{k_l,\alpha}, \dots\rangle \quad (5.B.271)$$

は真空状態と呼ばれる。あるモード (\mathbf{k}_l, α) に光子が 1 個だけある状態は $\hat{a}_{k_l,\alpha}^\dagger |0\rangle$ と表せる。つまり、任意の規格化されたフォック状態は

$$|n_{k_1,1}, n_{k_1,2}, n_{k_2,1}, \dots, n_{k_l,\alpha}, \dots\rangle = \prod_{(\mathbf{k}_l, \alpha)} \frac{(\hat{a}_{k_l,\alpha}^\dagger)^{n_{k_l,\alpha}}}{\sqrt{n_{k_l,\alpha}!}} |0\rangle \quad (5.B.272)$$

^{†97} $\omega = c|\mathbf{k}|$ は \mathbf{k} に依るので正確には $\omega_{\mathbf{k}}$ と書くべきだが、省略している。

と表せる。系の一般の状態をフォック状態の重ね合わせで表して考えることをフォック表示と言う。真空状態のエネルギーを原点にとると、ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} \hbar\omega \hat{N}_{\mathbf{k},\alpha} \quad (5.B.273)$$

となる。

$\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}$ は時間に依存する演算子であり、ハイゼンベルクの運動方程式

$$i\hbar \frac{d\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}(t)}{dt} = [\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}(t), \hat{H}] \quad (5.B.274)$$

$$= \hbar\omega \hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}(t) \quad (5.B.275)$$

に従う。つまり、

$$\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}(t) = \hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}(0) \exp(-i\omega t) \quad (5.B.276)$$

と書ける。結局 $\hat{\mathbf{A}}$ は

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega}} \mathbf{e}_{\mathbf{k},\alpha} \left[\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}(0) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] + \hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}^{\dagger}(0) \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \right] \quad (5.B.277)$$

と書ける。

系の運動量演算子は、式 (5.A.79) において置き換えを行うことで、

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} \hbar \mathbf{k} \left(\hat{N}_{\mathbf{k},\alpha} + \frac{1}{2} \right) \quad (5.B.278)$$

となる。ただし、全ての (\mathbf{k}, α) についての和を取ると $1/2$ の項の寄与は相殺して消えるため、

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\alpha} \hbar \mathbf{k} \hat{N}_{\mathbf{k},\alpha} \quad (5.B.279)$$

と書ける。つまり、あるモード (\mathbf{k}_l, α) にある光子の運動量は $\hbar \mathbf{k}_l$ であると解釈できる。

系の角運動量 \mathbf{J} は 2 つの項に次のように分けられることを付録 5.A.4 で述べた。

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^{\text{O}} + \mathbf{J}^{\text{S}} \quad (5.B.280)$$

$$= -\epsilon_0 \sum_{l=1}^3 \int_V \frac{\partial A_l}{\partial t} (\mathbf{r} \times \nabla) A_l dV - \epsilon_0 \int_V \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \times \mathbf{A} dV \quad (5.B.281)$$

\mathbf{J}^{O} は \mathbf{r} に依存する項であり、量子化すると光子の相空間分布に依存する量である。 \mathbf{J}^{O} は光子の軌道角運動量であると解釈される^{†98}。一方で \mathbf{J}^{S} は光子の位置や運動量の大きさには依らず、

^{†98} 光子の軌道角運動量については、例えば Barnett et al. (2017), Calvo et al. (2006), Cameron (2014) を参考にして欲しい。

偏光状態に依存する項であることをこれから説明する。 \mathbf{J}^S は光子のスピン角運動量と解釈される。式 (5.A.87) において置き換えを行うと、

$$\mathbf{J}^S = \sum_{\mathbf{k}} i\hbar \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} (\hat{a}_{k,1} \hat{a}_{k,2}^\dagger - \hat{a}_{k,1}^\dagger \hat{a}_{k,2}) \quad (5.B.282)$$

となる。これまで互いに直交する 2 つの直線偏光 $\alpha = 1, 2$ の状態にある光子を考えていたが、ここで 2 つの円偏光の状態を基底として考え直すことにする。具体的には、各波数モード \mathbf{k} の生成消滅演算子について、

$$\hat{a}_{k,\pm}^\dagger = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{k,1}^\dagger \pm i\hat{a}_{k,2}^\dagger) \quad (5.B.283)$$

$$\hat{a}_{k,\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{k,1} \mp i\hat{a}_{k,2}) \quad (5.B.284)$$

という関係を満たす新たな演算子 $\hat{a}_{k,\pm}$ を導入する。複号同順である。この演算子が

$$[\hat{a}_{k,\pm}, \hat{a}_{k,\pm}^\dagger] = 1, \quad [\hat{a}_{k,\pm}, \hat{a}_{k,\mp}^\dagger] = 0 \quad (5.B.285)$$

という交換関係を満たすことは直ぐに確かめられる。 $\hat{a}_{k,+}^\dagger, \hat{a}_{k,-}^\dagger$ はそれぞれ波数モード \mathbf{k} にある右円偏光、左円偏光の粒子を生成する演算子である。つまり、例えば

$$|\mathbf{k}, +\rangle = \hat{a}_{k,+}^\dagger |0\rangle \quad (5.B.286)$$

は波数モード \mathbf{k} の右円偏光の光子が 1 つ存在する状態を表す。円偏光にある光子数演算子を

$$\hat{N}_{k,\pm} = \hat{a}_{k,\pm}^\dagger \hat{a}_{k,\pm} \quad (5.B.287)$$

と導入すれば、 \mathbf{J}^S は次のように書き直すことができる。

$$\mathbf{J}^S = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} (\hat{N}_{k,+} - \hat{N}_{k,-}) \quad (5.B.288)$$

つまり、右円偏光 (+) の光子は運動量 $\hbar\mathbf{k}$ の向きに大きさ \hbar のスピン角運動量を持ち、左円偏光 (-) の光子は運動量と逆向きに大きさ \hbar (運動量の向きに $-\hbar$) のスピン角運動量を持つ。

5.B.11 フェルミの黄金律

時間に依存する摂動の一般論

ハミルトニアンが

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \lambda \hat{V}(t) \quad (5.B.289)$$

というように、時間に依存しない基準のハミルトニアン \hat{H}_0 とそこからの摂動 $\lambda \hat{V}(t)$ の形に書ける場合を考える。 \hat{H}_0 の固有ベクトル $|n\rangle$ と固有値 E_n については既に分かっているとする。すなわち、

$$\hat{H}_0 |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (5.B.290)$$

である。系の任意の時刻の状態をこの固有ベクトルで

$$|\psi(t)\rangle = \sum_m c_m(t) \exp\left(-\frac{iE_m t}{\hbar}\right) |m\rangle \quad (5.B.291)$$

というように展開して考える。展開係数 $c_m(t)$ が求まれば系の状態の時間発展が求まることになる。これをシュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle \quad (5.B.292)$$

に代入すると、

$$\sum_m i\hbar \frac{dc_m(t)}{dt} \exp\left(-\frac{iE_m t}{\hbar}\right) |m\rangle = \sum_m c_m(t) \exp\left(-\frac{iE_m t}{\hbar}\right) \lambda \hat{V}(t) |m\rangle \quad (5.B.293)$$

という式が出てきて、この両辺に $\langle n|$ を作用させて $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ であることを使うと、

$$\frac{dc_n(t)}{dt} = \frac{\lambda}{i\hbar} \sum_m \langle n|\hat{V}(t)|m\rangle \exp\left[\frac{i(E_n - E_m)t}{\hbar}\right] c_m(t) \quad (5.B.294)$$

という式を得る。これを積分形式にすると、

$$c_n(t) = c_n(0) + \frac{\lambda}{i\hbar} \sum_m \int_0^t dt' \langle n|\hat{V}(t')|m\rangle \exp\left[\frac{i(E_n - E_m)t'}{\hbar}\right] c_m(t') \quad (5.B.295)$$

となり、これの左辺を右辺の $c_m(t')$ に再帰的に代入すると、

$$\begin{aligned} c_n(t) = & c_n(0) + \frac{\lambda}{i\hbar} \sum_m \int_0^t dt' \langle n|\hat{V}(t')|m\rangle \exp\left[\frac{i(E_n - E_m)t'}{\hbar}\right] c_m(0) \\ & - \frac{\lambda^2}{\hbar^2} \sum_m \sum_{m'} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \langle n|\hat{V}(t')|m\rangle \langle m|\hat{V}(t'')|m'\rangle \\ & \exp\left[\frac{i(E_n - E_m)t'}{\hbar} + \frac{i(E_m - E_{m'})t''}{\hbar}\right] c_{m'}(t'') \end{aligned} \quad (5.B.296)$$

を得る。λ の 2 次のオーダーまでで近似すると

$$\begin{aligned} c_n(t) = & c_n(0) + \frac{\lambda}{i\hbar} \sum_m \int_0^t dt' \langle n|\hat{V}(t')|m\rangle \exp\left[\frac{i(E_n - E_m)t'}{\hbar}\right] c_m(0) \\ & - \frac{\lambda^2}{\hbar^2} \sum_m \sum_{m'} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \langle n|\hat{V}(t')|m\rangle \langle m|\hat{V}(t'')|m'\rangle \\ & \exp\left[\frac{i(E_n - E_m)t'}{\hbar} + \frac{i(E_m - E_{m'})t''}{\hbar}\right] c_{m'}(0) + \mathcal{O}(\lambda^3) \end{aligned} \quad (5.B.297)$$

となる。更に λ の 1 次のオーダーで打ち切ると、

$$c_n(t) = c_n(0) + \frac{\lambda}{i\hbar} \sum_m \int_0^t dt' \langle n|\hat{V}(t')|m\rangle \exp\left[\frac{i(E_n - E_m)t'}{\hbar}\right] c_m(0) + \mathcal{O}(\lambda^2) \quad (5.B.298)$$

となる。

周期的な摂動による状態遷移

節 5.3.1 で物質と放射場の相互作用を考えるとときに有用な公式を説明する。ハミルトニアンが基準のハミルトニアンと周期的に時間変化する摂動に

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}' \exp(\mp i\omega t) \quad (5.B.299)$$

というように分けられる場合を考える。以下複号同順である。 \hat{H}_0, \hat{H}' は時間に依存しない。時刻 $t = 0$ で系の状態が \hat{H}_0 の固有状態のひとつ $|n\rangle$ にあったとして、 $t > 0$ で摂動を受けた結果、時刻 t において別の固有状態 $|m\rangle$ にある確率 $P_{n \rightarrow m}(t)$ は次のように書ける。

$$P_{n \rightarrow m}(t) = |c_{n \rightarrow m}(t)|^2 \quad (5.B.300)$$

ただし、 $c_{n \rightarrow m}(t)$ は初期状態を

$$c_k(0) = \delta_{kn} \quad (5.B.301)$$

として求めた $c_m(t)$ という意味である。1 次のオーダーで近似すると、 $m \neq n$ の m について、

$$c_{n \rightarrow m}(t) = \frac{1}{i\hbar} \langle m | \hat{H}' | n \rangle \int_0^t dt' \exp \left[\frac{i(E_m - E_n \mp \hbar\omega)t'}{\hbar} \right] \quad (5.B.302)$$

$$= - \langle m | \hat{H}' | n \rangle \frac{\exp[i(E_m - E_n \mp \hbar\omega)t/\hbar] - 1}{E_m - E_n \mp \hbar\omega} \quad (5.B.303)$$

となる。よって、 $P_{n \rightarrow m}(t)$ は

$$P_{n \rightarrow m}(t) = \left| \langle m | \hat{H}' | n \rangle \right|^2 \frac{4 \sin^2 [(E_m - E_n \mp \hbar\omega)t/(2\hbar)]}{(E_m - E_n \mp \hbar\omega)^2} \quad (5.B.304)$$

と計算できる。ここで、 t がある程度長い

$$t \gg \frac{\hbar}{E_m - E_n \mp \hbar\omega} \quad (5.B.305)$$

と仮定すると、

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{\pi \alpha x^2} = \delta(x) \quad (5.B.306)$$

という関係を使って、

$$P_{n \rightarrow m}(t) = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle m | \hat{H}' | n \rangle \right|^2 t \delta(E_m - E_n \mp \hbar\omega) \quad (5.B.307)$$

となる。つまり、 $E_m \simeq E_n \pm \hbar\omega$ の場合のみ、この確率は大きな値を持つ。更に、 \hat{H}_0 のエネルギー固有値のとり得る間隔が小さく、ほぼ連続的と考えられる場合は、エネルギー $E \sim E + dE$ の間にある固有状態数 (状態密度) を $\rho(E)dE$ として、上式を $E_m = E_n \pm \hbar\omega$ の近辺の状態について足し合わせる (積分する) ことで、

$$P_{n \rightarrow m \text{ 近辺}}(t) = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle m | \hat{H}' | n \rangle \right|^2 \rho(E_m)t \quad (5.B.308)$$

と書ける。以上のことをまとめると、周期的な摂動を受けると状態は $E_n \rightarrow E_m = E_n \pm \hbar\omega$ と遷移する可能性があり、その遷移が単位時間に起こる確率、すなわち遷移率は

$$w_{n \rightarrow m} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle m | \hat{H}' | n \rangle \right|^2 \rho(E_m) \quad (5.B.309)$$

と書ける。この式はフェルミの黄金律と呼ばれる^{†99}。

5.B.12 自由粒子と確率密度保存則

次節で自由粒子同士の散乱問題を考えるために、自由粒子の状態の記述方法について説明したあと、一般に粒子系で成り立つ確率密度の保存則について説明する。

自由粒子の波動関数

ポテンシャルが無い場合のハミルトニアン

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} \quad (5.B.310)$$

の固有状態、すなわち $\hat{\mathbf{p}}$ の固有状態を考える。つまり、

$$\hat{p}_i | \mathbf{k} \rangle = \hbar k_i | \mathbf{k} \rangle \quad (5.B.311)$$

を満たすような状態 $|\mathbf{k}\rangle$ である。運動量 $\hat{\mathbf{p}}$ の固有値は $\hbar\mathbf{k} = \hbar(k_x, k_y, k_z)$ と書く。座標表示での波動関数 $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle$ を用いて上記の関係を書くと、

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \hbar k_i \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \quad (5.B.312)$$

である。これを解くと、適当な規格化定数 A を用いて

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = A \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (5.B.313)$$

となる。この平面波の規格化には技巧的な手法がとられる。実空間に十分大きな立方体の領域 V (一辺の長さ L 、体積 L^3) を考え、その中で波動関数を考える。座標表示での計算で出てくる体積分はこの領域 V で行い、計算の最後に $L \rightarrow \infty$ とする。つまり、規格化条件

$$\langle \mathbf{k} | \mathbf{k} \rangle = \int_V \psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) d^3x \quad (5.B.314)$$

$$= |A|^2 \int_V d^3x = 1 \quad (5.B.315)$$

^{†99} フェルミの名前が付いているが、この式を黄金律と呼んだのがフェルミであって、この式の発見に貢献したのはディラックなのだそう。

を満たすために、

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{L^{3/2}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (5.B.316)$$

とする。一方で、 $\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}$ のときは

$$\langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle = \int_V \psi_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) d^3x \quad (5.B.317)$$

$$= \frac{1}{L^3} \int_V \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}] d^3x \quad (5.B.318)$$

$$= \frac{1}{L^3} (L \text{ の増加と共に振動する関数}) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0 \quad (5.B.319)$$

となる。これらのことをまとめて

$$\langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle = \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \quad (5.B.320)$$

と書く。

自由粒子の状態密度

$E \sim E + \delta E$ の間のエネルギーを持つ固有状態数 $\rho(E)\delta E$ を考える。式 (5.B.316) のような自由粒子波動関数の規格化を採用している場合には、状態数は次のように数えられる。領域 V の端で波動関数に周期的境界条件を課し、各固有モードを 1 つの状態とみなす。つまり、有限の領域 V を考えている限り系の持つエネルギーは離散的な値を取る。付録 3.B.8 の脚注 (199 ページ) で説明しているように、この数え方では相空間中の体積 $(2\pi\hbar)^3$ 内に 1 個の割合で状態が存在していると考えている。領域 V が大きくなる程、これらの状態は連続的に近づく。固有エネルギーは次のように書ける。

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 |\mathbf{n}|^2 \quad (5.B.321)$$

$$\text{ただし, } \mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z); \quad n_x, n_y, n_z \text{ は整数} \quad (5.B.322)$$

よって

$$\delta E = \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 |\mathbf{n}| \delta |\mathbf{n}| \quad (5.B.323)$$

と書ける。一方で、半径 $|\mathbf{n}|$ で厚さ $\delta |\mathbf{n}|$ の球殻の $d\Omega$ の領域にある状態数は

$$\delta n = 4\pi |\mathbf{n}|^2 \delta |\mathbf{n}| \cdot \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (5.B.324)$$

と書けるので、状態密度は

$$\rho(E) = \frac{\delta n}{\delta E} = \frac{m}{\hbar^2} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 |\mathbf{n}| d\Omega = \frac{mk}{\hbar^2} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 d\Omega \quad (5.B.325)$$

となる。

固有状態を連続的とみなした規格化

上述した平面波の規格化方法では、体積 L^3 での積分が 1 になるように規格化した。領域 V 内の固有モードをひとつの状態とみなすことで、固有状態は離散的であると考え、 L を大きくすれば連続的に近づくのだった。別の規格化方法として、初めから固有状態は連続的と考え、無限遠まで続く領域で規格化する流儀がある。この考え方では、次の規格化条件が課される。

$$\int \psi_{k'}^*(\mathbf{x})\psi_k(\mathbf{x})d^3x = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (5.B.326)$$

この場合、平面波を

$$\psi_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (5.B.327)$$

と規格化すれば上記の規格化条件を満たす^{†100}。

波動関数 $\psi(\mathbf{x}, t)$ に対して $|\psi(\mathbf{x}, t)|^2 d^3x$ は、時刻 t に位置 \mathbf{x} を含む d^3x の領域に粒子を見出すことができる確率と解釈されるのだった。

$$\rho(\mathbf{x}, t) = |\psi(\mathbf{x}, t)|^2 \quad (5.B.328)$$

は一般に確率密度と呼ばれる。系が自由粒子ハミルトニアン固有状態にある場合を考える。 $L^{3/2}$ を用いて規格化された平面波を用いて確率密度を計算すると

$$\rho(\mathbf{x}, t) = |\psi_k(\mathbf{x})|^2 = \frac{1}{L^3} \quad (5.B.329)$$

となる。一方で $(2\pi)^{3/2}$ を用いて規格化された平面波を用いると、

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \quad (5.B.330)$$

となる。当然ながら、異なる規格化をした平面波を用いると、確率密度の絶対値が異なる。しかしながら、何らかの状態にある粒子を観測したとき、 $E \sim E + \delta E$ の間のエネルギーを持ち、とある点を含む領域 d^3x 内に粒子が見いだされる確率は、規格化方法に依らず一致しなければならない。言い換えると、積 $\rho(E)\rho(\mathbf{x}, t)$ が規格化方法に依存してはならない。よって、 $(2\pi)^{3/2}$ を用いて規格化した場合の状態密度は、式 (5.B.325) に $(2\pi/L)^3$ を乗じた

$$\rho(E) = \frac{mk}{\hbar^2} d\Omega \quad (5.B.331)$$

となる。

^{†100} 公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx)dx = 2\pi\delta(k)$$

を用いて実際に計算すれば分かる。

平面波を

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (5.B.332)$$

と規格化することもある。これは

$$\int \psi_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) d^3x = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (5.B.333)$$

という規格化条件が課されていることに等しい。この場合、確率密度は

$$\varrho(\mathbf{x}, t) = 1 \quad (5.B.334)$$

と計算できる。状態密度は

$$\rho(E) = \frac{mk}{(2\pi)^3 \hbar^2} d\Omega \quad (5.B.335)$$

になる。

確率密度の保存則

一般の系に対して確率密度 $\varrho(\mathbf{x}, t)$ を有限の領域 V で積分した量について、一般にポテンシャルがある場合の 1 粒子系のシュレディンガー方程式を用いて次のような式変形ができる。

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho d^3x = \int_V \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) d^3x \quad (5.B.336)$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \int_V (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) d^3x \quad (5.B.337)$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \int_V [\nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)] d^3x \quad (5.B.338)$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \int_{\partial V} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \cdot d\mathbf{S} \quad (5.B.339)$$

1 段目から 2 段目への変形でシュレディンガー方程式を用いるが、ポテンシャル V が実数である場合は相殺して消える。3 段目から 4 段目への変形では発散定理を用いた。上記の式変形はどのような領域 V で考えても成り立つため、確率密度流束を

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (5.B.340)$$

と定義すれば

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (5.B.341)$$

が成り立つ。これは確率密度の保存則である。特に定常の場合は

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (5.B.342)$$

となるが、ハミルトニアンの固有状態 $\phi(\mathbf{x})$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \phi(\mathbf{x}) = E\phi(\mathbf{x}) \quad (5.B.343)$$

を考える場合にこの式が満たされることは直ぐに確かめられる。

5.B.13 散乱理論

節 5.B.11 では摂動論を用いて、物質と光子の相互作用を考える際に有用であるフェルミの黄金律を導出した。本節ではシュレディンガー方程式に従う物質粒子同士の衝突 (散乱) 問題を考える手法として、遷移行列を用いた方法を説明する。

衝突に関わる 2 粒子のラグランジアンは次のように書ける。

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{x}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{x}}_2^2 - V(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \quad (5.B.344)$$

2 粒子の重心の位置 \boldsymbol{R} と相対位置 \boldsymbol{r} を

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2}{m_1 + m_2}, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \quad (5.B.345)$$

と導入すると、ラグランジアンは次のように書き替えられる。

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}) \quad (5.B.346)$$

ただし、 $M = m_1 + m_2$ は総質量、 $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ は換算質量である。特にポテンシャルが \boldsymbol{R} に依存しない場合、ラグランジアンは \boldsymbol{R} に依存しないので、 \boldsymbol{R} についての運動方程式より $\ddot{\boldsymbol{R}} = 0$ が分かる。つまり、上式の第 1 項は定数なので、上式はポテンシャル $V(\boldsymbol{r})$ の下で運動する質量 μ の粒子のラグランジアンに一致する。或いはハミルトニアンを用いた議論をするならば、各粒子の位置 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ とそれに共役な運動量 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ の代わりに、相対位置 \boldsymbol{r} とそれに共役な運動量

$$\boldsymbol{p} = \mu\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{m_2\boldsymbol{p}_1 - m_1\boldsymbol{p}_2}{m_1 + m_2} \quad (5.B.347)$$

を用いてこの現象を記述することで、2 体衝突問題は質量 μ の粒子が相互作用を受けて運動量を変える散乱問題に帰着する^{†101}。特に 2 粒子間の相互作用として、その粒子間距離 $|\boldsymbol{r}|$ のみに依存するものを考えるならば、球対称な中心力 (原点からの距離 r のみに依存する相互作用) による弾性散乱問題になる。本節の目標は、散乱の微分断面積を求める手法を説明することだが、求まった微分断面積は相対運動量 \boldsymbol{p} の変化角を散乱角としたものであることに注意が必要である。

相互作用描像と S 行列

まず、相互作用描像という定式化を説明する。今まで用いてきたシュレディンガー描像においてハミルトニアンが

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(\hat{\boldsymbol{r}}) \quad (5.B.348)$$

$$\text{ただし,} \quad \hat{H}_0 = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} \quad (5.B.349)$$

^{†101} なお、本節では衝突に関わる 2 粒子は異種であることを想定して議論する。同種粒子間の衝突を考える場合は本節の議論に加えて、現れる波動関数を $\boldsymbol{x} \rightarrow -\boldsymbol{x}$ 変換に対して対称化または反対称化しなければならない。

と表される系を考える。 \hat{H}_0 は自由粒子のハミルトニアンであり、 \hat{V} は中心力による相互作用ハミルトニアンである。シュレディンガー描像における系の状態 $|\psi(t)\rangle$ の時間発展はシュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (5.B.350)$$

に従う。ここで、次の状態を考える。

$$|\psi(t)\rangle_I = \exp\left(\frac{it}{\hbar} \hat{H}_0\right) |\psi(t)\rangle \quad (5.B.351)$$

$|\psi(t)\rangle_I$ は相互作用描像における状態と表現され、添え字 I を付ける。シュレディンガー方程式 (5.B.350) を用いると、 $|\psi(t)\rangle_I$ の時間微分は次のように計算できる。

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = i\hbar \left[\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 \exp\left(\frac{it}{\hbar} \hat{H}_0\right) |\psi(t)\rangle + \exp\left(\frac{it}{\hbar} \hat{H}_0\right) \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \right] \quad (5.B.352)$$

$$= \exp\left(\frac{it}{\hbar} \hat{H}_0\right) \hat{V} \exp\left(-\frac{it}{\hbar} \hat{H}_0\right) |\psi(t)\rangle_I \quad (5.B.353)$$

つまり、相互作用描像における摂動ハミルトニアンを

$$\hat{V}_I = \exp\left(\frac{it}{\hbar} \hat{H}_0\right) \hat{V} \exp\left(-\frac{it}{\hbar} \hat{H}_0\right) \quad (5.B.354)$$

と定めれば、 $|\psi(t)\rangle_I$ は摂動ハミルトニアンのみを考慮したシュレディンガー方程式と同じ形式の式

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = \hat{V}_I |\psi(t)\rangle_I \quad (5.B.355)$$

に従って時間発展する。 \hat{V} が演算子 \hat{O} から構成される場合は、各演算子を

$$\hat{O} \longrightarrow \hat{O}_I(t) = \exp\left(\frac{it}{\hbar} \hat{H}_0\right) \hat{O} \exp\left(-\frac{it}{\hbar} \hat{H}_0\right) \quad (5.B.356)$$

と書き換えたものが \hat{V}_I になる。シュレディンガー描像や節 5.B.2 で述べたハイゼンベルク描像との対比をすると、次のようにまとめられる。

シュレディンガー描像 状態ベクトルが時間依存性を全て受け持ち、演算子は時間に依存しない。

ハイゼンベルク描像 演算子が時間依存性を全て受け持ち、状態ベクトルは時間に依存しない。

相互作用描像 系の相互作用 (摂動) の効果を除いた時間依存性を演算子が担い、相互作用に起因する時間依存性を状態ベクトルが担う。

式 (5.B.355) を形式的に積分すると、

$$|\psi(t)\rangle_I = |\psi(t_0)\rangle_I - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \hat{V}_I(t_1) |\psi(t_1)\rangle_I \quad (5.B.357)$$

と書ける。上式の右辺に左辺を再帰的に代入すると、

$$|\psi(t)\rangle_I = \left[\hat{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \hat{V}_I(t_1) + \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{V}_I(t_1) \hat{V}_I(t_2) + \dots \right] |\psi(t_0)\rangle_I \quad (5.B.358)$$

$$= \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I \quad (5.B.359)$$

と書ける。 $\hat{U}(t, t_0)$ は相互作用描像における時間発展演算子であると解釈できる。

衝突問題のモデルとして、 $t = -\infty$ に衝突に関わる粒子が互いに相互作用しないような状態 (始状態) $|\psi_i\rangle_I$ にあるとする。 $t = 0$ 近辺の時刻でこれらの粒子の間に何かしらの相互作用がはたらき、 $t = +\infty$ では相互作用のない別の状態 (終状態) $|\psi_f\rangle_I$ に落ち着いたとする。式 (5.B.355) より、 $|\psi_i\rangle_I, |\psi_f\rangle_I$ は時間変化しないことが分かる。始状態から終状態への時間発展演算子は

$$\hat{S} = \hat{U}(+\infty, -\infty) \quad (5.B.360)$$

$$= \hat{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \hat{V}_I(t_1) + \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \hat{V}_I(t_1) \hat{V}_I(t_2) + \dots \quad (5.B.361)$$

と書ける。この演算子は S 行列または散乱行列と呼ばれる。始状態が $|\psi_i\rangle_I$ であったとき、量子力学では様々な終状態に落ち着く可能性があるが、それらの終状態の中で状態 $|\psi_f\rangle_I$ にあることが見いだされる確率は、

$$|S_{fi}|^2 = \left| \langle \psi_f | \hat{S} | \psi_i \rangle_I \right|^2 \quad (5.B.362)$$

と与えられる。

遷移行列と微分断面積の関係

始状態と終状態として、 \hat{H}_0 の固有状態 $|k\rangle, |k'\rangle$ (節 5.B.12 参照) を考える。固有状態は $L^3/2$ を用いた方法で離散的なものとして規格化する。時間発展演算子 $\hat{U}(t, t_0)$ に対して次の式が成り立つような量 $T_{k'k}$ を考えることができる。

$$\langle \mathbf{k}' | \hat{U}(t, t_0) | \mathbf{k} \rangle = \delta_{k'k} - \frac{i}{\hbar} T_{k'k} \int_{t_0}^t dt' \exp \left[\frac{it'}{\hbar} (E' - E) + \varepsilon t' \right] \quad (5.B.363)$$

$$\text{ただし, } E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad E' = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} \quad (5.B.364)$$

$T_{k'k}$ は遷移行列または T 行列と呼ばれる。 ε は $\varepsilon > 0$ かつ $t \ll (1/\varepsilon)$ を満たす微小量である。 S 行列の行列要素 $S_{k'k} = \langle \mathbf{k}' | \hat{S} | \mathbf{k} \rangle$ とは次の関係にある^{†102}。

$$S_{k'k} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \langle \mathbf{k}' | \hat{U}(t, -\infty) | \mathbf{k} \rangle \tag{5.B.365}$$

$$= \delta_{k'k} - \frac{i}{\hbar} T_{k'k} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \exp \left[\frac{it'}{\hbar} (E' - E) \right] \tag{5.B.366}$$

$$= \delta_{k'k} - 2\pi i \delta(E' - E) T_{k'k} \tag{5.B.367}$$

必ず $t \rightarrow \infty$ の極限をとる前に $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限をとらなければならないことに注意が必要である。始状態と終状態が直交する ($\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}$) 場合は、 \hat{S} の代わりに $T_{k'k}$ を用いて遷移率を計算できる。与えられたポテンシャル \hat{V} から遷移行列を求める方法は次の小節で説明することにして、まずは遷移行列と微分断面積の関係を説明する。

始状態 $|\mathbf{k}\rangle$ から終状態 $|\mathbf{k}'\rangle$ への遷移率 (単位時間あたりの確率) は次のように書ける。

$$w_{k \rightarrow k'} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{d}{dt} \left| \langle \mathbf{k}' | \hat{U}(t, -\infty) | \mathbf{k} \rangle \right|^2 \tag{5.B.368}$$

$\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}$ のとき、式 (5.B.363) より

$$\langle \mathbf{k}' | \hat{U}(t, -\infty) | \mathbf{k} \rangle = -\frac{i}{\hbar} T_{k'k} \frac{\exp[it(E' - E)/\hbar + \varepsilon t]}{i(E' - E)/\hbar + \varepsilon} \tag{5.B.369}$$

と計算できる。よって、遷移率は

$$w_{k \rightarrow k'} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\hbar^2} |T_{k'k}|^2 \frac{2\varepsilon \exp(2\varepsilon t)}{(E' - E)^2/\hbar^2 + \varepsilon^2} \tag{5.B.370}$$

と書ける。ここで

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varepsilon \exp(2\varepsilon t)}{(E' - E)^2/\hbar^2 + \varepsilon^2} = \pi \hbar \delta(E' - E) \tag{5.B.371}$$

という関係があることを用いると、

$$w_{k \rightarrow k'} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{k'k}|^2 \delta(E' - E) \tag{5.B.372}$$

と計算できる。この式をフェルミの黄金律 (5.B.309) と見比べると形が似ているが、黄金律が摂動の 2 次以上を無視して出てきたものであるのに対し、遷移行列で表されたこの式はそのような近似を行っていない。

^{†102} 積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) dk = 2\pi \delta(x)$$

を用いる。

終状態の状態密度 (5.B.325) を遷移率 (5.B.372) に乗じて dE' で積分すると、

$$w_{k \rightarrow k' \text{近辺}} = \frac{mkL^3}{(2\pi)^2 \hbar^3} |T_{k'k}|^2 d\Omega \quad (5.B.373)$$

となる。微分断面積とは、上記の遷移率を入射粒子のフラックスで割ったものである。始状態の粒子の速さを $v = \hbar k/m$ とすると、フラックスは

$$\frac{v}{L^3} = \frac{\hbar k}{mL^3} \quad (5.B.374)$$

と書けるので、弾性散乱の微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2} \right)^2 |T_{k'k}|^2 \quad (5.B.375)$$

となる。遷移行列を具体的に計算した後に $L \rightarrow \infty$ の極限をとる。

遷移行列の求め方

与えられたポテンシャル \hat{V} に対して遷移行列 $T_{k'k}$ を求めるための方程式を導出する。式 (5.B.357) に戻ると、時間発展演算子 $\hat{U}(t, t_0)$ に対して

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{V}_I(t') \hat{U}(t', t_0) \quad (5.B.376)$$

という関係が成り立つ。つまり、 $V_{k'k''} = \langle \mathbf{k}' | \hat{V} | \mathbf{k}'' \rangle$ と書くと、

$$\langle \mathbf{k}' | \hat{U}(t, -\infty) | \mathbf{k} \rangle = \delta_{k'k} - \frac{i}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}''} V_{k'k''} \int_{-\infty}^t dt' \langle \mathbf{k}'' | \hat{U}(t', -\infty) | \mathbf{k} \rangle \exp \left[\frac{it'}{\hbar} (E' - E'') \right] \quad (5.B.377)$$

と書ける^{†103}。一方で遷移行列の定義 (5.B.363) より

$$\langle \mathbf{k}' | \hat{U}(t, -\infty) | \mathbf{k} \rangle = \delta_{k'k} - \frac{i}{\hbar} T_{k'k} \frac{\exp[it(E' - E)/\hbar + \varepsilon t]}{i(E' - E)/\hbar + \varepsilon} \quad (5.B.378)$$

が分かる。上式を式 (5.B.377) の右辺に代入すると、

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}' | \hat{U}(t, -\infty) | \mathbf{k} \rangle &= \delta_{k'k} - \frac{i}{\hbar} V_{k'k} \int_{-\infty}^t dt' \exp \left[\frac{it'}{\hbar} (E' - E) \right] \\ &\quad - \frac{1}{\hbar^2} \frac{\exp[it(E' - E)/\hbar + \varepsilon t]}{i(E' - E)/\hbar + \varepsilon} \sum_{\mathbf{k}''} V_{k'k''} \frac{T_{k''k}}{i(E'' - E)/\hbar + \varepsilon} \end{aligned} \quad (5.B.379)$$

†103

$$\langle \mathbf{k}' | \hat{V}_I(t') \hat{U}(t', -\infty) | \mathbf{k} \rangle = \sum_{\mathbf{k}''} \langle \mathbf{k}' | \hat{V}_I(t') | \mathbf{k}'' \rangle \langle \mathbf{k}'' | \hat{U}(t', -\infty) | \mathbf{k} \rangle$$

と変形して、 $\hat{V}_I(t')$ と \hat{V} の関係 (5.B.354) を思い出せば分かる。状態密度を考えたときに説明したように、運動量の固有状態 $|\mathbf{k}\rangle$ は離散的なものとしているので、上記のような和を考えることができる。

となる。上式と式 (5.B.378) を見比べると、

$$T_{k'k} = V_{k'k} + \sum_{\mathbf{k}''} V_{k'k''} \frac{T_{k''k}}{E - E'' + i\hbar\varepsilon} \quad (5.B.380)$$

が分かる。ポテンシャル \hat{V} が具体的に与えられて、始状態と終状態が指定されれば、上式を解くことで $T_{k'k}$ を知ることができる。遷移行列と次のような関係にある状態 $|\psi^{(+)}\rangle$ を考える。

$$T_{k'k} = \langle \mathbf{k}' | \hat{V} | \psi^{(+)} \rangle \quad (5.B.381)$$

すると、式 (5.B.380) は

$$\langle \mathbf{k}' | \hat{V} | \psi^{(+)} \rangle = \langle \mathbf{k}' | \hat{V} | \mathbf{k} \rangle + \sum_{\mathbf{k}''} \langle \mathbf{k}' | \hat{V} | \mathbf{k}'' \rangle \frac{\langle \mathbf{k}'' | \hat{V} | \psi^{(+)} \rangle}{E - E'' + i\hbar\varepsilon} \quad (5.B.382)$$

と書ける。この式は全ての $|\mathbf{k}'\rangle$ について成り立つので、

$$|\psi^{(+)}\rangle = |\mathbf{k}\rangle + \sum_{\mathbf{k}''} |\mathbf{k}''\rangle \frac{\langle \mathbf{k}'' | \hat{V} | \psi^{(+)} \rangle}{E - E'' + i\hbar\varepsilon} \quad (5.B.383)$$

$$= |\mathbf{k}\rangle + \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i\hbar\varepsilon} \hat{V} |\psi^{(+)}\rangle \quad (5.B.384)$$

という関係が成り立つ。この式はリップマン-シュウィンガー方程式と呼ばれる。この式から $|\psi^{(+)}\rangle$ が求まれば、式 (5.B.381) より遷移行列が求まる。計算の最後には $\varepsilon \rightarrow +0$ とする。ポテンシャル \hat{V} が位置演算子 \hat{x} の固有状態 $|\mathbf{x}\rangle$ に対して

$$\langle \mathbf{x}' | \hat{V} | \mathbf{x}'' \rangle = V(\mathbf{x}') \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \quad (5.B.385)$$

を満たす場合^{†104}には、リップマン-シュウィンガー方程式の座標表示は次のようになる (詳しくは例えば Sakurai & Napolitano, 2010)。

$$\psi^{(+)}(\mathbf{x}) = \psi_k(\mathbf{x}) - \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3x' \frac{\exp[ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|]}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} V(\mathbf{x}') \psi^{(+)}(\mathbf{x}') \quad (5.B.386)$$

$$\text{ただし, } \psi^{(+)}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \psi^{(+)} \rangle, \quad \psi_k(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle \quad (5.B.387)$$

また、式 (5.B.384) を用いると、

$$0 = (E - \hat{H}_0) |\mathbf{k}\rangle = (E - \hat{H}_0) \left(\hat{1} - \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i\hbar\varepsilon} \right) |\psi^{(+)}\rangle = (E - \hat{H}) |\psi^{(+)}\rangle \quad (5.B.388)$$

という関係が分かる。つまり、 $|\psi^{(+)}\rangle$ は系のハミルトニアン \hat{H} の固有状態である。

^{†104} \hat{V} が位置演算子 \hat{x} のみの関数である場合には満たす。

遷移行列は式 (5.B.363) で複素数として定義していたが、

$$\hat{T}|\mathbf{k}\rangle = \hat{V}|\psi^{(+)}\rangle \quad (5.B.389)$$

という関係より演算子としての遷移行列を導入すれば、その行列要素は $T_{k'k} = \langle \mathbf{k}' | \hat{T} | \mathbf{k} \rangle$ となる。式 (5.B.384) の両辺に左から \hat{V} を作用させると、

$$\hat{T} = \hat{V} + \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i\hbar\varepsilon} \hat{T} \quad (5.B.390)$$

という演算子間の関係が分かる。相互作用 \hat{V} が弱いために収束性が良いと考えられる場合には、上式の右辺に左辺を再帰的に代入することで

$$\hat{T} = \hat{V} + \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i\hbar\varepsilon} \hat{V} + \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i\hbar\varepsilon} \hat{V} \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i\hbar\varepsilon} \hat{V} + \dots \quad (5.B.391)$$

というように展開し、高次の項を無視することで近似計算できる。

部分波展開による解法

\hat{V} が球対称のポテンシャルである場合には、部分波展開と呼ばれる手法でリップマン-シュウィンガー方程式が解かれる。

散乱問題で興味があるのは散乱を起こすポテンシャル \hat{V} の及ぶ範囲よりずっと巨視的な領域における粒子の挙動である。つまり、散乱中心からずっと遠い領域にあるときの、散乱前後の粒子の運動に興味がある。この意味で、リップマン-シュウィンガー方程式の座標表示 (5.B.386) の d^3x' についての積分範囲は十分に狭いとして、

$$|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'| \quad (5.B.392)$$

という条件を課す。このとき、 $r = |\mathbf{x}|, r' = |\mathbf{x}'|$ と書き、 \mathbf{x} と \mathbf{x}' がなす角を α とすると

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = r \sqrt{1 - \frac{2r'}{r} \cos \alpha + \frac{r'^2}{r^2}} \quad (5.B.393)$$

$$\simeq r - \frac{\mathbf{x}}{r} \cdot \mathbf{x}' \quad (5.B.394)$$

と近似できるため、 r が十分に大きいときの $\psi^{(+)}(\mathbf{x})$ は次のように書ける。

$$\psi^{(+)}(\mathbf{x}) \simeq \psi_k(\mathbf{x}) - \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \frac{\exp(ikr)}{r} \int d^3x' \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}') V(\mathbf{x}') \psi^{(+)}(\mathbf{x}') \quad (5.B.395)$$

$$= \frac{1}{L^{3/2}} \left[\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + \frac{\exp(ikr)}{r} f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \right] \quad (5.B.396)$$

ただし、 $\mathbf{k}' = k \frac{\mathbf{x}}{r}$ (5.B.397)

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2} \int d^3x' \frac{\exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}')}{L^{3/2}} V(\mathbf{x}') \psi^{(+)}(\mathbf{x}') \quad (5.B.398)$$

式 (5.B.398) を式 (5.B.375) および (5.B.381) と見比べると、 $f(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ の絶対値の 2 乗が、運動量 $\hbar\mathbf{k}$ から $\hbar\mathbf{k}'$ への弾性散乱の微分断面積に相当することが分かる。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2 \quad (5.B.399)$$

$f(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ は散乱振幅 (scattering amplitude) と呼ばれる。つまり、 $\psi^{(+)}(\mathbf{x})$ の散乱中心から十分に離れた領域での振幅は、注目する点の位置ベクトル \mathbf{x} と同じ向きへの散乱の微分断面積と上式で直接結びついている。

入射粒子の運動量 $\hbar\mathbf{k}$ の向きを z 軸にとることにすると、入射粒子の平面波は次のように、ルジャンドル多項式 P_l と球ベッセル関数を用いて展開できる。詳しくは付録 1.C.4 の球ベッセル関数の項を参照のこと。

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (5.B.400)$$

ただし、 θ は位置ベクトル \mathbf{x} と z 軸のなす角、つまり散乱角である。平面波の規格化方法をデルタ関数を用いたものに切り替えた (節 5.B.12 参照)。上式は物理的には、入射粒子の状態を角運動量の固有状態 $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ の重ね合わせとして表している と解釈できる。ただし、入射粒子の波動関数は ϕ 対称であるため、 $m=0$ の項だけが現れている。 $j_l(kr)$ は $r \rightarrow \infty$ で次のように漸近する。

$$j_l(kr) \simeq \frac{\exp[i(kr - l\pi/2)] - \exp[-i(kr - l\pi/2)]}{2ikr} \quad (5.B.401)$$

つまり、 r が十分に大きい領域では、各角運動量成分は更に外向き球面波 $\exp(ikr)/r$ と内向き球面波 $\exp(-ikr)/r$ の重ね合わせで表される。両者の振幅の絶対値が等しいことは、確率密度の保存則と関係している。今は定常状態を考えているので確率密度の保存則は

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (5.B.402)$$

であるが (節 5.B.12 参照)、原点を中心とした十分大きな r の球 V でこれを積分すると、発散定理より球面 ∂V での表面積分に置き換わり、

$$\int_{4\pi} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{r}} d\Omega = 0 \quad (5.B.403)$$

となる。 $\hat{\mathbf{r}}$ は r 方向の単位ベクトルである。角運動量保存則より、波動関数をルジャンドル多項式で展開した各 l の成分について確率密度の保存則が成り立つ必要がある^{†105}ので、

$$\psi_l(r, \theta) = \left[a_l \frac{\exp(ikr)}{r} + b_l \frac{\exp(-ikr)}{r} \right] P_l(\cos \theta) \quad (5.B.404)$$

^{†105} 今は球対称のポテンシャル $V(r)$ を考えているため、ルジャンドル多項式で表される角運動量演算子の固有状態は、ハミルトニアン固有状態でもある (節 5.B.6 参照)。よって、ルジャンドル多項式で展開した各項がそれぞれ節 5.B.12 で述べたように定常確率密度保存則に従う。

を式 (5.B.403) に代入すると、

$$|a_l|^2 - |b_l|^2 = 0 \quad (5.B.405)$$

という条件を得る。つまり、確率密度の保存則より外向き球面波と内向きの球面波の振幅の絶対値は等しくなければならないことが言える。

系全体として ϕ 対称な問題を考えているので、 $\psi^{(+)}(\mathbf{x})$ もルジャンドル多項式を用いて展開できる。つまり、式 (5.B.396) より、散乱振幅も次のようにルジャンドル多項式で展開できる。

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = f(k, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(k) P_l(\cos \theta) \quad (5.B.406)$$

展開係数 $f_l(k)$ は部分波振幅 (partial-wave amplitude) と呼ばれる。上式と入射波の展開式を式 (5.B.396) に代入することで、 r が十分に大きいときの $\psi^{(+)}(\mathbf{x})$ は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(r, \theta) \simeq \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l (2l+1) i^l P_l(\cos \theta) \\ \cdot \left[(1 + 2ik f_l(k)) \frac{\exp[i(kr - l\pi/2)]}{2ikr} - \frac{\exp[-i(kr - l\pi/2)]}{2ikr} \right] \end{aligned} \quad (5.B.407)$$

ただし、確率密度の保存則より、やはり外向き球面波と内向き球面波の振幅の絶対値は同じでないといけないため、

$$1 + 2ik f_l = \exp(2i\delta_l) \quad (5.B.408)$$

と書ける。新しく導入した $\delta_l(k)$ は実数の値を取る。つまり、 $\psi^{(+)}(\mathbf{x})$ と入射粒子の波動関数では外向き球面波の位相が $2\delta_l$ だけ違う (他は同じである)。

位相のずれ δ_l は、 $\psi^{(+)}(\mathbf{x})$ を

$$\psi^{(+)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l (2l+1) i^l A_l(r) P_l(\cos \theta) \quad (5.B.409)$$

と表したときに動径方向の波動関数 $u_l = r A_l$ が従う定常状態のシュレディンガー方程式 (節 5.B.6 参照)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} + V(r) \right] u_l(r) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} u_l(r) \quad (5.B.410)$$

を具体的に解いて、 $r \rightarrow \infty$ のときの解の振る舞いを入射粒子の波動関数の場合 ($r j_l(kr)$) と比較することで求められる^{†106}。 δ_l が k の関数として求まれば、散乱振幅は

$$f(k, \theta) = \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) \exp(i\delta_l(k)) \sin \delta_l(k) P_l(\cos \theta) \quad (5.B.411)$$

^{†106} 本節の議論は近距離力による散乱の場合に適用できる。クーロン相互作用のような遠距離力による散乱の場合は特殊であり、本節の議論より複雑になる。クーロン相互作用の場合も含め、本節で説明している散乱理論のより実践的な理論を知りたい方は、例えば Burke (2011) を読んで欲しい。

と計算することができ、絶対値の 2 乗を計算することで微分断面積も (k, θ) の関数として求まる。総断面積は次のように書ける^{†107}。

$$\sigma(k) = \int |f(k, \theta)|^2 d\Omega \tag{5.B.412}$$

$$= \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l + 1) \sin^2 \delta_l(k) \tag{5.B.413}$$

電子と水素原子の非弾性衝突

前節で導入した散乱波動関数 $\psi^{(+)}(\mathbf{x})$ と散乱振幅 $f(k, \theta)$ を用いて電子と水素原子の非弾性衝突問題を考える。ただし、簡単のために、入射電子のエネルギーは十分に低く、次のように準位 i の H 原子に電子が衝突して準位 j に遷移させるような過程のみが起こるとする。



そのような過程を表す散乱波動関数 Ψ は次の定常状態のシュレディンガー方程式に従う。

$$\left(\hat{H}_H - \frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_2^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{x}_2|} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \right) \Psi = E\Psi \tag{5.B.415}$$

ただし、
$$\hat{H}_H = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_1^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{x}_1|} \tag{5.B.416}$$

$$E = e_i + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} = e_j + \frac{\hbar^2 k'^2}{2m_e} \tag{5.B.417}$$

\hat{H}_H は水素原子に束縛された電子のハミルトニアンである。水素原子の質量は無限大とみなして、原点に固定して考える。 \mathbf{x}_1 は束縛電子の座標、 \mathbf{x}_2 は自由電子の座標である。 e_i, e_j はそれぞれ水素原子の準位 i, j のエネルギーである。 \hat{H}_H の e_i に対する固有状態を Φ_i と書く。ただし、次の直交関係を満たすように規格化する。

$$\int d^3x_1 \int d\sigma_1 \Phi_i^*(\mathbf{x}_1, \sigma_1) \Phi_j(\mathbf{x}_1, \sigma_1) = \delta_{ij} \tag{5.B.418}$$

σ_1 は束縛電子のスピン座標である。更に、自由電子のスピン関数 $\chi_s(\sigma_2)$ も導入し、自由電子の空間座標 \mathbf{x}_2 を極座標 (r, θ, ϕ) で表すことにすると、 Ψ は $r \rightarrow \infty$ で次のように漸近する。

$$\Psi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \Phi_i \chi_s \exp(ikz) + \sum_j \Phi_j \chi_{s_j} f_{ji}(k, \theta, \phi) \frac{\exp(ik'r)}{r} \tag{5.B.419}$$

^{†107} ルジャンドル多項式の直交関係

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

を用いる。

$f_{ji}(k, \theta, \phi)$ は水素原子が j に遷移する場合の散乱振幅である。 j は放出される電子の波数が $k'^2 \geq 0$ である限りにおいて可能性な遷移について和を取る。上式の境界条件の下でシュレディンガー方程式を解くことで $f_{ji}(k, \theta, \phi)$ を得ることができれば、 $i \rightarrow j$ の遷移に対する微分断面積は

$$\frac{d\sigma_{ij}}{d\Omega} = \frac{k'}{k} |f_{ji}(k, \theta, \phi)|^2 \quad (5.B.420)$$

と計算できる。終状態の状態密度を乗じて始状態の数密度フラックスで割る操作において因子 k'/k が出てくる。

入射電子のエネルギーが高く、水素原子に衝突して水素原子が電離する過程も考えるならば、議論はもう少し複雑になるが、全体の指針は同じである。また、衝突相手の原子が多電子を持つ場合は、原子の固有状態の表し方から考える必要がある。この辺りの実践的な計算手法を知りたい方は、例えば Burke (2011) を読んで欲しい^{†108}。

^{†108} ただし、量子化学の教科書で多電子原子の電子軌道の表し方を学んだ後に読まれるのが良い。

6

MHD の限界と運動論

本章はプラズマ、特に電子と陽イオンからなる気体について説明する。節 1.2.1 で述べたように、MHD では扱うプラズマを流体 (fluid)、すなわち連続体として考えていた。また、節 3.3 で述べたように、各流体粒子はほとんど局所熱平衡にあるという仮定もしていた。これらの仮定には適用限界がある。本章では、プラズマを構成する個々の粒子の運動から始め、話を巨視的にしていくことで、この適用限界についての見識を深める。

具体的にはまず、プラズマを構成する粒子間の平均的な距離とド・ブロイ波長が同程度の大きさである場合には量子力学的効果を考える必要が出てくる。ド・ブロイ波長に比べて粒子間距離が十分に長い場合は、粒子の運動を古典力学的に扱い、分布関数というものを考えることでその集団としての性質を統計的に記述する。この考え方を運動論 (kinetic theory) と言う。考える系において粒子が十分に「詰まって」いて粒子間の衝突が十分頻繁に起きていると考えられる場合には、粒子種ごとに局所熱平衡の仮定が成り立つため、運動論的方程式の平均をとることによってプラズマを多流体方程式と呼ばれるモデルで考えることができる。更に、電子とイオンの温度が等しい、プラズマが全体として電気的中性を保っている (準中性)、電子とイオンの平均速度差が小さい (弱電流) といった様々な条件を課すことで、多流体方程式から MHD 方程式が導かれる。

熱平衡からのずれによって起こる輸送現象を、運動論によって微視的現象の効果を取り入れて調べることで、MHD に出てくる輸送係数 (電気伝導率、粘性率、熱伝導率) を見積もることができる。また、多流体方程式の考え方も有用であり、特に希薄な部分電離プラズマを扱う際には、イオンや電子と中性粒子を別の流体として扱うことで、前節までで説明してきた 1 流体 MHD では考慮されていなかった現象を取り入れることができる。

本章ではまず、プラズマを微視的視点で見るとどのような現象が起きているのかを定性的に考察し、プラズマを特徴づける様々なパラメータの値を見積もる (節 6.1)。次に運動論について説明し、運動論の輸送方程式から MHD 方程式を導く (節 6.2)。その後、節 6.3 で衝突過程について詳しく考察した後、流体の方程式に出てくる輸送係数を運動論を用いて計算する手法について説明する (節 6.4)。ここまでは完全電離プラズマを想定した議論である。節 6.5 で、電離や再結合過程が起これば、中性粒子が混じっている系の場合を考える。今まで説明してきた MHD のもうひとつの適用限界である相対論については第 7 章で説明する。

この章は主に Gurnett & Bhattacharjee (2005), Goedbloed et al. (2019) を参考にしてている。衝突過程や輸送理論に関する部分 (節 6.3, 6.4) は Helander & Sigmar (2002)、部分電離プラズマの節 (節 6.5) は Ballester et al. (2018) も参考にしてている。

6.1 プラズマ中の微視的現象

プラズマを微視的に見ると各粒子がどのような動きをしているのかについて説明し、各現象の時間・空間スケールを見積もる。様々な系における各パラメータの具体的な値は節 6.1.8 で示す。

6.1.1 分布関数と熱運動

プラズマが例えば電子、 H^+ イオンなどの粒子から構成されているとき、それぞれの粒子種についての数密度 n_s を考えることができる。添え字 s は s 番目の粒子種についての量であることを表す。例えば電子の場合は $s = e$ 、イオンの場合は $s = i$ である。粒子の運動を統計的に扱うために、分布関数 $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ を考える。付録 3.B.3 で、とある 1 つの粒子が座標 \mathbf{x} にいて速度 \mathbf{v} を持つ、という状態は 6 次元相空間 $dx dy dz dv_x dv_y dv_z$ 中の 1 点として表さることを述べた。 $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ は粒子種 s についての 6 次元相空間中の数密度を表す。つまり、

$$f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3x d^3v \quad (6.1.1)$$

は時刻 t に相空間の点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) を含む体積要素 $d^3x d^3v$ 中の粒子数を表す。言い換えると、 $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ は実空間のある点 \mathbf{x} で時刻 t に速度 \mathbf{v} を持っている粒子種 s の粒子数に比例し、実空間における数密度 n_s との間に

$$n_s(\mathbf{x}, t) = \int f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (6.1.2)$$

という関係がある。

気体が平衡状態にあるとき、分布関数は次の形になる。このことの詳細は節 6.2.3 で説明する。

$$f_s^0(\mathbf{v}) = n_s \left(\frac{m_s}{2\pi k_B T_s} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_s(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2}{2k_B T_s} \right) \quad (6.1.3)$$

これをマクスウェル-ボルツマン分布と言う。 k_B はボルツマン定数、 m_s, T_s はそれぞれ粒子

種 s の質量と温度である。 \mathbf{v}_0 は平均速度と解釈できる。すなわち、

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\int \mathbf{v} f_s^0 d^3v}{\int f_s^0 d^3v} = \mathbf{v}_0 \quad (6.1.4)$$

である^{†1}。平均速度がゼロの場合、 $f_s^0(\mathbf{v})$ は等方的分布なので、 $d^3v = v^2 dv d\Omega$ であることを用いて速度方向 $d\Omega$ について和をとることで、方向を問わず速度の大きさが $v \sim v + dv$ の間である粒子の数は $4\pi v^2 f_s^0 dv$ に比例することが分かる。電子の場合について $4\pi v^2 f_s^0/n_e$ をプロットしたものを図 6.1 に示した。平均速度 \mathbf{v}_0 がゼロの時^{†2}の二乗平均平方根は

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\int v^2 f_s^0 d^3v}{\int f_s^0 d^3v}} = \sqrt{\frac{3k_B T_s}{m_s}} \quad (6.1.5)$$

と計算できる。このことより

$$\bar{v}_s = \sqrt{\frac{2k_B T_s}{m_s}} \quad (6.1.6)$$

は熱速度と呼ばれる^{†3}。また、

$$\left\langle \frac{1}{2} m_s v^2 \right\rangle = \frac{\int \frac{1}{2} m_s v^2 f_s^0 d^3v}{\int f_s^0 d^3v} = \frac{3}{2} k_B T_s \quad (6.1.7)$$

という関係より、温度が 1 粒子あたりの運動エネルギーの平均を表していることが分かる。温度が高いほど各粒子は平均速度から大きくズレた速度を持ち、全体の分布の幅が大きい。また、考えている粒子種の質量が小さいほど分布の幅は大きくなる。つまり、一般的に電子は陽イオンよりずっと大きな速度分布の幅を持つ。プラズマが平衡状態にない場合でも、そのときの(平

^{†1} ガウス関数周りの積分公式をまとめる。 $a > 0$ とする。

$$n = 0, 1, 2, \dots \text{について, } \int_0^\infty x^{2n+1} \exp(-ax^2) dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}$$

$$n = 1, 2, \dots \text{について, } \int_0^\infty x^{2n} \exp(-ax^2) dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

ただし、 $(2n-1)!!$ は 1 から $(2n-1)$ までの奇数を全て掛け合わせたものという意味である。

^{†2} 節 6.2 で説明するように、流体的描像における速度場は速度空間での平均速度のことを意味しているので、 \mathbf{v}_0 をゼロにすると流体の共動系で見るという操作に対応する。

^{†3} 上式のように係数に 2 をつけるか、付けないかの定義方法は文献によって異なるが、各パラメータの大きさの見積りに使われる分にはどちらの定義でも結果の本質には影響しないと思われる。

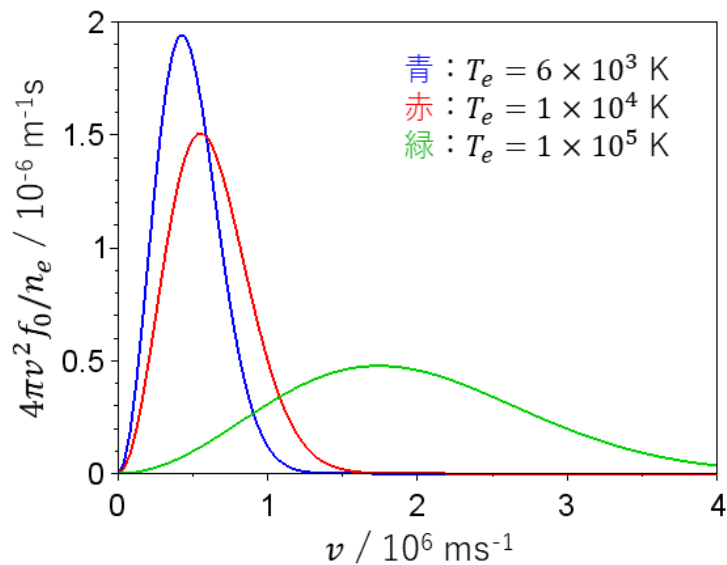


図 6.1 マクスウェル-ボルツマン分布：電子の場合。最頻値は $v = \sqrt{2k_B T_e / m_{e0}}$

均速度を差引いた) 分布関数に対する平均として上式の関係を満たすような量を温度と定義することができる。ただし、マクスウェルの関係式のような熱力学的関係は熱平衡状態で定義された温度に関する性質なので、そのように拡張した温度が満たすかは分からない。

プラズマが十分に濃く、粒子同士の衝突が頻繁に起きる場合、ある微小領域での粒子種 s の分布関数が初めにどのような形であったとしても、時間の経過と共に衝突の影響でマクスウェル-ボルツマン分布に近づいていく。詳しくは節 6.2.3 で説明する。この現象は緩和 (relaxation) と呼ばれる。緩和は粒子が衝突を経験してから次の衝突を起こすまでの平均的な時間間隔 (衝突時間) の時間スケールで起きると考えられる。よって、それよりも長い時間スケールの現象を見る場合には、各点での分布関数は粒子種ごとに殆どマクスウェル-ボルツマン分布であると考えられる。この仮定が局所熱平衡の仮定の本質である。プラズマ中での衝突頻度については節 6.1.4 で簡単に見積もる。イオンと電子の質量は大きく異なるため、イオン-電子間の衝突によるエネルギー交換は同種粒子の衝突によるエネルギー交換より効率が悪い。イオン-電子間のエネルギー交換が起こる時間スケールを τ_{eq} 、対象とする現象の時間スケールを τ_H と書くと、衝突頻度が十分に大きい系では $\tau_{eq} \ll \tau_H$ なので電子とイオンの温度が一致するが、対象とするプラズマが希薄な場合は $\tau_{eq} \sim \tau_H$ となってくるため、平衡に達せず電子の温度 T_e とイオンの温度 T_i に差が出ることが期待される。

6.1.2 デバイ遮蔽

プラズマの中にテスト電荷を置くと、電荷の周りの電子の集団とイオンの集団が互いに逆向きの静電場を受けて統計的に異なる分布を持つようになる。これを分極と言う。分極によって

発生した電場がテスト電荷の電場を打ち消すため、テスト電荷の電場は真空中に置かれた場合よりも近くの空間にしか影響を及ぼさない。この効果はデバイ遮蔽と呼ばれる。デバイ遮蔽が起こる典型的な空間スケールはデバイ長と呼ばれ、プラズマの特徴を語る上での基本的なパラメータのひとつである。

デバイ長を大雑把に見積もるために次のモデルを考える。 e は素電荷を表す。数密度 n_0 の陽イオン (電荷 e) の集団と数密度 n_0 の電子 (電荷 $-e$) の集団から成る一様なプラズマを考える。初めは両者の電荷密度の合計はゼロに保たれている^{†4}。原点にテスト電荷 Q を置くとそれに伴って静電場 \mathbf{E} が発生し、電子の数密度が n_e に変化したとする。ただし、簡単のためにイオンの数密度は変化しないことにする。 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ と静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{x})$ を導入すると、 ϕ は原点に電荷 Q があるという境界条件の下で次のポアソン方程式に従う^{†5}。

$$\nabla^2\phi = -\frac{e}{\epsilon_0}(n_0 - n_e) \quad (6.1.8)$$

節 6.2.3 で説明するが、ポテンシャル $\phi(\mathbf{x})$ 中で平衡状態にある電子の分布関数は、マクスウェル-ボルツマン分布に因子 $\exp(e\phi/k_B T_e)$ を乗じたものになる。

$$f_e(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = n_0 \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e v^2/2 - e\phi(\mathbf{x})}{k_B T_e} \right) \quad (6.1.9)$$

衝突が十分に起こっているプラズマを想定し、電子の分布は上式で表されるとする。上式を速度空間で積分することで、電子の数密度は次のように表される。

$$n_e(\mathbf{x}) = n_0 \exp\left(\frac{e\phi(\mathbf{x})}{k_B T_e} \right) \quad (6.1.10)$$

これをポアソン方程式 (6.1.8) に代入すると、

$$\nabla^2\phi = -\frac{n_0 e}{\epsilon_0} \left\{ 1 - \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e} \right) \right\} \quad (6.1.11)$$

となる。ここで、 $e\phi/k_B T_e \ll 1$ という仮定をして \exp を展開すると、上式は次のように近似できる。

$$\nabla^2\phi = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 k_B T_e} \phi \quad (6.1.12)$$

原点から見て等方的な状況を考えているので、上式を極座標で書き下し^{†6}て角度微分をゼロと置くと、

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\phi) = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 k_B T_e} (r\phi) \quad (6.1.13)$$

という微分方程式が出てくる。これを解くと、 A を適当な定数として

^{†4} このことはプラズマが準中性であると表現される。

^{†5} 付録 2.A.5 で説明したローレンツゲージの式 (2.A.56), (2.A.59) において定常状態 ($\partial/\partial t = 0$) を考えた式である。

^{†6} ラプラシアン極座標表示については付録 1.B を参照のこと。

$$\phi(r) = \frac{A}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \quad (6.1.14)$$

$$\text{ただし, } \lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_0 e^2}} \quad (6.1.15)$$

となる。 $r \rightarrow 0$ でクーロンポテンシャルに漸近するという境界条件を与えると係数 A が決まり、次のように書ける。

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \quad (6.1.16)$$

上式で表されるポテンシャルはデバイ-ヒュッケルポテンシャル、或いは中間子論で現れる同型のポテンシャルの名前から流用して湯川ポテンシャルとも呼ばれる。 $1/r$ でゆっくりと減少するクーロンポテンシャルに、急激な減少を表す因子 $\exp(-r/\lambda_D)$ を乗じた形式であり、 λ_D はおよそポテンシャルの及ぶ空間スケールと解釈できる。様々な単純化を施したモデルによって見積もったが、式 (6.1.15) で表される λ_D がデバイ長と定義される。

$e\phi/k_B T_e \ll 1$ の仮定がどのような条件下で有効なのかを調べる。電子の数密度を n_e と書き、電子間の平均距離を a_e と書くと、

$$\frac{4\pi}{3} a_e^3 = \frac{1}{n_e} \quad (6.1.17)$$

という関係より a_e を見積もることができる。この a_e を用いると、プラズマ中の典型的なクーロンエネルギーの大きさは $e^2/(4\pi a_e)$ と書け、一方で典型的な熱運動のエネルギーの大きさは前節の議論より $k_B T_e$ と書ける。両者の比は

$$\Gamma = \frac{\text{クーロンエネルギー}}{\text{熱エネルギー}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{4\pi}{3} n_e\right)^{1/3} \frac{1}{k_B T_e} \quad (6.1.18)$$

と書ける。つまり、 $\Gamma \ll 1$ が成り立つようなプラズマを対象とする場合には、プラズマを構成する各々の粒子が作り出す電場について $e\phi/k_B T_e \ll 1$ の仮定が成り立つ。クーロンエネルギーが熱エネルギーに比べて小さいようなプラズマは弱結合プラズマ (weakly coupled plasma) と呼ばれ、反対に $\Gamma \gtrsim 1$ であるようなプラズマは強結合プラズマ (strongly coupled plasma) と呼ばれる。弱結合プラズマは各粒子がクーロン力に強く縛られずに熱運動をしているようなプラズマであり、各粒子のクーロン力はデバイ遮蔽により、 λ_D 程度以内の距離にある粒子にしか作用しない。半径 λ_D の球状の領域 (デバイ球) 内にある電子数 N_D はデバイ数と呼ばれる。

$$N_D = \frac{4\pi}{3} \lambda_D^3 n_e = \frac{4\pi}{3\sqrt{n_e}} \left(\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{e^2}\right)^{3/2} \quad (6.1.19)$$

N_D を用いると、 Γ は次のように書ける。

$$\Gamma = \frac{1}{3N_D^{2/3}} \quad (6.1.20)$$

表 6.1 強結合プラズマと弱結合プラズマ

	強結合プラズマ	弱結合プラズマ
定義	$\Gamma \gtrsim 1 (N_D \lesssim 1)$	$\Gamma \ll 1 (N_D \gg 1)$
デ바이球内の粒子数	疎	密
静電ポテンシャルによる強い束縛	常時	衝突の瞬間のみ
典型的な条件	温度が低くて濃密	温度が高くて希薄

$\Gamma \ll 1$ という条件は $N_D \gg 1$ と書き換えられる。デバイ長のスケールの領域に十分な数の粒子が存在することでデバイ遮蔽が上手く機能するわけである。強結合プラズマと弱結合プラズマの対比を表 6.1 にまとめた。

弱結合プラズマにおいて各粒子は基本的にポテンシャルに強く縛られないと述べた。それでも、例えば太陽内部の構造を良い精度で計算したい場合には、各粒子間に働くデバイ遮蔽されたクーロン力の効果を考慮する必要がある。その効果は理想気体の状態方程式からの微小なずれとして流体方程式系に取り入れられる。この話題について詳しくは付録 6.A.1 にまとめた。

6.1.3 プラズマ振動

初めに電子 (電荷 $-e$) と陽イオン (電荷 e) が一様に分布している ($n_e = n_i = n_0$) とする。冷たいプラズマを想定し、単純化のために熱運動は無視して各電子は初めには速度を持たないと仮定する。あるとき、何らかの原因により電子の数密度分布に疎密ができたとする。すると、電子密度が疎である部分、つまり全体的に正に帯電した部分から電子密度が密な部分を向いた電場が現れるため、電子はこの電場から力を受けて密度一様に戻ろうとする。この現象の時間スケールでは衝突は起きないと仮定すると、電子の集団は密度一様な状況を平衡点として振動する。この振動は電子プラズマ振動と呼ばれ、その振動の周波数はプラズマ周波数と呼ばれる。

イオンは電子に比べて慣性が大きいので、電子プラズマ振動の時間スケールでは静止していると考えられる。電子の数密度が $n_e = n_0 + n_1 (|n_1| \ll n_0)$ に揺らいだ結果、電場 \mathbf{E} が誘起されたとする。ガウスの法則、電子の平均速度に関する運動方程式、電子数密度の保存則はそれぞれ次のように書ける。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{n_1 e}{\epsilon_0} \tag{6.1.21}$$

$$m_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = -e \mathbf{E} \tag{6.1.22}$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0 \tag{6.1.23}$$

y, z 方向には一様で x 方向に振動しているモードを考える。すなわち、

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} \tilde{E} \exp[i(kx - \omega t)] \quad (6.1.24)$$

$$n_1 = \tilde{n}_1 \exp[i(kx - \omega t)] \quad (6.1.25)$$

$$\mathbf{v}_e = \hat{\mathbf{x}} \tilde{v}_e \exp[i(kx - \omega t)] \quad (6.1.26)$$

を代入して寄与の小さい項を無視すると、上式は次のようになる。

$$ik\tilde{E} = -\frac{\tilde{n}_1 e}{\epsilon_0} \quad (6.1.27)$$

$$-i\omega m_e \tilde{v}_e = -e\tilde{E} \quad (6.1.28)$$

$$-i\omega \tilde{n}_1 + ikn_0 \tilde{v}_e = 0 \quad (6.1.29)$$

この 3 式から \tilde{E}, \tilde{v}_e を消去すると、波数 k も消えて、次の分散関係が求まる。

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}} \quad (6.1.30)$$

この ω_{pe} がプラズマ周波数である。群速度 $v_g = d\omega/dk$ がゼロなので、伝搬せずにその場で振動するモードであることが分かる。

プラズマ周波数 (6.1.30) と電子の熱速度 (6.1.6)、デバイ長 (6.1.15) の間には次の関係がある。

$$\sqrt{2}\lambda_D = \frac{\bar{v}_e}{\omega_{pe}} \quad (6.1.31)$$

つまり、電子プラズマ振動が起きる時間スケールで電子が熱運動によって移動する距離はおおよそデバイ長であることが言える。故に、振動の擾乱の空間スケールがデバイ長よりも十分に大きければ、上述した熱運動を無視する描像が現実的である。対して、擾乱の空間スケールがデバイ長と同程度の場合、熱運動が無視できず、振動の物理はもう少し複雑になる。

また、上述の電子プラズマ振動の考察では電場の擾乱 \mathbf{E} と波数ベクトル \mathbf{k} が平行 (共に x 方向) である縦波のモードを考えた。一方で横波のモードを考え、式 (6.1.21) から (6.1.23) の 3 式に加えてマクスウェル方程式の残りの式も用いて線形解析を行うと、プラズマ中の電磁波の分散関係が求まる。熱運動まで考慮した状況で縦波のモードを考えると、ラングミュア波と言われる伝搬するモードの分散関係が求まる。このようなプラズマ中の短い時間スケールの波については節 6.7 で説明する。

6.1.4 衝突

弱結合プラズマでは衝突の瞬間以外は静電ポテンシャルに強く縛られないことを節 6.1.2 で述べた。本節では衝突過程に注目して考察し、プラズマ中で衝突が起こる頻度を見積もることを

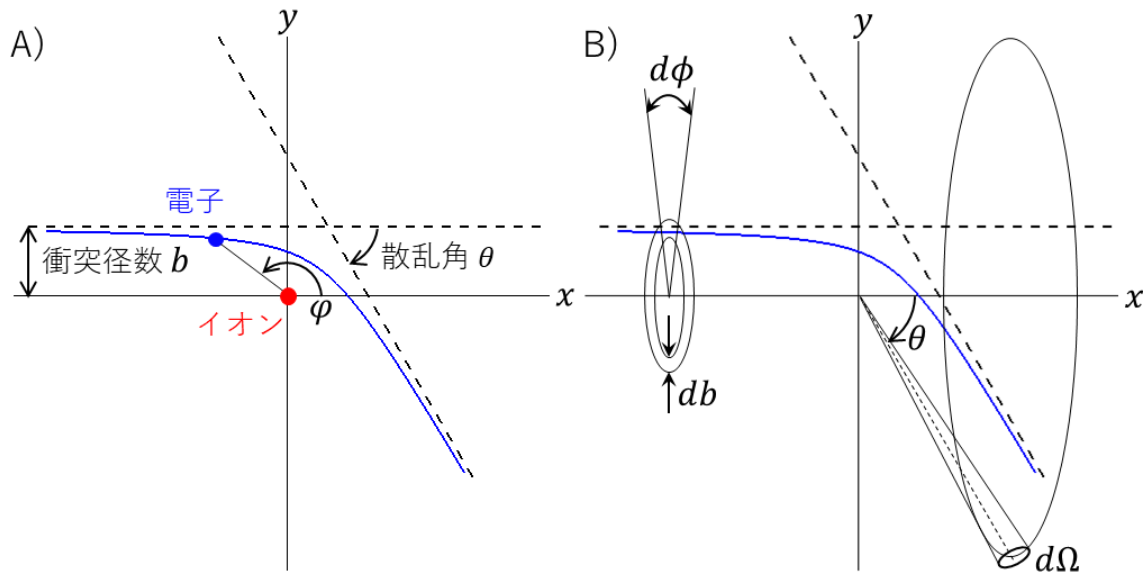


図 6.2 中心力による電子の散乱の古典的イメージ

目標にする。プラズマは十分に希薄であるため、3 体以上の粒子が同時に衝突する過程は 2 体衝突に比べて十分に起こりにくいとして考えない。まず、2 体衝突について考察する。

ラザフォード散乱

接近した 2 粒子がクーロン力によって互いに速度を変化させる現象はラザフォード散乱と呼ばれる。電子 (電荷 $-e$) がイオン (電荷 Ze) と衝突するときの散乱断面積^{†7}を古典力学的に見積もる。後に節 6.2.2 で本節の議論を電子同士の衝突などを含むより一般の場合に拡張する。イオンの質量は電子の質量よりもずっと大きいので、イオンは原点 (重心) で静止しているとみなして考える。電子はクーロン力を受けて、図 6.2 のように平面内で完結する軌道を描く。図 6.2-A のように x, y 軸と衝突径数 (impact parameter) b 、散乱角 θ を定める。電子の速度を (v_x, v_y) と書くと、電子の運動方程式は

$$m_e \frac{dv_x}{dt} = -\frac{Ze^2 x}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad m_e \frac{dv_y}{dt} = -\frac{Ze^2 y}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{6.1.32}$$

$$\text{ただし,} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{6.1.33}$$

^{†7} 数密度 n のイオン中を電子が速さ v で直進する場合、時間 δt の間にこの電子がイオンと衝突する確率を P としたとき、

$$P = n\sigma v\delta t$$

を満たすような面積の次元を持った量 σ を散乱断面積と言う。節 5.1.2 の図 5.1 も参照して欲しい。

と書ける。また、中心力による運動なので、電子の角運動量は保存される。電子の初速度を v_0 とし、極座標 (r, φ) を用いて電子の位置を表すと、角運動量は

$$m_e r^2 \dot{\varphi} = -m_e v_0 b \quad (6.1.34)$$

と書ける。運動方程式の x 成分の dv_x/dt を $dv_x/d\varphi$ に変換し、上式を用いて $\dot{\varphi}$ を消去すると、

$$\frac{dv_x}{d\varphi} = \frac{Ze^2 \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0 m_e v_0 b} \quad (6.1.35)$$

となる。始状態 ($\varphi \rightarrow \pi$) では $v_x = v_0$ であり、終状態 ($\varphi \rightarrow -\theta$) では $v_x = v_0 \cos \theta$ であることを考慮して、始状態から終状態まで上式を積分すると、次の関係が分かる。

$$\int_{v_0}^{v_0 \cos \theta} dv_x = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 v_0 b} \int_{\pi}^{-\theta} \cos \varphi d\varphi \quad (6.1.36)$$

$$\rightarrow \tan \frac{\theta}{2} = \frac{b_0}{b} \quad (6.1.37)$$

$$\text{ただし, } b_0 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v_0^2} \quad (6.1.38)$$

図 6.2-B で示したように、初速 v_0 を一定として衝突径数を $b \sim b + db$ と変化させたときの、電子の散乱角の変化は $\theta \sim \theta + d\theta$ であるとする。 db と $d\theta$ 間の関係は式 (6.1.37) より

$$db = -\frac{b_0}{2 \sin^2(\theta/2)} d\theta \quad (6.1.39)$$

と求まる。微分断面積 $d\sigma/d\Omega$ とは、入射電子の数密度フラックスを I としたときに、 $I(d\sigma/d\Omega)d\Omega$ が方向 $\Omega = (\theta, \phi)$ を含む立体角要素 $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ 内に散乱される電子数を表すような量である。 $d\Omega$ に散乱される確率は、入射電子が図 6.2-B で示した面積 $b d\phi db$ 内を通る確率に等しいので、

$$I \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = I b (-db) d\phi \quad (6.1.40)$$

という関係が分かる。これに式 (6.1.39) を代入することで、微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b_0^2}{4 \sin^4(\theta/2)} \quad (6.1.41)$$

と求まる^{†8}。

^{†8} 量子力学的にラザフォード散乱の微分断面積を考察するならば付録 5.B.13 で説明してあるリップマン-シュウィングラー方程式を解くことで遷移行列を求める。このときに、デバイ-ヒュッケルポテンシャル型の相互作用を仮定し、遷移行列を 1 次の項までで近似 ($\hat{T} \simeq \hat{V}$ 或いは $|\psi^{(+)}\rangle_{\mathbf{I}} \simeq |\mathbf{k}\rangle_{\mathbf{I}}$, ボルン近似) すると、解析的に解くことができる。出てきた解においてデバイ長にあたる係数を無限大にする極限をとると、上式の古典的に求めた微分断面積の形式と一致する (例えば Sakurai & Napolitano, 2010, §6.3)。あるいは、相対論的な場の量子論 (量子電磁気学、QED) を用いれば、系統的な方法 (QED のファインマン則に従ってグリーン関数を求め、LSZ 公式を適用する) によって、上述の微分断面積に加え、相対論的補正が得られる (モット散乱、例えば Schwartz, 2013, §13.4)。

散乱断面積 σ を求めるために微分断面積を全立体角^{†9}で

$$\sigma = 2\pi \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta \quad (6.1.42)$$

$$= \pi b_0^2 \int_0^\pi \frac{\sin(\theta/2) \cos(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} d\theta \quad (6.1.43)$$

$$= \pi b_0^2 \left[\frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \right]_\pi^0 \quad (6.1.44)$$

と積分しようとする、上限で発散してしまう。これは逆 2 乗則で与えられるクーロン力が遠くの粒子まで作用する力であるため、2 粒子間がどれだけ離れていても微小角だけ散乱すると考えなければならないことに対応する。散乱角が $\pi/2$ 以上の散乱のみを対象とした散乱断面積は

$$\sigma_s = 2\pi \int_{\pi/2}^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta \quad (6.1.45)$$

$$= \pi b_0^2 \quad (6.1.46)$$

と計算できる。

小角散乱の重要性

電子とイオンの衝突について考察し、クーロン力は遠くまで作用する力であることを述べた。古典的描像では、電子から見て近くのイオンによる散乱の散乱角は大きく、遠くのイオンによる散乱の散乱角は小さい。典型的な弱結合プラズマでは、散乱角の大きい 1 回の衝突が電子の進行方向を曲げる効果 (単衝突) と、散乱角の小さい衝突が何度も起きた結果として電子の進行方向が大きく曲がる効果 (小角散乱) では後者の方が効率が良い。このことを説明する。

式 (6.1.37) より、散乱角が $\pi/2$ になるのは $b = b_0$ のときであることが分かる。よって、散乱角が $\pi/2$ 以下の散乱を対象とした散乱断面積は、式 (6.1.40) の関係も考慮すると、

$$\sigma_m = \int_{b_0}^{\lambda_D} 2\pi b db \quad (6.1.47)$$

と書ける。ただし、前節で説明した発散を抑えるために、イオンの静電場はデバイ遮蔽によってデバイ長 λ_D 程度の距離までしか影響しないと考え、積分の上限を λ_D とする。電子が z 方向に距離 δl だけ進む間に N 回の衝突を起こすとすると、イオンの数密度を n_i として

$$\frac{N}{\delta l} = n_i \sigma_m = n_i \int_{b_0}^{\lambda_D} 2\pi b db \quad (6.1.48)$$

^{†9} $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ なので、 ϕ に依らない関数 $F(\theta)$ を全立体角 4π で積分するときは

$$\int_{4\pi} F(\theta) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi F(\theta) \sin\theta d\theta = 2\pi \int_0^\pi F(\theta) \sin\theta d\theta$$

と計算できる。

という関係がある。ただし、各々の衝突の散乱角は小さいので、 δl を移動する間、電子はほぼ直進しているとみなしている。

初めに z 方向に速さ v_0 で進んでいた電子が 1 回の衝突で得る x, y 方向の速度 $\delta v_x, \delta v_y$ は次のように書ける。

$$\delta v_x = v_0 \sin \theta \cos \phi, \quad \delta v_y = v_0 \sin \theta \sin \phi \quad (6.1.49)$$

(θ, ϕ) は前節と同じ定義の散乱角である。よって、1 回の衝突で得る初速度と垂直方向の速度 δv_\perp は、式 (6.1.37) を用いると、

$$(\delta v_\perp)^2 = (\delta v_x)^2 + (\delta v_y)^2 \quad (6.1.50)$$

$$= 4v_0^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (6.1.51)$$

$$= \frac{4v_0^2 (b/b_0)^2}{[1 + (b/b_0)^2]^2} \quad (6.1.52)$$

と表される。 δv_\perp の二乗平均は

$$\langle (\delta v_\perp)^2 \rangle = \frac{\int_{b_0}^{\lambda_D} (\delta v_\perp)^2 2\pi b db}{\int_{b_0}^{\lambda_D} 2\pi b db} \quad (6.1.53)$$

と計算される。

以上の議論より、電子が z 方向に単位長だけ進む間に小角散乱によって得る垂直方向の平均的な速度 (の二乗) は

$$\frac{N}{\delta l} \langle (\delta v_\perp)^2 \rangle = 8\pi n_i v_0^2 \int_{b_0}^{\lambda_D} \frac{(b/b_0)^2}{[1 + (b/b_0)^2]^2} b db \quad (6.1.54)$$

と表される。この積分は簡単に実行でき、 $\lambda_D/b_0 \gg 1$ という仮定の下では

$$\frac{N}{\delta l} \langle (\delta v_\perp)^2 \rangle \simeq 8\pi n_i v_0^2 b_0^2 \ln \frac{\lambda_D}{b_0} \quad (6.1.55)$$

と近似できる。ここで出てくる因子を

$$\ln \frac{\lambda_D}{b_0} = \ln \Lambda \quad (6.1.56)$$

と書き、式 (6.1.38) で表される b_0 中の v_0^2 をマクスウェル-ボルツマン分布での平均 $3k_B T_e/m_e$ で見積もると、 Λ はデバイ数 N_D (節 6.1.2 参照) との間に

$$\Lambda = \frac{12\pi}{Z\sqrt{n_e}} \left(\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{e^2} \right)^{3/2} = \frac{9}{Z} N_D \quad (6.1.57)$$

という関係を持つことが分かる。今は弱結合プラズマでの衝突過程を考えているので、 $\Lambda \gg 1$ である。よって、先ほど課した仮定は十分に満たされている。典型的なプラズマでは $\ln \Lambda$ の値は 10 ~ 20 付近の数になる (節 6.1.8 参照)。 Λ はプラズマパラメータ、 $\ln \Lambda$ はクーロン対数と呼ばれる。

小角散乱の効果で電子の曲がり角が大きく (例えば $\pi/4$ のスケールに) なるまでに進む距離、つまり小角散乱の平均自由行程を l_m とすると、

$$\frac{N}{\delta l} \langle (\delta v_{\perp})^2 \rangle \cdot l_m = v_0^2 \quad (6.1.58)$$

という関係より l_m を見積もることができ、

$$l_m = \frac{1}{8\pi n_i b_0^2 \ln \Lambda} \quad (6.1.59)$$

と書ける。一方で、単衝突の平均自由行程 l_s は、式 (6.1.46) で見積もった σ_s を用いて、

$$l_s = \frac{1}{n_i \sigma_s} = \frac{1}{\pi n_i b_0^2} \quad (6.1.60)$$

と書ける。両者の比をとると、

$$\frac{l_s}{l_m} = 8 \ln \Lambda \quad (6.1.61)$$

となる。これは典型的なプラズマでは 10^2 のオーダーの値をとるので、小角散乱の効果の方が大きいと言える。

小角散乱の衝突頻度は

$$\nu_{ei} \sim \frac{\bar{v}_e}{l_m} = \frac{n_i Z^2 e^4 \ln \Lambda}{4\sqrt{2}\pi \epsilon_0^2 \sqrt{m_e} (k_B T_e)^{3/2}} \quad (6.1.62)$$

のオーダーであると見積もられる。衝突頻度の逆数にあたる衝突時間は

$$\tau_e = 6\sqrt{2}\pi^{3/2} \frac{\sqrt{m_e} (k_B T_e)^{3/2} \epsilon_0^2}{n_i Z^2 e^4 \ln \Lambda} \quad (6.1.63)$$

という値がよく用いられる。電子同士の衝突の正確な議論は後に行うが、上式において $n_i \rightarrow n_e, Z \rightarrow 1$ と置き換え、プラズマが準中性 ($n_e \simeq Z n_i$) で Z はせいぜい 1 か 2 とすれば、オーダーとしては上式と同じ時間スケールで起こると考えられる。故に、電子の緩和時間 (節 6.1.1 参照) は τ_e と見積もられる。イオンの熱速度は電子のそれより $\sqrt{m_e/m_i}$ のオーダーだけ小さいため、イオン同士の衝突の衝突時間 τ_i は τ_e よりも $\sqrt{m_i/m_e}/Z^2$ のオーダーだけ大きいと考えられ、

$$\tau_i = 6\sqrt{2}\pi^{3/2} \frac{\sqrt{m_i}(k_B T_i)^{3/2} \epsilon_0^2}{n_i Z^4 e^4 \ln \Lambda} \quad (6.1.64)$$

という値が用いられる。イオンの緩和時間は τ_i と見積もられる。イオンの集団が衝突によって電子の集団と無視できないほどのエネルギーを交換するのにかかる時間は更に長く、

$$\tau_{eq} \sim \frac{m_i}{m_e} \tau_e \quad (6.1.65)$$

と見積もられる。 τ_{eq} より十分に長い時間スケールの現象を考える場合は、電子とイオンの温度は等しいとみなせる。衝突過程についてのより詳しい考察は、節 6.2 で運動論について説明した後、節 6.3 で行う。

6.1.5 磁場中の粒子の基本運動

プラズマ中を巨視的な磁場が貫いている場合の各粒子の基本的な運動について説明する。本節では衝突が起こらない場合を考える。

ジャイロ運動

ある方向を向いた一様で定常な磁場 $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$ を考える。 B は磁場の強さで \mathbf{b} はこの磁場の向きの単位ベクトルである。粒子にはたらくローレンツ力は粒子の速度 \mathbf{v} に垂直なので、粒子の運動エネルギーは保存される。一方でローレンツ力は磁場にも垂直にはたらくため、粒子の速度の磁場に平行な成分 v_{\parallel} も保存される。つまり、 $v^2 = v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2$ という関係を考慮すると、磁場に垂直な速度成分 v_{\perp} も保存されることが分かる。つまり、粒子は磁場に垂直な方向には円運動をし、 v_{\parallel} が有限の場合は磁場に沿って螺旋運動をする。この運動はジャイロ運動またはサイクロトロン運動と呼ばれる。円運動の向きは電子とイオンでは逆回転になる。

粒子種 s の電荷を e_s 、円運動の半径を r_g と書くと、ローレンツ力と遠心力のつり合いの式

$$|e_s|v_{\perp}B = m_s \frac{v_{\perp}^2}{r_g} \quad (6.1.66)$$

より、円運動の周波数は

$$\Omega_s = \frac{v_{\perp}}{r_g} = \frac{|e_s|B}{m_s} \quad (6.1.67)$$

と書ける。これはジャイロ周波数またはサイクロトロン周波数と呼ばれる。 Ω_s は円運動の半径には依らず、粒子種と磁場の強さによって決まる。円運動の半径は

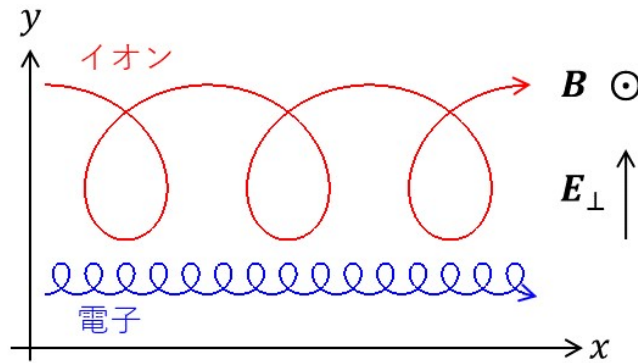


図 6.3 $E \times B$ ドリフトのイメージ

$$r_g = \frac{v_{\perp}}{\Omega_s} \tag{6.1.68}$$

と書ける。これはジャイロ半径またはラーモア半径と呼ばれる。磁場の強さと速度が与えられ、周波数がジャイロ周波数になるような半径の円運動をする^{†10}。

ドリフト運動

上述の状況に電場が加わった時の運動を説明する。磁場に平行な電場 $E = E_{\parallel} \mathbf{b}$ が加わった場合、粒子の磁力線に沿った速度が変化する。一方で磁場に垂直な電場が加わった場合を考える。一様磁場が z 方向 ($B = B\hat{z}$)、一様電場が y 方向 ($E = E\hat{y}$) を向いている場合、粒子の運動方程式の x, y 成分は次のように書ける。

$$m_s \frac{dv_x}{dt} = e_s B v_y, \quad m_s \frac{dv_y}{dt} = -e_s B \left(v_x - \frac{E}{B} \right) \tag{6.1.69}$$

^{†10} 荷電粒子が加速度を持つと電磁波を放射するため、運動エネルギーは保存されないのではないかという懸念がある。ラーモアの公式 (付録 2.A.6, 式 (2.A.106)) に円運動の加速度 v_{\perp}^2 / r_g を代入すると、単位時間あたりの放射エネルギーは

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{v_{\perp}^2}{r_g} \right)^2 = \frac{e^4 v_{\perp}^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 m_e^2 c^3}$$

と書ける。ただし、イオンより電子の方が高速なため、電子の場合で見積もる。よって、 τ を対象とする現象の時間スケールとして、

$$\frac{dW/dt}{m_e v_{\perp}^2 / 2} \tau = 0.4 \cdot \left(\frac{B}{T} \right)^2 \cdot \left(\frac{\tau}{s} \right)$$

は、時間 τ の間に運動エネルギーのうちの何割が放射によって失われるかの指標になる。例えば地上での地磁気の値は 10^{-5} T のスケールなので、地磁気に拘束された粒子の運動を考えたい場合は、 10^9 s \simeq 30 年のような長い現象を見ない限りはジャイロ運動による放射ロスを考慮する必要はないと思われる。或いは太陽表面の黒点では 0.1 T のスケールの強い磁場がある。太陽光球での衝突時間を式 (6.1.63) に数密度 $n_e \simeq n_i = 10^{20}$ m⁻³ と温度 $T_e \simeq 6000$ K を代入して見積もると、 $\tau_e \sim 10^{-10}$ s となるため、衝突時間のスケールの現象に興味がある場合はやはり考慮する必要はない。

この方程式は

$$v'_x = v_x - \frac{E}{B}, \quad v'_y = v_y \quad (6.1.70)$$

という変換をすれば、円運動を表す微分方程式に一致する。上記の変換は元の観測系に対して

$$\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (6.1.71)$$

の速度で動く観測系へのガリレイ変換である。つまり、粒子の運動を $x - y$ 平面上に投影すると、図 6.3 のように回転しながら一定速度 \mathbf{v}_d で横にずれるような動きになる。この運動は $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトと呼ばれる。粒子が電場によって加減速するとジャイロ半径が変化するため、軌道が歪むことにより生じる。同じ \mathbf{E}, \mathbf{B} の下では電子もイオンも同じ向きに同じ速度で移動することに留意して欲しい。より一般に電場ではない他の外力 \mathbf{F} が加わっている場合は

$$\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{e_s B^2} \quad (6.1.72)$$

の速度でドリフト運動をする。更に、磁場の強さに勾配 ∇B がある場合は

$$\mathbf{v}_d = \frac{m_s v_\perp^2}{2e_s B^3} \mathbf{B} \times \nabla B \quad (6.1.73)$$

という速度でドリフト運動をする (詳しくは例えば Gurnett & Bhattacharjee, 2005)。これは磁場勾配ドリフト (gradient drift) と呼ばれる。磁場の強い領域と弱い領域ではジャイロ半径が異なるので、円運動の軌道が歪んでドリフトが起こるのである。 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト以外の一般のドリフト運動は電荷の符号に依存する。

断熱不変量

巨視的な磁場 \mathbf{B} の変化のスケールが大きく、磁場に沿ってジャイロ運動をする粒子が感じる磁場の変化がジャイロ周期に比べてゆっくりである場合、付録 5.A.6 で説明してある断熱不変量が存在する。磁場が注目する領域で z 方向を向いている ($\mathbf{B} = B\hat{z}$) として、この領域で円筒座標 (r, ϕ, z) をとる。すると、ベクトルポテンシャルは $\mathbf{A} = (Br/2)\hat{\phi}$ と書ける。つまり、付録 1.B の知識を用いれば、

$$\mathbf{B} = B\hat{z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{Br}{2} \right) \hat{z} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (6.1.74)$$

と書き換えられることが分かる。荷電粒子の正準運動量は、付録 5.A.3 より

$$\mathbf{p} = m_s \mathbf{v} + e_s \mathbf{A} \quad (6.1.75)$$

なので、正の電荷をもつ粒子の場合は ϕ が減少する向きにジャイロ運動することに注意して断熱不変量を計算すると、

$$J_1 = \oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \left(m_s v_\perp \mp \frac{1}{2} e_s Br_g \right) r_g d\theta = \frac{\pi m_s v_\perp^2}{\Omega_s} \quad (6.1.76)$$

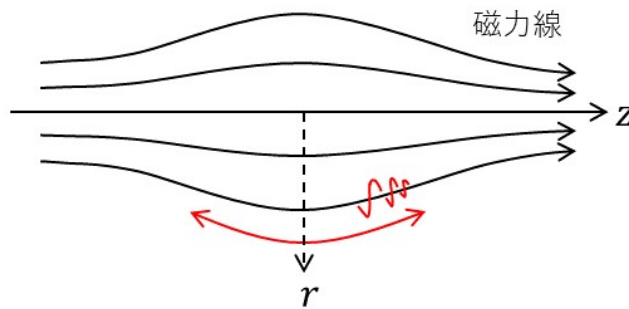


図 6.4 磁気ミラーのイメージ

となる。ただし、複号は上の符号がイオンの場合、下の符号が電子の場合を表すものとして記述する。これは第 1 断熱不変量と呼ばれる。 J_1 はジャイロ運動が描く円の内部を貫く磁束 Φ_g との間に次の関係がある。

$$J_1 = |e_s| \cdot \pi r_g^2 B = |e_s| \Phi_g \tag{6.1.77}$$

つまり、粒子はその円運動の軌道を貫く磁束が一定になるようにジャイロ半径を変えながら螺旋運動をする。また、第 1 断熱不変量と次の関係にある磁気モーメント μ_s という量も用いられる。

$$\mu_s = \frac{|e_s|}{2\pi m_s} J_1 = \frac{m_s v_{\perp}^2}{2B} = \frac{1}{2} |e_s| r_g^2 \Omega_s = \pi r_g^2 I \tag{6.1.78}$$

ただし、最後の表式の $I = |e_s| \Omega / (2\pi)$ はジャイロ運動による電流の大きさと解釈できる。粒子が磁場に沿って動くことで磁場の強さがゆるやかに変化すると、磁気モーメントを一定に保つようにして v_{\perp} が変化する。粒子の運動エネルギーは保存されるため、それに伴って v_{\parallel} も変化する。つまり、磁場の強さの変化を感じると粒子は磁場に沿って加減速する。

粒子の磁力線に沿った方向の運動方程式を考える。粒子の運動エネルギー保存則は

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_s (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) \right] = 0 \tag{6.1.79}$$

と書ける。この式を変形することで、

$$m_s \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\frac{1}{v_{\parallel}} \frac{d}{dt} (\mu_s B) \tag{6.1.80}$$

と書き直せる。磁気モーメントが保存することと、磁力線に沿った位置を表す変数を s とすると $v_{\parallel} = ds/dt$ と書けることを用いると、

$$m_s \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\mu_s \frac{dB}{ds} \tag{6.1.81}$$

と書ける。上式より、粒子は磁力線に沿って、磁場が弱くなる方向へ力を受けることが分かる。例えば図 6.4 のように、両端の磁場が強くなっているような系があったとき、ある点で磁力線に

沿った方向の速度がゼロになり、反射をして往復運動をすることがある。磁場のこのような作用は磁気ミラーと呼ばれる。このように磁場に閉じ込められた粒子については、その往復運動に対する断熱不変量を考えることができる。

$$J_2 = \oint_{\text{往復}} p_{\parallel} ds = \oint_{\text{往復}} m_s v_{\parallel} ds = \oint_{\text{往復}} m_s v_{\parallel}^2 dt \simeq \frac{\pi m_s \tilde{v}_{\parallel}^2}{\omega_b} \quad (6.1.82)$$

これは第 2 断熱不変量 (longitudinal invariant) と呼ばれる。最後の表式は往復運動を調和振動 $v_{\parallel} = \tilde{v}_{\parallel} \cos(\omega_b t)$ で近似した場合である。

図 6.4 を見るとイメージできるように、強さの変化する磁場を表す磁力線は曲率を持っている。この磁力線に巻き付いている粒子が磁力線に沿った速度を持っていると、磁力線の曲率半径を R_c として $F = m_s v_{\parallel}^2 / R_c$ の大きさの遠心力を受けるため、それに伴ってドリフト運動をする。これは湾曲ドリフト (curvature drift) と呼ばれる。図 6.4 のように円筒座標 (r, ϕ, z) を考え、系は ϕ 対称 ($\partial/\partial\phi = 0$) であるとする。 $z = 0$ 平面で磁場は z 方向を向いているとすると、磁場はベクトルポテンシャルを用いて

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\phi}) \quad (6.1.83)$$

と表される。よって、適当な半径 $r = r_0$ で $A_{\phi} = 0$ となるようにポテンシャルの原点をとると、 $z = 0$ 面に描かれた半径 r の円内を貫く磁束 Φ_d は

$$\Phi_d(r) = \int_{r_0}^r B_z \cdot 2\pi r dr = 2\pi r A_{\phi}(r) \quad (6.1.84)$$

と書ける。イオンは ϕ が減少する方向へ、電子は ϕ が増加する方向へドリフトする。遠心力は常に z 軸から遠ざかる方向にはたらくので、このドリフト運動によって粒子は z 軸の周りを円運動する。この周回運動による断熱不変量を考えることができる。

$$J_3 = \oint p_{\phi} r d\phi = \oint (m_s v_d + e_s A_{\phi}) r d\phi \quad (6.1.85)$$

これは第 3 断熱不変量 (flux invariant) と呼ばれる。典型的な系 (例えば地球の双極子磁場による磁気圏での粒子の運動) ではドリフト速度は十分に小さいため、上式は

$$J_3 \simeq 2\pi e_s r A_{\phi} = e_s \Phi_d \quad (6.1.86)$$

と近似される。つまり、粒子はドリフトによって、内部を貫く磁束が一定に保たれるような半径の円を周回する。この運動と前述した磁力線に沿った運動を併せると、粒子は磁力線の集団が描く ϕ 方向に閉じた曲面内を運動する。このような面はドリフトシェルと呼ばれる。

6.1.6 ランダムウォークと磁化

頻繁に衝突が起きている系における各粒子の運動はランダムウォークによってモデル化することができる。ランダムウォークには拡散的な性質があることを節 1.5.1 で述べたが、ランダムウォークによるエネルギーの拡散を考えることによって、フーリエの法則における熱伝導率を簡単に見積もることができる。

小角散乱による平均自由行程 $\ell_s = \bar{v}_s \tau_s$ に比べて十分に大きな空間スケールで温度 T が変化している

$$\frac{1}{T_s} \frac{\partial T_s}{\partial x} \ll \frac{1}{\ell_s} \quad (6.1.87)$$

とする。各粒子は空間ステップ $\delta x = \ell_s$ 、時間ステップ $\delta t = \tau_s$ のランダムウォークに従っている。1回のステップで粒子種 s によって輸送される正味のエネルギーフラックスは

$$q_s = \frac{1}{2} \left\{ \left[n_s \cdot \frac{1}{2} m_s \bar{v}_s^2 \right]_x - \left[n_s \cdot \frac{1}{2} m_s \bar{v}_s^2 \right]_{x+\delta x} \right\} \frac{\delta x}{\delta t} \quad (6.1.88)$$

と書ける。1/2 は等確率で x が負の向きまたは正の向きに輸送されることから係っている。 $m_s \bar{v}_s^2 / 2 \sim k_B T_s$ という関係を考慮すると、上式の $\{ \}$ 内を展開することで、

$$q_s \sim -n_s k_B \frac{(\delta x)^2}{\delta t} \sim -\frac{n_s k_B^2 T_s \tau_s}{m_s} \frac{\partial T_s}{\partial x} \quad (6.1.89)$$

と計算できる。分母に m_s がある一方で $\tau_s \propto m_s^{1/2}$ なので、全体としては $m_s^{-1/2}$ に依存する。よって、質量の大きいイオンよりも電子による熱輸送の効果が大きい。電子の衝突時間が $T_e^{3/2}$ に比例することを考慮すると、熱伝導率は $T_e^{5/2}$ に依存することが分かる。一方で $\tau_e \propto n^{-1}$ なので、熱伝導率の数密度依存性はほぼ無いと見積もられる。

巨視的な強い磁場が存在する状況を考える。磁場が強いため、ジャイロ運動の時空間スケールは衝突の時空間スケールより小さいとする。

$$\Omega_s \ll \nu_s, \quad r_{gs} \ll \ell_s \quad (6.1.90)$$

このとき、各粒子は磁場に平行な方向には自由に動けるため、磁場に平行な方向の熱伝導率 κ_{\parallel} は磁場のない場合と同じように見積もられる。一方で、磁場に垂直な方向には、衝突によってジャイロ半径 r_{gs} 程度の距離ステップずつランダムウォークすると考えて見積もる。よって、熱伝導率は $\delta x = r_g$ とすることで、

$$q_{\perp s} \sim -\frac{n_s m_s k_B^2 T_s}{e^2 B^2 \tau_s} \nabla_{\perp} T_s \quad (6.1.91)$$

と計算できる。上式は $m_s^{1/2}$ に依存するため、磁場に垂直な方向の熱輸送の大部分はイオンが担っていることが分かる。式 (6.1.89) と (6.1.91) を見比べると、各粒子の熱輸送について、磁

場に平行な方向と垂直な方向の熱伝導率は

$$\frac{\kappa_{\parallel}}{\kappa_{\perp}} \sim (\tau_s \Omega_s)^2 \quad (6.1.92)$$

程度異なると期待される。

熱伝導率に限らず、電気抵抗率 (磁気拡散率、電気伝導率) や粘性率も同類の機構によって磁場に平行な方向と垂直な方向では異なる値になることが期待される。詳しい振る舞いは節 6.4 で説明する。このように、輸送係数が磁場の存在によって異方化する現象はプラズマの磁化 (magnetization) と呼ばれる。 $\tau_s \Omega_s$ はその度合の指標になる。

6.1.7 量子力学的効果

付録 5.B.13 や付録 3.B.8 の脚注 (199 ページ) で述べているように、量子力学では自由粒子の状態は 6 次元相空間 $d^3x d^3p$ での体積 h^3 中に 1 個の割合で存在すると数える。一方で、電子や陽子のようなフェルミ粒子では、(スピンの自由度も考慮した上で) 同じ状態に複数の同種粒子が存在することはできない (付録 5.B.9)。実空間の体積 $(\delta x)^3$ 中の粒子種 s の集団が占める相空間での体積 δV は、熱速度 \bar{v}_s を用いて

$$\delta V \sim (\delta x)^3 \cdot \frac{4\pi}{3} (m_s \bar{v}_s)^3 \quad (6.1.93)$$

と見積もられる。この体積 δV 中に許容される状態数は $\delta V/h^3$ 程度と見積もることができるので、 $(\delta x)^3$ 中の粒子数 $n_s (\delta x)^3$ が $\delta V/h^3$ 程度の大きさになるまで粒子が飽和してくると、同じ状態に複数の粒子が入れない不都合によって粒子の統計性が変わる。これは縮退 (degeneracy) の効果と表現される。電子の方がイオンより質量が小さいので、縮退の効果が早く現れる。電子の縮退の効果を考慮しなくて良い条件は

$$n_e (\delta x)^3 \ll \frac{4\pi (\delta x)^3 (m_e \bar{v}_e)^3}{3h^3} \quad (6.1.94)$$

$$\rightarrow \frac{T_e^{3/2}}{n_e} \gg \frac{3h^3}{4\pi (2m_e k_B)^{3/2}} = 5.5 \times 10^{-22} \text{ K}^{3/2} \text{ m}^3 \quad (6.1.95)$$

と書ける。温度が低くて密度の高いプラズマでは縮退の効果を考慮する必要がある。

弱結合プラズマにおいて、電子縮退の効果は理想気体の状態方程式からのずれとして流体方程式系に取り入れられる。その方法について詳しくは付録 6.A.2 にまとめた。プラズマの分布関数を量子力学的に考える手法については、例えば Haas (2011) を参考にして欲しい。

6.1.8 プラズマ中のパラメータのまとめ

プラズマ中の典型的なパラメータである電子の熱速度 \bar{v}_e 、デバイ長 λ_D 、プラズマ周波数 ω_{pe} 、 $Z = 1$ としたときのプラズマパラメータ Λ (\propto デバイ数 N_D)、電子-イオン衝突頻度 ν_{ei}

($= 1/\tau_e$)、電子-イオン衝突の平均自由行程 $\ell_{ei} = \bar{v}_e \tau_e$ 、電子のジャイロ周波数 Ω_e 、 $v_{\perp} = \bar{v}_e/\sqrt{2}$ として見積もった典型的な電子のジャイロ半径 r_{ge} を実用的な形式で再掲する^{†11}。

$$\bar{v}_e = 5.5 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} \cdot \left(\frac{T_e}{\text{K}}\right)^{1/2} \quad (6.1.96)$$

$$\lambda_D = 69 \text{ m} \cdot \left(\frac{T_e}{\text{K}}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{n_e}{\text{m}^{-3}}\right)^{-1/2} \quad (6.1.97)$$

$$\omega_{pe} = 56 \text{ s}^{-1} \cdot \left(\frac{n_e}{\text{m}^{-3}}\right)^{1/2} \quad (6.1.98)$$

$$\Lambda = 9N_D = 1.2 \times 10^7 \cdot \left(\frac{T_e}{\text{K}}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{n_e}{\text{m}^{-3}}\right)^{-1/2} \quad (6.1.99)$$

$$\nu_{ei} = \frac{1}{\tau_e} = 3.6 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1} \cdot \ln \Lambda \cdot \left(\frac{T_e}{\text{K}}\right)^{-3/2} \cdot \left(\frac{n_i}{\text{m}^{-3}}\right) \quad (6.1.100)$$

$$\ell_{ei} = 1.5 \times 10^9 \text{ m} \cdot \frac{1}{\ln \Lambda} \cdot \left(\frac{T_e}{\text{K}}\right)^2 \cdot \left(\frac{n_i}{\text{m}^{-3}}\right)^{-1} \quad (6.1.101)$$

$$\Omega_e = 1.8 \times 10^{11} \text{ s}^{-1} \cdot \left(\frac{B}{\text{T}}\right) \quad (6.1.102)$$

$$r_{ge} = 2.2 \times 10^{-8} \text{ m} \cdot \left(\frac{T_e}{\text{K}}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{B}{\text{T}}\right)^{-1} \quad (6.1.103)$$

様々な系での典型的な値を表 6.2 にまとめた^{†12}。全体的な傾向としては、デバイ長は平均自由行程やジャイロ半径より短く、プラズマ周波数は衝突頻度やジャイロ周波数より大きいことが言える。プラズマパラメータは太陽対流層^{†13}では比較的小さい値をとるが、それ以外ではおよそ 10 ~ 30 の値をとる。いずれの場合も $\Lambda \gg 1$ なので、弱結合プラズマであることが分かる。太陽対流層を除くと、典型的なジャイロ半径は平均自由行程よりも小さく、ジャイロ運動は衝突時間より短いスケールで起きているので、節 6.1.6 で述べたように、プラズマが磁化している場合があることが期待される。逆に対流層では磁化は起きていないことが期待される。地球磁気圏では現象の時間スケールに比べて衝突時間が十分短いとは言えないため、熱平衡に達していない粒子のダイナミクスが重要になる。表の例の中でいちばん Λ の値が小さい太陽の対流層での典型的な値を用いて式 (6.1.95) の左辺を計算すると $10^{-19} \text{ K}^{3/2} \text{ m}^3$ という値になる。よって、

^{†11} 磁場 B の単位は SI 単位系では T (テスラ)、ガウス単位系では G (ガウス) であり、 $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$ である。

^{†12} 太陽対流層のデータは Christensen-Dalsgaard et al. (1996)、Charbonneau (2014)、太陽大気の詳細は Imada et al. (2011)、原始星ジェットのデータは Hartigan & Morse (2007)(HH 30 Jet)、Hartigan et al. (2007)、太陽風のデータは Verscharen et al. (2019)、地球磁気圏のデータは Borovsky & Valdivia (2018) を参考にした。 B は強い磁場を持つ領域で観測される (? を付したものは推定される) 典型的な値である。 ν_{ei}, ℓ_{ei} については $n_e \simeq n_i$ を仮定した。

^{†13} 太陽対流層とは太陽半径を $R_{\odot} = 70 \text{ 万 km}$ として大体 $0.7R_{\odot} < r < R_{\odot}$ の領域のこと。

表 6.2 様々な系での典型的なプラズマパラメータ

	太陽			
	対流層	光球	彩層	コロナ
T_e/K	10^6	6×10^3	$\times 10^4$	10^6
n_e/m^{-3}	10^{28}	10^{20}	10^{16}	10^{15}
B/T	1?	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
$\bar{v}_e/\text{m s}^{-1}$	6×10^6	4×10^5	6×10^5	6×10^6
$\ln \Lambda$	4.8	6.3	12	20
$\omega_{pe}/\text{s}^{-1}$	6×10^{15}	6×10^{11}	6×10^9	2×10^9
ν_{ei}/s^{-1}	2×10^{14}	5×10^9	4×10^5	7×10^1
Ω_e/s^{-1}	$2 \times 10^{11}?$	2×10^{10}	2×10^9	2×10^8
λ_D/m	7×10^{-10}	5×10^{-7}	7×10^{-5}	2×10^{-3}
ℓ_{ei}/m	3×10^{-8}	9×10^{-5}	1×10^0	8×10^4
r_{ge}/m	$2 \times 10^{-5}?$	2×10^{-5}	2×10^{-4}	2×10^{-2}

	地球磁気圏			
	原始星ジェット	太陽風 (地球近傍)	プラズマ圏	プラズマシート
T_e/K	10^4	10^5	10^4	10^6
n_e/m^{-3}	10^{11}	3×10^6	10^8	10^5
B/T	$10^{-6}?$	3×10^{-9}	10^{-7}	~ 0
$\bar{v}_e/\text{m s}^{-1}$	6×10^5	2×10^6	6×10^5	6×10^6
$\ln \Lambda$	17	26	21	31
$\omega_{pe}/\text{s}^{-1}$	2×10^7	1×10^5	6×10^5	2×10^4
ν_{ei}/s^{-1}	6×10^0	9×10^{-6}	8×10^{-3}	1×10^{-8}
Ω_e/s^{-1}	$2 \times 10^5?$	5×10^2	2×10^4	—
λ_D/m	2×10^{-2}	1×10^1	7×10^{-1}	2×10^2
ℓ_{ei}/m	9×10^4	2×10^{11}	7×10^7	5×10^{14}
r_{ge}/m	$2 \times 10^0?$	2×10^3	2×10^1	—

縮退の効果は小さい。

6.2 運動論から MHD 方程式へ

粒子集団の運動を統計的に記述する運動論的方程式を説明した後、それに平均操作を施して様々な仮定を課すことで、多流体方程式系と MHD 方程式系 (1 流体方程式系) を導く。

6.2.1 運動論的方程式

節 6.1.1 で導入した分布関数の時間発展を記述するのが運動論的方程式である。プラズマを構成する粒子種 s の各粒子にはたらく力を大きく 2 つの種類に分けて考える。1 つは 6 次元相空間中のある体積要素 $d^3x d^3v$ 内の粒子全てに等しくはたらくと考えることができるような、大域的な力である。このような力を外力と呼ぶことにする。もう 1 つは近隣の粒子同士の間ではたらく、局所的で瞬間的な力である。この力によって各々の粒子の速度が変化する現象を衝突と呼ぶ。

運動論的方程式を導くにあたって、まずは衝突が起こらないと仮定して外力のみを考える。粒子種 s のみの集団に注目する。時刻 t に相空間のある点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) を含む体積要素 $d^3x d^3v$ 内の粒子に等しくはたらく外力を $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ と書く。この体積要素内の粒子は全て同じニュートンの運動方程式

$$m_s \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad (6.2.1)$$

に従って時間発展するので、この体積要素 (微小領域) 自体が時間 dt の間に

$$x_i \longrightarrow x'_i = x_i + v_i dt, \quad v_i \longrightarrow v'_i = v_i + \frac{F_i}{m_s} dt \quad (6.2.2)$$

と時間発展する (相空間内を移動する) と考えれば、体積要素内の粒子数は一定に保たれる。ただし、 m_s は粒子種 s の質量である。つまり、 dt 経過後の体積要素を $d^3x' d^3v'$ と書けば、

$$f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3x d^3v = f_s(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') d^3x' d^3v' \quad (6.2.3)$$

が成り立つ。式 (6.2.2) で表される変換によって体積要素はヤコビアン

$$J = \begin{vmatrix} \partial x'/\partial x & \partial x'/\partial y & \partial x'/\partial z & \partial x'/\partial v_x & \partial x'/\partial v_y & \partial x'/\partial v_z \\ \partial y'/\partial x & \partial y'/\partial y & \partial y'/\partial z & \partial y'/\partial v_x & \partial y'/\partial v_y & \partial y'/\partial v_z \\ \partial z'/\partial x & \partial z'/\partial y & \partial z'/\partial z & \partial z'/\partial v_x & \partial z'/\partial v_y & \partial z'/\partial v_z \\ \partial v'_x/\partial x & \partial v'_x/\partial y & \partial v'_x/\partial z & \partial v'_x/\partial v_x & \partial v'_x/\partial v_y & \partial v'_x/\partial v_z \\ \partial v'_y/\partial x & \partial v'_y/\partial y & \partial v'_y/\partial z & \partial v'_y/\partial v_x & \partial v'_y/\partial v_y & \partial v'_y/\partial v_z \\ \partial v'_z/\partial x & \partial v'_z/\partial y & \partial v'_z/\partial z & \partial v'_z/\partial v_x & \partial v'_z/\partial v_y & \partial v'_z/\partial v_z \end{vmatrix} \quad (6.2.4)$$

倍になるという定理がある。つまり、

$$d^3x' d^3v' = J d^3x d^3v \quad (6.2.5)$$

という関係がある。 x_i と v_i は独立変数として考えていること ($\partial v_i/\partial x_i = 0$) に注意してヤコビアン J を実際に計算し、 dt について 1 次の項までを残すと、上式は

$$d^3x' d^3v' = \left[1 + \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{F_i}{m_s} \right) dt \right] d^3x d^3v \quad (6.2.6)$$

となる。一方で、分布関数 $f_s(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t')$ を展開して dt について 1 次の項までを残すと、

$$f_s(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') = f_s + \frac{\partial f_s}{\partial t} dt + v_i \frac{\partial f_s}{\partial x_i} dt + \frac{F_i}{m_s} \frac{\partial f_s}{\partial v_i} dt \quad (6.2.7)$$

と書ける^{†14}。ただし右辺の量は $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ で評価している。式 (6.2.6), (6.2.7) を式 (6.2.3) に代入して dt について 1 次の項までを残し、整理すると、

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + v_i \frac{\partial f_s}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{F_i}{m_s} f_s \right) = 0 \quad (6.2.8)$$

という式が出てくる。再度強調すると、これは相空間中の注目する体積要素内の粒子数の保存則と解釈できる。

粒子種 s にはたらく外力として、巨視的な電磁場によるローレンツ力

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = e_s [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] \quad (6.2.9)$$

を考える。 e_s は粒子種 s の電荷である。このとき、例えば

$$\frac{\partial}{\partial v_x} \left(\frac{F_x}{m_s} \right) = \frac{e_s}{m_s} \frac{\partial}{\partial v_x} [E_x + v_y B_z - v_z B_y] = 0 \quad (6.2.10)$$

から分かるように、

$$\frac{\partial}{\partial v_i} \left(\frac{F_i}{m_s} \right) = 0 \quad (6.2.11)$$

となる。よって、式 (6.2.8) の第 3 項の (F_i/m_s) は速度微分の外側に出すことができ、

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_s + \frac{e_s}{m_s} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot \nabla_v f_s = 0 \quad (6.2.12)$$

と書ける。ただし、

$$\nabla_v f_s = \frac{\partial f_s}{\partial v_i} \hat{\mathbf{x}}_i \quad (6.2.13)$$

と書いた。

衝突によって粒子の速度が変化することは、上述した時間発展する体積要素から粒子が取り除かれたり、逆に別の体積要素から注目している体積要素に粒子が移動することで、注目する体積要素の粒子数が増えたりする効果であると解釈できる。この効果は、式 (6.2.12) の右辺に適切な項 (衝突項) を加えることによって表される。衝突項は注目する体積要素での相空間的粒子密度の、衝突による (体積要素に沿った) 時間変化率を表す。衝突項の具体的な形は後述することにして、ここでは

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_s + \frac{e_s}{m_s} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot \nabla_v f_s = C_s[f] \quad (6.2.14)$$

^{†14} 添え字 s については縮約記法の規則の対象外であることに注意して欲しい。つまり、上式の最後の項では添え字 s についての和は取っていない。

と表しておく。この式が (広義の) ボルツマン方程式である。或いは運動論的方程式 (kinetic equation) とも呼ばれる。衝突項を考えない場合の式 (6.2.12) はブラソフ方程式と呼ばれる。

次節で衝突項の具体的な形として用いられるものを説明するが、その前に、各保存則より衝突項が満たすべき性質を説明する。衝突項は各粒子種 s' との衝突の効果の合計で表される。

$$C_s = \sum_{s'} C_{ss'} \quad (6.2.15)$$

s' には s 自身も含む。核融合反応が起きたり粒子が生成消滅、電離、再結合しない限り、注目している実空間体積要素 d^3x 内の注目する粒子種の総数は衝突によって変化しないので、

$$\int C_{ss'} d^3v = 0 \quad (6.2.16)$$

が言える。また、弾性衝突を考える限り衝突において運動量とエネルギーの総和は保存される。よって、粒子種 s が粒子種 s' との衝突で失った運動量やエネルギーに相当する分を、粒子種 s' は粒子種 s との衝突で得なければならないので、

$$\int m_s \mathbf{v} C_{ss'} d^3v = - \int m_{s'} \mathbf{v} C_{s's} d^3v \quad (6.2.17)$$

$$\int \frac{1}{2} m_s v^2 C_{ss'} d^3v = - \int \frac{1}{2} m_{s'} v^2 C_{s's} d^3v \quad (6.2.18)$$

が言える。特に $s = s'$ の場合には

$$\int m_s \mathbf{v} C_{ss} d^3v = 0 \quad (6.2.19)$$

$$\int \frac{1}{2} m_s v^2 C_{ss} d^3v = 0 \quad (6.2.20)$$

を満たす。もうひとつ衝突項の重要な性質は、平衡状態では分布関数をマクスウェル-ボルツマン分布にするというものである。つまり、全粒子種が等しい温度と平均速度のマクスウェル-ボルツマン分布を持つ場合のみ、衝突項がゼロになる。このことは節 6.2.3 で説明する。

6.2.2 フォッカー-プランクの衝突項

粒子種 s についての衝突項 $C_s[f]$ の具体的な形を考える。希薄な中性分子気体を対象とする場合、ボルツマンの衝突項と呼ばれる形式が用いられる。ボルツマンの衝突項については付録 6.B.1 にまとめた。ボルツマンの衝突項を用いたときの式 (6.2.14) が狭義のボルツマン方程式である。一方で、 $\ln \Lambda \gg 1$ であるプラズマにおいては 2 体衝突の中でも特に小角散乱の効果が大きいと考えられることを節 6.1.4 で説明した。小角散乱のみが起きていると近似して得られる形式を衝突項として用いたときの式 (6.2.14) はフォッカー-プランク方程式と呼ばれる。完全電離プラズマの記述にはフォッカー-プランク方程式が用いられる。フォッカー-プランクの衝突項について説明する。

衝突項の一般的な形式

まず初めに速度空間が 1 次元の簡単な場合で説明する。初めに速度 v を持っていた粒子が時間 δt の間に衝突によって速度を $v + \delta v$ に変える確率を $P(v, \delta v)$ と書くことにする。空間変数 x は省略する。ある粒子種についての分布関数 $f(v, t)$ の衝突による時間変化は

$$f(v, t + \delta t) = \int f(v - \delta v, t) P(v - \delta v, \delta v) d(\delta v) \quad (6.2.21)$$

と書ける。つまり、速度 $v - \delta v$ から v に変化した粒子数の、あらゆる δv に対する合計が、次の時間ステップで速度 v を持っている粒子数になる。特に $\delta v = 0$ のときの被積分関数は δt の間に衝突を起こさなかった粒子数を表す。小角散乱の効果が大きいいため、 δt が十分小さければ被積分関数は $\delta v \sim 0$ の周りで鋭いピークを持つことが期待される。よって、被積分関数を δv で展開し、高次の項を無視する。

$$f(v, t + \delta t) \simeq \int \left\{ f(v, t) P(v, \delta v) - \delta v \frac{\partial}{\partial v} [f(v, t) P(v, \delta v)] + \frac{(\delta v)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} [f(v, t) P(v, \delta v)] \right\} d(\delta v) \quad (6.2.22)$$

$$= f(v, t) - \frac{\partial}{\partial v} [\langle \delta v \rangle f(v, t)] + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left[\frac{\langle (\delta v)^2 \rangle}{2} f(v, t) \right] \quad (6.2.23)$$

ただし、2 段目への変形では、確率の規格化条件より

$$\int P(v, \delta v) d(\delta v) = 1 \quad (6.2.24)$$

であることを用い、確率 $P(v, \delta v)$ による期待値を

$$\langle \delta v \rangle = \int \delta v P(v, \delta v) d(\delta v) \quad (6.2.25)$$

$$\langle (\delta v)^2 \rangle = \int (\delta v)^2 P(v, \delta v) d(\delta v) \quad (6.2.26)$$

のように書いた。衝突項は衝突による分布関数の時間変化率を表すので、

$$C[f] = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{f(v, t + \delta t) - f(v, t)}{\delta t} \quad (6.2.27)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\langle \delta v \rangle}{\delta t} f \right] + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left[\frac{\langle (\delta v)^2 \rangle}{2\delta t} f \right] \quad (6.2.28)$$

と書ける。これがフォッカー-プランクの衝突項の考え方である。3 次元速度の多粒子系の場合に拡張すると、

$$C_s = -\sum_{s'} \nabla_v \cdot \mathbf{j}^{ss'} \quad (6.2.29)$$

$$\text{ただし, } \mathbf{j}_k^{ss'} = \frac{\langle \delta v_k \rangle^{ss'}}{\delta t} f_s - \frac{\partial}{\partial v_l} \left[\frac{\langle \delta v_k \delta v_l \rangle^{ss'}}{2\delta t} f_s \right] \quad (6.2.30)$$

である。 $j^{ss'}$ は粒子種 s と s' の衝突による速度空間でのフラックスを表す。第 1 項は衝突によって粒子種 s の集団が感じる平均的な力を表し、典型的には速度を弱めようとする方向に働く。第 2 項は運動論的方程式において速度の 2 階微分として現れる項であり、速度空間における拡散の効果、つまり速度分布を広げようとする効果を表す。互いに逆向きにはたらく第 1 項と第 2 項が釣り合ったときに、衝突項はゼロになる。

小角散乱について再考

粒子種 s (電荷 e_s) と s' (電荷 $e_{s'}$) の衝突 (小角散乱) による粒子種 s の速度変化の期待値 $\langle \delta v_k \rangle^{ss'}$, $\langle \delta v_k \delta v_l \rangle^{ss'}$ を、節 6.1.4 の議論を発展させて具体的に求める。衝突に関わる 2 粒子のラグランジアン^{†15}は

$$L = \frac{1}{2} m_s \dot{x}_s^2 + \frac{1}{2} m_{s'} \dot{x}_{s'}^2 - \frac{e_s e_{s'}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{s'}|} \quad (6.2.31)$$

と表される。2 粒子の重心の位置 \mathbf{R} と相対位置 \mathbf{r} を

$$\mathbf{R} = \frac{m_s \mathbf{x}_s + m_{s'} \mathbf{x}_{s'}}{m_s + m_{s'}}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{s'} \quad (6.2.32)$$

と導入すると、ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu_{ss'} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{e_s e_{s'}}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (6.2.33)$$

$$\text{ただし, } M = m_s + m_{s'}, \quad \mu_{ss'} = \frac{m_s m_{s'}}{m_s + m_{s'}} \quad (6.2.34)$$

と書き換えられる。 $\mu_{ss'}$ は換算質量である。ラグランジアンは \mathbf{R} に依存しないので、 \mathbf{R} についての運動方程式より $\ddot{\mathbf{R}} = 0$ が分かる。つまり、上式の第 1 項は定数なので、原点からクーロン力を受けて軌跡 \mathbf{r} を描く質量 $\mu_{ss'}$ の粒子のラグランジアンに一致する。よって、節 6.1.4 で得た結果において電子質量を換算質量 $\mu_{ss'}$ 、電子速度を相対速度

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_{s'} \quad (6.2.35)$$

に置き換えれば、一般の粒子種同士の衝突現象に適用できる。

衝突によって相対速度が変化する角度 θ は式 (6.1.37) より、

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{b_0}{b} = \frac{e_s e_{s'}}{4\pi\epsilon_0 \mu_{ss'} u^2 b} \quad (6.2.36)$$

という関係を満たす。また、相対速度の曲がり角 $\Omega = (\theta, \phi)$ についての微分断面積は式 (6.1.41) より次のように書ける。

$$\frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega} = \frac{b_0^2}{4 \sin^4(\theta/2)} \quad (6.2.37)$$

^{†15} 解析力学については付録 5.A を参照のこと。

衝突前の粒子 s の進行方向に z 軸をとることにすると、1 回の衝突で相対速度は次のように変化する。

$$\delta \mathbf{u} = u \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + u \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - u(1 - \cos \theta) \hat{\mathbf{z}} \quad (6.2.38)$$

また、

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{R} + \frac{m_{s'}}{m_s + m_{s'}} \mathbf{r} \quad (6.2.39)$$

という関係より、衝突による粒子 s の速度変化は

$$\delta \mathbf{v}_s = \frac{m_{s'}}{m_s + m_{s'}} \delta \mathbf{u} = \frac{\mu_{ss'}}{m_s} \delta \mathbf{u} \quad (6.2.40)$$

となることが分かる。

速度 \mathbf{v} を持った粒子 s と、速度 \mathbf{v}' を含む d^3v' 内の粒子 s' が衝突をして、相対速度 $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$ が Ω を含む $d\Omega$ 内の立体角だけ変化するようなイベントが単位時間に起きる回数は、ラザフォード散乱の微分断面積を用いて次のように書ける。

$$f_{s'}(\mathbf{v}') d^3v' \cdot u \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega}(u, \theta) d\Omega \quad (6.2.41)$$

よって、単位時間あたりの衝突による粒子 s の速度変化の期待値は次のように計算できる。

$$\frac{\langle \delta \mathbf{v} \rangle^{ss'}}{\delta t} = \int d^3v' \int d\Omega u f_{s'}(\mathbf{v}') \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega}(u, \theta) \delta \mathbf{v}(\theta, \phi) \quad (6.2.42)$$

上式の $d\Omega$ についての積分は、上述した 1 回の衝突についての知識を用いると、次のように計算できる。

$$\int d\Omega \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega} \delta \mathbf{v} = \frac{\mu_{ss'}}{m_s} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} d\theta \sin \theta \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega} \delta \mathbf{u} \quad (6.2.43)$$

$$= -\frac{2\pi \mu_{ss'} u \hat{\mathbf{z}}}{m_s} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} d\theta \sin \theta (1 - \cos \theta) \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega} \quad (6.2.44)$$

$$= -\frac{2\pi \mu_{ss'} \mathbf{u}}{m_s} \left(\frac{e_s e_{s'}}{4\pi \epsilon_0 \mu_{ss'} u^2} \right)^2 \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{\sin \theta (1 - \cos \theta)}{4 \sin^4(\theta/2)} d\theta \quad (6.2.45)$$

$$= -\frac{4\pi \mu_{ss'} \mathbf{u}}{m_s} \left(\frac{e_s e_{s'}}{4\pi \epsilon_0 \mu_{ss'} u^2} \right)^2 \ln \left[\frac{\sin(\theta_{\max}/2)}{\sin(\theta_{\min}/2)} \right] \quad (6.2.46)$$

$$= -\frac{4\pi \mu_{ss'} \mathbf{u}}{m_s} \left(\frac{e_s e_{s'}}{4\pi \epsilon_0 \mu_{ss'} u^2} \right)^2 \ln \Lambda \quad (6.2.47)$$

ここで、節 6.1.4 とは違う定義のクーロン対数 $\ln \Lambda$ を導入したが、式 (6.2.36) より

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{b_0^2}{b_0^2 + b^2} \quad (6.2.48)$$

という関係があることを用いると、

$$\ln \Lambda = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{b_0^2 + b_{\max}^2}{b_0^2 + b_{\min}^2} \right] \quad (6.2.49)$$

と書ける。ただし、散乱角が θ_{\min} となるときの衝突径数が b_{\max} であり、散乱角が θ_{\max} となるときの衝突径数が b_{\min} である。節 6.1.4 と同じように、 b_{\min} を b_0 、 b_{\max} をデバイ長 λ_D にとれば、 $\lambda_D \gg b_0$ の下で上式は

$$\ln \Lambda \simeq \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\lambda_D}{b_0} \right)^2 = \ln \frac{\lambda_D}{b_0} \quad (6.2.50)$$

と近似でき、節 6.1.4 で定義されるクーロン対数とさほど値が変わらないことが分かる。結局、期待値は次のように表される。

$$\frac{\langle \delta v_k \rangle^{ss'}}{\delta t} = -\frac{L^{ss'}}{4\pi} \left(1 + \frac{m_s}{m_{s'}} \right) \int \frac{u_k}{u^3} f_{s'}(\mathbf{v}') d^3 v' \quad (6.2.51)$$

$$\text{ただし, } L^{ss'} = \left(\frac{e_s e_{s'}}{\epsilon_0 m_s} \right)^2 \ln \Lambda \quad (6.2.52)$$

次に、期待値 $\langle \delta v_k \delta v_l \rangle^{ss'}$ を考える。 $\langle \delta v_k \rangle^{ss'}$ の場合と同じように、

$$\frac{\langle \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle^{ss'}}{\delta t} = \left(\frac{\mu_{ss'}}{m_s} \right)^2 \int d^3 v' \int d\Omega u f_{s'}(\mathbf{v}') \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega} \delta \mathbf{u} \delta \mathbf{u} \quad (6.2.53)$$

と書ける^{†16}。上式の $d\Omega$ についての積分は次のように計算できる。

$$\mathbf{T} = \int \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega} \delta \mathbf{u} \delta \mathbf{u} d\Omega \quad (6.2.54)$$

$$= 2\pi u^2 \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} (\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}}) + (1 - \cos \theta)^2 \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}} \right] \sin \theta d\theta \quad (6.2.55)$$

\mathbf{T} の xx 成分と yy 成分の積分は

$$T_{xx} = T_{yy} = \pi u^2 \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \sin^3 \theta \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega} d\theta \quad (6.2.56)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e_s e_{s'}}{\epsilon_0 \mu_{ss'} u} \right)^2 \left(\ln \Lambda + \frac{\cos \theta_{\max}}{4} - \frac{\cos \theta_{\min}}{4} \right) \quad (6.2.57)$$

$$\simeq \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e_s e_{s'}}{\epsilon_0 \mu_{ss'} u} \right)^2 \ln \Lambda \quad (6.2.58)$$

と計算できる。ただし、最後の段の近似では $\ln \Lambda \gg 1$ であることを用いた。一方で \mathbf{T} の zz 成分の積分は

$$T_{zz} = 2\pi u^2 \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \sin \theta (1 - \cos \theta)^2 \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega} d\theta \quad (6.2.59)$$

$$= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{e_s e_{s'}}{\epsilon_0 \mu_{ss'} u} \right)^2 (\cos \theta_{\min} - \cos \theta_{\max}) \quad (6.2.60)$$

^{†16} ベクトル \mathbf{V} 同士のテンソル積 (kl 成分が $V_k V_l$ となるような 2 階テンソル) を $\mathbf{V}\mathbf{V}$ と書く。テンソルについては付録 1.B も参考にして欲しい。

と計算できる。\$T_{xx} = T_{yy} \gg T_{zz}\$ であることが分かるので、\$zz\$ 成分は無視して、

$$\mathbf{T} \simeq \frac{L^{ss'}}{4\pi u^2} \left(1 + \frac{m_s}{m_{s'}}\right)^2 (\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}}) \quad (6.2.61)$$

$$= \frac{L^{ss'}}{4\pi u^2} \left(1 + \frac{m_s}{m_{s'}}\right)^2 \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}}{u^2}\right) \quad (6.2.62)$$

と書ける。ただし、\$\mathbf{I}\$ は単位テンソルである。2 段目への変形では、単位ベクトル同士のテンソル積の和が単位テンソルになる

$$\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{I} \quad (6.2.63)$$

という性質と、\$\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{z}}\$ であることを用いた。結局、期待値は次のように書ける。

$$\frac{\langle \delta v_k \delta v_l \rangle^{ss'}}{\delta t} = \frac{L^{ss'}}{4\pi} \int \frac{1}{u} \left(\delta_{kl} - \frac{u_k u_l}{u^2} \right) f_{s'}(\mathbf{v}') d^3 v' \quad (6.2.64)$$

衝突項の具体的な形式

求めた期待値 \$\langle \delta v_k \rangle^{ss'}\$, \$\langle \delta v_k \delta v_l \rangle^{ss'}\$ を式 (6.2.30) に代入してフォッカー-プランクの衝突項の具体的な形式を求める。ローゼンブルースポテンシャル \$\varphi_{s'}(\mathbf{v})\$, \$\psi_{s'}(\mathbf{v})\$ を

$$\varphi_{s'}(\mathbf{v}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} f_{s'}(\mathbf{v}') d^3 v' \quad (6.2.65)$$

$$\psi_{s'}(\mathbf{v}) = -\frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| f_{s'}(\mathbf{v}') d^3 v' \quad (6.2.66)$$

と定義すれば

$$\frac{\partial \varphi_{s'}}{\partial v_k} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{u_k}{u^3} f_{s'}(\mathbf{v}') d^3 v' \quad (6.2.67)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{s'}}{\partial v_k \partial v_l} = -\frac{1}{8\pi} \int \frac{1}{u} \left(\delta_{kl} - \frac{u_k u_l}{u^2} \right) f_{s'}(\mathbf{v}') d^3 v' \quad (6.2.68)$$

と計算できることを用いると、

$$C_s = \sum_{s'} L^{ss'} \frac{\partial}{\partial v_k} \left[\left(1 + \frac{m_s}{m_{s'}}\right) \frac{\partial \varphi_{s'}}{\partial v_k} f_s - \frac{\partial}{\partial v_l} \left(\frac{\partial^2 \psi_{s'}}{\partial v_k \partial v_l} f_s \right) \right] \quad (6.2.69)$$

と書ける。更に、第 2 項にライプニッツ則を適用して、ローゼンブルースの 2 ポテンシャル間に

$$\frac{\partial^2 \psi_{s'}}{\partial v_l^2} = \varphi_{s'} \quad (6.2.70)$$

という関係があることも用いると、

$$C_s = \sum_{s'} L^{ss'} \frac{\partial}{\partial v_k} \left(\frac{m_s}{m_{s'}} \frac{\partial \varphi_{s'}}{\partial v_k} f_s - \frac{\partial^2 \psi_{s'}}{\partial v_k \partial v_l} \frac{\partial f_s}{\partial v_l} \right) \quad (6.2.71)$$

$$\text{ただし, } L^{ss'} = \left(\frac{e_s e_{s'}}{\epsilon_0 m_s} \right)^2 \ln \Lambda \quad (6.2.72)$$

となる。或いは、ローゼンブルースポテンシャルを使わずに $f_{s'}$ を明示して表すと、

$$C_s = - \sum_{s'} \frac{e_s^2 e_{s'}^2 \ln \Lambda}{8\pi \epsilon_0^2 m_s} \frac{\partial}{\partial v_k} \int U_{kl} \left(\frac{f_s(\mathbf{v})}{m_{s'}} \frac{\partial f_{s'}(\mathbf{v}')}{\partial v'_l} - \frac{f_{s'}(\mathbf{v}')}{m_s} \frac{\partial f_s(\mathbf{v})}{\partial v_l} \right) d^3 v' \quad (6.2.73)$$

$$\text{ただし, } U_{kl} = \frac{1}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} \left[\delta_{kl} - \frac{(v_k - v'_k)(v_l - v'_l)}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2} \right] \quad (6.2.74)$$

である。速度変数 \mathbf{v} と積分変数 \mathbf{v}' の区別に注意して欲しい。この形式はランダウの形式と呼ばれる。2 階テンソル U_{kl} は次の関係を恒等的に満たす。

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (6.2.75)$$

保存則より衝突項が満たすべき性質 (6.2.16)-(6.2.18) を上述の衝突項が満たすことは簡単に確かめられる。例えば式 (6.2.16) は、 $d^3 v$ についての積分が表面積分になるため、分布関数が $v \rightarrow \infty$ でゼロになることと併せると分かる。また、式 (6.2.17), (6.2.18) は被積分関数の s, s' の交換に対する対称性を考えれば分かる。

6.2.3 H 定理とマクスウェル-ボルツマン分布

分布関数 $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ に対して、

$$S_s = -k_B \int f_s \ln f_s d^3 v \quad (6.2.76)$$

は単位体積あたりのエントロピーを表す。この節を読み進めると納得できるはずである。本節で説明する内容の概要を先に示す。

1. 孤立系でのエントロピーの総量

$$\mathcal{S}_s = \int S_s d^3 x \quad (6.2.77)$$

を考えたとき、

$$\frac{d\mathcal{S}_s}{dt} = -k_B \int C_s \ln f_s d^3 x d^3 v \quad (6.2.78)$$

と書ける。つまり、エントロピーは衝突によってのみ生成される。

2. フォッカー-プランク (ランダウ) の同種粒子間の衝突項は確かにエントロピーを増大させる。つまり、

$$\left(\frac{\partial S_s}{\partial t} \right)_{\text{同種}} = -k_B \int C_{ss} \ln f_s d^3v \geq 0 \quad (6.2.79)$$

である (ボルツマンの H 定理)。

3. 分布関数 f_s が局所マクスウェル-ボルツマン分布の場合のみ、同種粒子間衝突によるエントロピー生成がゼロになる。つまり、上式の等号が成り立つ。
4. 以上の議論より、分布関数が局所マクスウェル-ボルツマン分布であるときに局所熱平衡状態であることが分かる。このときの S_s を計算してみると、確かに節 3.4.1 で述べたエントロピーの形式と一致する。
5. 粒子種 s と s' が同じ温度、平均速度のマクスウェル-ボルツマン分布である場合は、これらの粒子間の衝突項もゼロになる。

1 について

式 (6.2.76) を用いると、

$$\frac{d\mathcal{S}_s}{dt} = -k_B \int \frac{\partial f_s}{\partial t} (1 + \ln f_s) d^3x d^3v \quad (6.2.80)$$

と書ける。第 1 項の積分は系全体での粒子数が保存することからゼロになる。第 2 項の $\partial f_s / \partial t$ は運動論的方程式より、

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{v} f_s) - \nabla_v \cdot \left(\frac{\mathbf{F}}{m_s} f_s \right) + C_s \quad (6.2.81)$$

と書ける。 \mathbf{F} はローレンツ力である。上式の第 1, 2 項は

$$\begin{aligned} & \int \ln f_s \left\{ \nabla \cdot (\mathbf{v} f_s) + \nabla_v \cdot \left(\frac{\mathbf{F}}{m_s} f_s \right) \right\} d^3x d^3v \\ &= \int \left\{ \nabla \cdot [\mathbf{v} f_s (\ln f_s - 1)] + \nabla_v \cdot \left[\frac{\mathbf{F}}{m_s} f_s (\ln f_s - 1) \right] \right\} d^3x d^3v \end{aligned} \quad (6.2.82)$$

というようにして、最終的にガウスの発散定理を用いて表面積分に変形できるので、孤立系全体で積分するとゼロになる。よって、衝突項だけが \mathcal{S}_s に寄与し、式 (6.2.78) のように書ける。

2 について

同種粒子間の衝突によるエントロピー生成率は、ランダウの衝突項 (6.2.73) を用いると、

次のように計算できる。

$$\left(\frac{\partial S_s}{\partial t}\right)_{\text{同種}} = -k_B \int C_{ss} \ln f_s d^3v \quad (6.2.83)$$

$$= \frac{k_B L^{ss}}{8\pi} \int d^3v \int d^3v' \ln f_s \frac{\partial}{\partial v_k} U_{kl} \left(f_s \frac{\partial f'_s}{\partial v'_l} - f'_s \frac{\partial f_s}{\partial v_l} \right) \quad (6.2.84)$$

$$= -\frac{k_B L^{ss}}{8\pi} \int d^3v \int d^3v' \frac{\partial \ln f_s}{\partial v_k} U_{kl} \left(f_s \frac{\partial f'_s}{\partial v'_l} - f'_s \frac{\partial f_s}{\partial v_l} \right) \quad (6.2.85)$$

$$\text{ただし, } f_s = f_s(\mathbf{v}), \quad f'_s = f_s(\mathbf{v}') \quad (6.2.86)$$

2 段目から 3 段目の変形では d^3v についての積分で部分積分をした。上式で積分変数の \mathbf{v} と \mathbf{v}' を入れ替えても積分結果には影響しない。入れ替えた式と上式を足して 2 で割ることで、

$$\left(\frac{\partial S_s}{\partial t}\right)_{\text{同種}} = \frac{k_B L^{ss}}{16\pi} \int d^3v \int d^3v' f_s f'_s U_{kl} \left(\frac{\partial \ln f'_s}{\partial v'_k} - \frac{\partial \ln f_s}{\partial v_k} \right) \left(\frac{\partial \ln f'_s}{\partial v'_l} - \frac{\partial \ln f_s}{\partial v_l} \right) \quad (6.2.87)$$

を得る。ここで、シュワルツの不等式より、任意のベクトル \mathbf{a} に対して

$$U_{kl} a_k a_l = \frac{1}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^3} \{ |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^2 a^2 - [(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \cdot \mathbf{a}]^2 \} \geq 0 \quad (6.2.88)$$

が成り立つことを用いれば、上式が非負の値をとることが分かる。

3 について

シュワルツの不等式において等号が成り立つのはベクトル $(\mathbf{v} - \mathbf{v}')$ と \mathbf{a} が平行な場合のみなので、同種粒子間衝突によるエントロピー生成がゼロになるための必要十分条件は

$$\frac{\partial \ln f'_s}{\partial v'_k} - \frac{\partial \ln f_s}{\partial v_k} = c_0 (v_k - v'_k) \quad (6.2.89)$$

である。 c_0 は適当な定数である。上式は、 \mathbf{v}_0 を別の定数として

$$\frac{\partial \ln f_s}{\partial v_k} = -c_0 (v_k - v_{0k}) \quad (6.2.90)$$

という形で書ける場合のみ成り立つ。つまり、

$$f_s = c_1 \exp[-c_0 (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2] \quad (6.2.91)$$

である。節 6.1.1 で説明したように各定数に物理的意味を与えると、マクスウェル-ボルツマン分布 f_s^0 になる。ただし、今考えているのは、実空間中の各点 (\mathbf{x}, t) における数密度、温度、平均速度に合わせ、各点で一般には異なる幅や高さを持つマクスウェル-ボルツマン分布である。このような分布を局所マクスウェル-ボルツマン分布と言う。

4 について

熱平衡状態での粒子種 s の圧力 p_s は運動論においては次のように理解できる。粒子を完全に反射するような壁が \hat{x} に垂直に置かれているとする。この壁に運動量 $m_s \mathbf{v}$ を持った 1 粒子が反射すると、壁に $2m_s v_x$ の運動量を与える。時間 δt の間に壁の面積 δS の部分に運動量 $m_s \mathbf{v}$ を持った粒子数が反射する回数は、体積 $v_x \delta t \delta S$ の中にあってその運動量を持っている粒子数 $v_x f_s^0 d^3 v \delta t \delta S$ に等しい。一方で単位時間単位面積あたりに壁が受け取る運動量の総量が圧力である。よって、平均速度 \mathbf{v}_0 をゼロとしたマクスウェル-ボルツマン分布 f_s^0 に対して

$$p_s = \int_{v_x > 0} 2m_s v_x^2 f_s^0 d^3 v \quad (6.2.92)$$

$$= \int m_s v_x^2 f_s^0 d^3 v \quad (6.2.93)$$

という関係がある。ただし、2 段目では積分範囲を速度空間 $d^3 v$ の全範囲に拡張した代わりに 2 で割った。速度空間で等方的な系を考えているので、 \hat{y}, \hat{z} に垂直な壁を考えても p_s は同じ値になる。3 つの場合の式を足し合わせて 3 で割ると、

$$p_s = \frac{m_s}{3} \int v^2 f_s^0 d^3 v \quad (6.2.94)$$

となる。この積分を実行すると、次の式を得る。

$$p_s = n_s k_B T_s \quad (6.2.95)$$

これは粒子種 s に関する理想気体の状態方程式である。

マクスウェル-ボルツマン分布 f_s^0 に対して式 (6.2.76) を実際に計算すると、次のようになる。

$$S_s^0 = -k_B \int f_s^0 \ln f_s^0 d^3 v \quad (6.2.96)$$

$$= -n_s k_B \left\{ \ln \left[n_s \left(\frac{m_s}{2\pi k_B T_s} \right)^{3/2} \right] - \frac{3}{2} \right\} \quad (6.2.97)$$

$$= \frac{3}{2} n_s k_B \ln \left(\frac{p_s}{\rho_s^{5/3}} \right) + \text{定数} \quad (6.2.98)$$

ただし、質量密度 $\rho_s = m_s n_s$ を導入した。これは確かに式 (3.4.8) の形式に一致する。

5 について

実際に式 (6.2.73) にマクスウェル-ボルツマン分布を代入して計算してみると分かる。

節 6.1.2 の補足

外力として保存力

$$\mathbf{F} = -\nabla \phi(\mathbf{x}) \quad (6.2.99)$$

が加わっている場合の平衡解は

$$f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f_s^0(\mathbf{v}) \exp\left(-\frac{\phi(\mathbf{x})}{k_B T_s}\right) \quad (6.2.100)$$

と表されることを示す。上式は時間 t に依存しないので、 $\partial f_s / \partial t = 0$ であることは明らかである。また、新たな因子 $\exp[-\phi(\mathbf{x}) / (k_B T_s)]$ は速度 \mathbf{v} に依存しないので、衝突項もゼロになることが分かる。よって、運動論的方程式の残りの項は

$$\left[\mathbf{v} \cdot \nabla - \frac{\nabla \phi(\mathbf{x})}{m_s} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right] f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0 \quad (6.2.101)$$

となる。 $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ がこれを満たすことは直ぐに分かる。

6.2.4 モーメント積分と保存則

運動論的方程式は個々の粒子の速度を統計的に扱う方程式である。 $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ の計 7 個の変数を持つため、この方程式を用いて現象の解析を行うのは困難である。よって、実用的には、粒子の運動の平均的な性質を表す量をいくつか導入して、それらの量の時間発展方程式 (保存則) を求める。それらの式が運動論的方程式の代わりに用いられる^{†17}。なお、以後電子と 1 種類のイオンから成る完全電離プラズマを考えることにする。つまり、電子の場合 $s = e$ 、イオンの場合 $s = i$ である。部分電離プラズマについては節 6.5 で説明する。

モーメントを計算する

保存則を求めるには、運動論的方程式の両辺に $1, \mathbf{v}, v^2$ を乗じてから速度空間で積分する。この操作は「運動論的方程式のモーメントを計算する」と表現される。まず、 1 を乗じて (何も乗じないで) 積分すると、運動論的方程式 (6.2.14) の左辺第 1 項は

$$\int \frac{\partial f_s}{\partial t} d^3v = \frac{\partial n_s}{\partial t} \quad (6.2.102)$$

というように、実空間での数密度に置き換わる。第 2 項は

$$\int \mathbf{v} \cdot \nabla f_s d^3v = \nabla \cdot \int \mathbf{v} f_s d^3v \quad (6.2.103)$$

となる。ここで、各点での粒子の平均速度 \mathbf{u}_s を

$$\mathbf{u}_s = \frac{\int \mathbf{v} f_s d^3v}{\int f_s d^3v} = \frac{1}{n_s} \int \mathbf{v} f_s d^3v \quad (6.2.104)$$

^{†17} この手法は節 5.1 で放射輸送方程式に対してモーメント方程式を求めた手法と同類である。

と導入すれば、第 2 項は $\nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s)$ と書ける。第 3 項は

$$\frac{e_s}{m_s} \int [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot \nabla_v f_s d^3v = \frac{e_s}{m_s} \int f_s [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{S} \quad (6.2.105)$$

というように表面積分に置き換わる。例えばマクスウェル-ボルツマン分布のような分布関数の場合、被積分関数は $v \rightarrow \infty$ でゼロになるため、以後、表面積分はゼロであると考え。運動論的方程式の衝突項は、その性質 (6.2.16) より積分するとゼロになるため、結局 1 を乗じたモーメントは次のようになる。

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = 0 \quad (6.2.106)$$

これは粒子種 s の質量保存則を表す。

次に、 \mathbf{v} を乗じたモーメントを求める。以後、ある量 $Q(\mathbf{v})$ についての粒子種 s の速度分布に対する平均値を

$$\langle Q \rangle_s = \frac{\int Q f_s d^3v}{\int f_s d^3v} = \frac{1}{n_s} \int Q f_s d^3v \quad (6.2.107)$$

と書く。つまり、 $\mathbf{u}_s = \langle \mathbf{v} \rangle_s$ である。運動論的方程式の左辺第 1, 2 項は

$$\int \frac{\partial f_s}{\partial t} \mathbf{v} d^3v = \frac{\partial}{\partial t} (n_s \mathbf{u}_s) \quad (6.2.108)$$

$$\int \mathbf{v} \cdot \nabla f_s \mathbf{v} d^3v = \nabla \cdot \int \mathbf{v} \mathbf{v} f_s d^3v = \nabla \cdot (n_s \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle_s) \quad (6.2.109)$$

と書ける。ライプニッツ則と $\nabla_v \cdot [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] = 0$ より、

$$[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_k \frac{\partial f_s}{\partial v_k} v_i = \frac{\partial}{\partial v_k} ([\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_k v_i f_s) - [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_k \delta_{ik} f_s \quad (6.2.110)$$

と計算できることを用いれば、第 3 項は表面積分を無視して

$$\frac{e_s}{m_s} \int [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot \nabla_v f_s \mathbf{v} d^3v = -\frac{e_s n_s}{m_s} [\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}] \quad (6.2.111)$$

と書ける。衝突項の性質 (6.2.19) も用いれば、 \mathbf{v} を乗じたモーメントは次のように書ける。

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_s m_s \mathbf{u}_s) + \nabla \cdot (n_s m_s \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle_s) = n_s e_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) + \int m_s \mathbf{v} C_{s\bar{s}} d^3v \quad (6.2.112)$$

ただし、 \bar{s} は s とは逆の粒子種を表す。つまり、例えば $s = e$ ならば $\bar{s} = i$ である。上式は粒子種 s の運動量保存則を表す。

v^2 を乗じたモーメントも同様にして各項を計算していくと、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} n_s m_s \langle v^2 \rangle_s \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} n_s m_s \langle v^2 \mathbf{v} \rangle_s \right) = n_s e_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_s + \int \frac{1}{2} m_s v^2 C_{s\bar{s}} d^3v \quad (6.2.113)$$

と書ける。これは粒子種 s のエネルギー保存則を表す。

$\mathbf{v}\mathbf{v}$ や $v^2\mathbf{v}$ を乗じて積分することで、上述した保存則に現れる $\langle \mathbf{v}\mathbf{v} \rangle_s$ や $\langle v^2\mathbf{v} \rangle_s$ の時間発展式を導出することもできるが、それらの式の中には更に高次のモーメントが出てきてしまうため、それらの時間発展式を求めようとすると堂々巡りになる。普通は上述の成分にして計 5 つの保存則を以て打ち切る。

速度を平均と平均からのずれに分ける

運動量保存則 (6.2.112) に現れる \mathbf{v} を平均とそこからのずれに分ける。

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle_s + \tilde{\mathbf{v}}_s = \mathbf{u}_s + \tilde{\mathbf{v}}_s \quad (6.2.114)$$

$\langle \tilde{\mathbf{v}}_s \rangle = 0$ である。これを用いると、

$$\langle \mathbf{v}\mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}_s \mathbf{u}_s + \langle \tilde{\mathbf{v}}_s \tilde{\mathbf{v}}_s \rangle \quad (6.2.115)$$

と計算できる。保存則に現れる 2 階テンソル $\mathbf{P}_s = n_s m_s \langle \tilde{\mathbf{v}}_s \tilde{\mathbf{v}}_s \rangle$ は応力テンソルと呼ばれる。応力テンソルの等方的な成分を $p_s \mathbf{I}$ 、そこからのずれを $\boldsymbol{\pi}_s$ と書くことにする。つまり、

$$\mathbf{P}_s = n_s m_s \langle \tilde{\mathbf{v}}_s \tilde{\mathbf{v}}_s \rangle = p_s \mathbf{I} + \boldsymbol{\pi}_s \quad (6.2.116)$$

$$\text{ただし, } \text{Tr}(\boldsymbol{\pi}_s) = 0 \quad (6.2.117)$$

である。 $\text{Tr}(\boldsymbol{\pi}_s)$ は $\boldsymbol{\pi}_s$ のトレース (対角成分の和) という意味である。 p_s は圧力、分布関数の異方性から現れる $\boldsymbol{\pi}_s$ は粘性応力テンソルである。衝突項から出てくる項については、

$$\mathbf{R}_s = \int m_s \tilde{\mathbf{v}}_s C_{s\bar{s}} d^3v = \int m_s \mathbf{v} C_{s\bar{s}} d^3v \quad (6.2.118)$$

と書くことにする。 \mathbf{R}_s は異種間の運動量交換の平均を表す量であり、摩擦力 (friction force) と呼ばれる。衝突項の性質 (6.2.17) より

$$\mathbf{R}_e = -\mathbf{R}_i \quad (6.2.119)$$

が成り立つ。結局、粒子種 s の運動量保存則は次のように書ける。

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_s m_s \mathbf{u}_s) + \nabla \cdot (n_s m_s \mathbf{u}_s \mathbf{u}_s) = -\nabla p_s - \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_s + n_s e_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}_s \quad (6.2.120)$$

エネルギー保存則 (6.2.113) についても同様に書き換える。まず時間微分項について、 $\mathbf{v} = \mathbf{u}_s + \tilde{\mathbf{v}}_s$ を代入して展開し、 $\langle \tilde{\mathbf{v}}_s \rangle = 0$ を用いることで、

$$\frac{1}{2} n_s m_s \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} n_s m_s u_s^2 + \frac{1}{2} n_s m_s \langle \tilde{v}_s^2 \rangle \quad (6.2.121)$$

が分かる。上式の第 1 項は平均速度によるエネルギーであり、これを運動エネルギーと言う。第 2 項は平均速度からのずれの分散に相当するものであり、これを熱エネルギーと言う。熱エネルギーは応力テンソルのトレースを考えることによって、

$$\frac{1}{2} n_s m_s \langle \tilde{v}_s^2 \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{P}_s) = \frac{3}{2} p_s \quad (6.2.122)$$

と書けることが分かる。つまり圧力 p_s は、節 6.1.1 で述べたように

$$\frac{1}{2} m_s \langle \tilde{v}_s^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T_s \quad (6.2.123)$$

と導入される温度 T_s との間に、

$$p_s = n_s k_B T_s \quad (6.2.124)$$

という関係を持つ。次に、 $\nabla \cdot$ の中に現れる $\langle v^2 \mathbf{v} \rangle$ については、

$$\langle v^2 \mathbf{v} \rangle = u_s^2 \mathbf{u}_s + \langle \tilde{v}_s^2 \rangle \mathbf{u}_s + \langle \tilde{v}_s^2 \tilde{\mathbf{v}}_s \rangle + 2\mathbf{u}_s \cdot \langle \tilde{\mathbf{v}}_s \tilde{\mathbf{v}}_s \rangle \quad (6.2.125)$$

と計算できる。上式は第 1 項からそれぞれ、運動エネルギーの平均速度による移流、熱エネルギーの平均速度による移流、熱エネルギーの熱運動によるフラックス (熱流束)、応力による仕事率に相当する。熱流束は次のように書くことにする。

$$\mathbf{q}_s = \frac{1}{2} n_s m_s \langle \tilde{v}_s^2 \tilde{\mathbf{v}} \rangle \quad (6.2.126)$$

衝突項由来の項については、

$$Q_s = \int \frac{1}{2} m_s \tilde{v}_s^2 C_{s\bar{s}} d^3 v \quad (6.2.127)$$

と書くことにすると、

$$\int \frac{1}{2} m_s v^2 C_{s\bar{s}} d^3 v = \int \left(m_s \mathbf{u}_s \cdot \tilde{\mathbf{v}}_s + \frac{1}{2} m_s \tilde{v}_s^2 \right) C_{s\bar{s}} d^3 v \quad (6.2.128)$$

$$= \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{R}_s + Q_s \quad (6.2.129)$$

と書ける。 Q_s は異種間での衝突によって生じる熱を表し、衝突項の性質 (6.2.18) より、

$$Q_e + Q_i = -\mathbf{u}_e \cdot \mathbf{R}_e - \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{R}_i = (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \cdot \mathbf{R}_e \quad (6.2.130)$$

という関係が分かる。以上より、エネルギー保存則は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} n_s m_s u_s^2 + \frac{3}{2} p_s \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} n_s m_s u_s^2 \mathbf{u}_s + \frac{5}{2} p_s \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\pi}_s + \mathbf{q}_s \right) \\ = n_s e_s \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{R}_s + Q_s \end{aligned} \quad (6.2.131)$$

上述した 3 保存則に加え、電荷密度 ζ と電流密度 \mathbf{j} を

$$\zeta = e_e n_e + e_i n_i = Z n_i - n_e \quad (6.2.132)$$

$$\mathbf{j} = e_e n_e \mathbf{u}_e + e_i n_i \mathbf{u}_i = Z n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e \quad (6.2.133)$$

と導入し、マクスウェル方程式を用いると全体の方程式系になる。しかし、 $\boldsymbol{\pi}_s, \mathbf{R}_s, \mathbf{q}_s, Q_s$ を巨視的な量 n_s, \mathbf{u}_s, p_s (或いは T_s), \mathbf{E}, \mathbf{B} で表さないことには方程式系を閉じることができない。この関係を考察することが運動論の役割のひとつである。ここで重要になる分布関数が局所マクスウェル-ボルツマン分布である。再掲すると、実空間の各点での $n_s(\mathbf{x}, t), T_s(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)$ に対して次のように定義される。

$$f_s^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = n_s \left(\frac{m_s}{2\pi k_B T_s} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m_s |\mathbf{v} - \mathbf{u}_s|^2}{2k_B T_s} \right] \quad (6.2.134)$$

節 6.2.3 で述べたように、分布関数が各点においてこの関数に従うとき、プラズマが局所熱平衡にあると言う。 f_s^0 は $\tilde{\mathbf{v}}_s$ を変数にとれば速度空間で等方的なので、 $\tilde{\mathbf{v}}_s$ についての奇関数の平均をゼロにする。故に粒子種 s の分布関数が f_s^0 である場合は、 $\boldsymbol{\pi}_s, \mathbf{q}_s$ はゼロである。さらに、電子とイオンが温度 T_s と平均速度 \mathbf{u}_s の等しいマクスウェル-ボルツマン分布に従う場合はフォッカー-プランク (ランダウ) の異種間の衝突項がゼロになるため、 \mathbf{R}_s, Q_s もゼロになる。よってこの場合は方程式系が完全に閉じる。しかし、現実の系では分布関数が f_s^0 からずれるため、 $\boldsymbol{\pi}_s, \mathbf{R}_s, \mathbf{q}_s, Q_s$ が存在する。対象とする系でこのずれが大きい場合は、モーメントを用いることの是非を問うべきである。しかし、小さい場合はこれらの量を見積もる手法がある。詳しくは節 6.4 で説明する。

6.2.5 1 流体方程式

前節では運動論的方程式のモーメントを考えることで、多流体方程式系を構成した。対象とする系で更に次のような条件が満たされる場合、電子集団とイオン集団をまとめてひとつの流体として扱った方が、方程式系が簡単になる。

- 電子とイオン間の緩和時間 τ_{eq} より十分に長い時間スケールの現象を対象とするため、電子とイオンの温度が等しい。

$$T_e = T_i \quad (6.2.135)$$

- プラズマが全体として中性を保っている (準中性の仮定)。

$$|n_e - Zn_i| \ll n_e \quad (6.2.136)$$

これはデバイ長より十分に大きく、プラズマ振動数より十分に長いスケールの現象を対象とする場合には成り立つと考えられる。

- 電子とイオンの平均速度差が十分に小さい (弱電流の仮定)。

$$|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e| \ll \frac{|n_e m_e \mathbf{u}_e + n_i m_i \mathbf{u}_i|}{n_e m_e + n_i m_i} \quad (6.2.137)$$

この仮定の下で導出される方程式は 1 流体方程式と呼ばれる。第 3 章で説明した MHD 方程式系である。

電荷密度 (6.2.132) と電流密度 (6.2.133) に加え、次の量を導入する。

$$\rho = n_e m_e + n_i m_i \quad (\text{質量密度}) \quad (6.2.138)$$

$$\rho \mathbf{U} = n_e m_e \mathbf{u}_e + n_i m_i \mathbf{u}_i \quad (\text{運動量密度}) \quad (6.2.139)$$

$$p = p_e + p_i = (n_e + n_i) k_B T \quad (\text{圧力}) \quad (6.2.140)$$

電荷密度と質量密度を用いると、準中性の仮定は次のように書ける。

$$|\zeta| \ll \frac{Ze}{m_i} \rho \quad (6.2.141)$$

また、準中性の仮定の下で

$$\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e \sim \frac{\mathbf{j}}{en_e} \quad (6.2.142)$$

であることを用いると、弱電流の仮定は

$$|\mathbf{j}| \ll en_e |\mathbf{U}| \quad (6.2.143)$$

と書ける。

多流体方程式、つまり $n_e, n_i, \mathbf{u}_e, \mathbf{u}_i, p_e, p_i$ の成分にして計 10 個の変数についての方程式を、 $T_e = T_i$ の仮定の下で $\rho, \zeta, \mathbf{U}, \mathbf{j}, p$ の成分にして計 9 個の方程式に変換する。準中性の仮定と弱電流の仮定、および $Zm_e/m_i \ll 1$ であることを用いて近似すると、多流体方程式での各変数は新しく導入した各変数によって次のように表される。

$$n_e = \frac{Z\rho - m_i\zeta/e}{m_i + Zm_e} \underset{\text{準中性}}{\simeq} \frac{Z\rho}{m_i} \quad (6.2.144)$$

$$n_i = \frac{\rho + m_e\zeta/e}{m_i + Zm_e} \underset{\text{準中性}}{\simeq} \frac{\rho}{m_i} \quad (6.2.145)$$

$$\mathbf{u}_e = \frac{\rho\mathbf{U} - m_i\mathbf{j}/(Ze)}{\rho - m_i\zeta/(Ze)} \underset{\text{準中性}}{\simeq} \mathbf{U} - \frac{m_i\mathbf{j}}{Ze\rho} \underset{\text{弱電流}}{\simeq} \mathbf{U} \quad (6.2.146)$$

$$\mathbf{u}_i = \frac{\rho\mathbf{U} + m_e\mathbf{j}/e}{\rho + m_e\zeta/e} \underset{\text{準中性}}{\simeq} \mathbf{U} \quad (6.2.147)$$

$$p_e = \frac{n_e}{n_e + n_i} p \underset{\text{準中性}}{\simeq} \frac{Z}{1 + Z} p \quad (6.2.148)$$

$$p_i = \frac{n_i}{n_e + n_i} p \underset{\text{準中性}}{\simeq} \frac{1}{1 + Z} p \quad (6.2.149)$$

各粒子種についての質量保存則 (6.2.106) に m_s を乗じて粒子種 s について和を取ると、次の質量保存則を得る。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{U}) = 0 \quad (6.2.150)$$

一方で、各粒子種についての質量保存則に e_s を乗じて s について和を取ると、次の電荷保存則を得る。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (6.2.151)$$

各粒子種についての運動量保存則 (6.2.120) を足し合わせ、上述した近似を用いて多流体変数を 1 流体変数に置き換えることで、次の運動量保存則を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{U}) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{U}\mathbf{U} + p\mathbf{I} + \boldsymbol{\pi}_e + \boldsymbol{\pi}_i) = \zeta\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (6.2.152)$$

ただし、式 (6.2.119) の関係より \mathbf{R}_s は相殺して消える。粘性テンソルの表式について、いちばん簡単な形式を採用するならば、

$$\boldsymbol{\pi}_e + \boldsymbol{\pi}_i \simeq \boldsymbol{\pi}_i \simeq -\mu\mathbf{W} \quad (6.2.153)$$

$$\text{ただし, } W_{kl} = \frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k} - \frac{3}{2}(\nabla \cdot \mathbf{U})\delta_{kl} \quad (6.2.154)$$

と書ける (詳しくは節 6.4 参照)。 μ は粘性率、 \mathbf{W} はトレースがゼロになるように定義された歪速度テンソルである。各粒子種についてのエネルギー保存則 (6.2.131) を足し合わせ、上述した近似を用いて多流体変数を 1 流体変数に置き換えることで、次の式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\rho U^2 + \frac{3}{2}p \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2}\rho U^2 \mathbf{U} + \frac{5}{2}p\mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\pi}_e + \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\pi}_i + \mathbf{q}_e + \mathbf{q}_i \right) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (6.2.155)$$

ただし、 $\sum_s (\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{R}_s + Q_s)$ は式 (6.2.130) の関係より相殺して消える。 \mathbf{q}_s の表式については、いちばん簡単なものを用いるならば次のように書ける。

$$\mathbf{q}_e + \mathbf{q}_i \simeq \mathbf{q}_e \simeq -\kappa \nabla(k_B T) \quad (6.2.156)$$

κ は熱伝導率である^{†18}。式 (6.2.155) はプラズマの運動エネルギーと熱 (内部) エネルギーの和の保存則である。節 3.4.1 で説明したことと見比べると、本節で考えているプラズマは比熱比が $\gamma = 5/3$ の場合の理想気体であることが分かる。

方程式系を閉じるには更に、オームの法則に相当する方程式が必要である。各粒子種についての運動量保存則に e_s/m_s を乗じて s について和を取ると、次の式を得る。ただし、近似式 (6.2.147) において、準中性の仮定は課すが弱電流の仮定は課さずに計算してみる。また、 π_s の項は小さいとして無視する。

$$\underbrace{-\frac{Zm_e}{m_i} \left(\frac{m_i}{Ze}\right)^2 \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j}\mathbf{U} + \mathbf{U}\mathbf{j}) \right]}_{\text{慣性}} + \frac{m_i}{Ze\rho} \underbrace{[\nabla p_e - \mathbf{j} \times \mathbf{B}]}_{\text{電子圧 ホール効果}} + \mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \quad (6.2.157)$$

\mathbf{R}_e については、いちばん簡単な形式として次のものを用いた。

$$\mathbf{R}_e \simeq en_e \eta \mathbf{j} \quad (6.2.158)$$

η は電気抵抗率 (電気伝導率の逆数) である^{†19}。慣性項の $\nabla \cdot$ 内に現れる $\mathbf{j}\mathbf{j}$ の項は、弱電流の仮定をした時に 2 次以上の微小量になるため、無視した。慣性項、電子圧項、ホール効果の項は弱電流の仮定の下では微小量なので、無視すれば節 2.4 で導入したオームの法則の形式になる^{†20}。部分電離プラズマにおけるオームの法則については節 6.5.2 で説明する。

上述した保存則とオームの法則に加え、マクスウェル方程式によって方程式系は閉じる。更に、節 2.5.1 で説明したスケーリングによって、電場による力と変位電流を無視すると、MHD 方程式系になる。

運動量保存則における時間微分項と $-\nabla \cdot \pi_s \sim \mu \nabla^2 \mathbf{U}$ の項を見比べると、粘性による速度の拡散の時間スケール τ_{vis} は、現象の空間スケールを L として $L^2 \rho / \mu$ のオーダーであることが分かる。 $\rho \sim m_i n_i$ であり、節 6.4 の議論より $\mu \sim n_i k_B T \tau_i$ であることが分かるので、

$$\tau_{\text{vis}} \sim \frac{L^2}{v_i^2 \tau_i} \quad (6.2.159)$$

^{†18} 節 3.3.3 で導入した熱伝導率とは k_B の分だけ次元が違うことに注意して欲しい。この定義の仕方の熱伝導率を用いるのは本章だけである。

^{†19} 本章では磁気拡散率 $1/(\mu_0 \sigma)$ ではなく、電気抵抗率 $1/\sigma$ に η の文字を当てていることに注意して欲しい。両者の違いは単に定義される次元の違いである。

^{†20} ただし、 $\eta \mathbf{j}$ 項 (オーム項) も弱電流の仮定の下で、磁場が強い場合はやはり小さいことが期待される。 $\eta \sim m_e / (e^2 n_e \tau_e)$ (節 6.4 参照) と見積もると、オーム項 (O) とホール項 (H) の比は $H/O = \Omega_e \tau_e$ なので、磁場が強い場合はホール項の方が大きくなる。このように $\Omega_e \tau_e$ はホール効果の大きさの指標になるため、(電子) ホールパラメータと呼ばれることがある。

と見積もられる。 \bar{v}_i はイオンの熱速度、 τ_i は節 6.1.4 で定義したイオンの緩和時間である。一方で、エネルギー保存則における時間微分項と $\mathbf{q}_s \sim \kappa \nabla^2(k_B T)$ の項を見比べると、熱伝導による温度の拡散の時間スケール τ_q は $L^2 n_e / \kappa$ のオーダーであることが分かる。節 6.4 の議論より $\kappa \sim n_e k_B T \tau_e / m_e$ であることが分かるので、

$$\tau_q \sim \frac{L^2}{\bar{v}_e^2 \tau_e} \quad (6.2.160)$$

と見積もられる。 \bar{v}_e は電子の熱速度、 τ_e は節 6.1.4 で定義した電子の緩和時間である。流体方程式は τ_s が現象の時間スケールより十分に短い場合に使われるため、反対に $\tau_{\text{vis}}, \tau_q$ は長くなる。これらの拡散時間より十分に短い時間スケールの現象を考える場合は π_s, \mathbf{q}_s の項は無視できる^{†21}。

6.3 衝突過程

節 6.2.2 で説明した、クーロン力による小角散乱の衝突項を更に単純化することで、各種の衝突過程について考察する。節 6.1.4 で簡単に見積もったように、小角散乱における「衝突頻度」とは、単位時間あたりに何回衝突が起きるかの指標というよりは、近隣の粒子による複雑なクーロンポテンシャルの中を粒子が進んだ結果、粒子の速度に何らかの無視できない変化が現れるまでの時間の逆数と解釈すべきである。衝突項に単純化を施した結果、

$$C_{ss'} = \nu_{ss'} D[f_s] \quad (6.3.1)$$

というように、 f_s に作用する無次元の微分演算子 D と係数 $\nu_{ss'}$ を用いて表せたとする。このとき、この係数 $\nu_{ss'}$ が粒子種 $s - s'$ 間の衝突の結果 f_s に生じる効果についての衝突頻度と解釈できる。その効果の内容は D が表している。一般に衝突頻度は注目する粒子種 s の速度 \mathbf{v} に依存することが期待される。

なお、本節で粒子種 s と s' の間の衝突項 $C_{ss'}$ を考える場合、粒子種 s の集団の静止系で考えることにする。つまり、本節で \mathbf{v} と表している変数は節 6.2.4 において $\tilde{\mathbf{v}}_s = \mathbf{v} - \mathbf{u}_s$ と表していた各点での平均速度 \mathbf{u}_s からのずれを表す。

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}' = (\tilde{\mathbf{v}}_s + \mathbf{u}_s) - (\tilde{\mathbf{v}}'_s + \mathbf{u}_s) = \tilde{\mathbf{v}}_s - \tilde{\mathbf{v}}'_s \quad (6.3.2)$$

であることを考慮すると、 $\mathbf{v} \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}$ の変数変換でフォッカー-プランク (ランダウ) の衝突項 (6.2.71) および (6.2.73) やローゼンブルースポテンシャル (6.2.65), (6.2.66) の形式は変わらないことが分かる。

^{†21} しかし、乱流によるより大きな拡散現象を考慮した拡散項を加えなければならない場合はしばしばある。

6.3.1 電子-イオン間の衝突項

電子がイオンと衝突する過程について考える。イオンは平均速度 \mathbf{u}_i のまわりにおよそ熱速度 $\bar{v}_i = \sqrt{2k_B T_i/m_i}$ の広がりを持って分布しているとする。電子とイオンの温度がそこまで離れた値でないとする、 $\bar{v}_i \ll \bar{v}_e$ が成り立つため、電子から見たイオンの速度空間での分布をデルタ関数

$$f_i(\mathbf{v}) \simeq n_i \delta(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad (6.3.3)$$

に近似して考える。 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e$ は電子集団から見たイオン集団の平均速度である。ローゼンブルースポテンシャル (6.2.65), (6.2.66) に上記のデルタ関数を代入すると、

$$\varphi_i \simeq -\frac{n_i}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{v} - \mathbf{u}|} \simeq -\frac{n_i}{4\pi v} \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{v^2}\right) \quad (6.3.4)$$

$$\psi_i \simeq -\frac{n_i}{8\pi} |\mathbf{v} - \mathbf{u}| \simeq -\frac{n_i v}{4\pi} \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{v^2}\right) \quad (6.3.5)$$

と書ける。ただし 2 番目の近似では、イオンの平均速度は電子の平均速度とさほど変わらない

$$\mathbf{u} \ll \bar{v}_e \quad (6.3.6)$$

として展開した。 C_{ei} において、式 (6.2.71) の第 1 項には m_e/m_i が係っているため、小さいとして無視する。よって、

$$C_{ei} \simeq -L^{ei} \frac{\partial}{\partial v_k} \left(\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial v_k \partial v_l} \frac{\partial f_e}{\partial v_l} \right) \quad (6.3.7)$$

$$\simeq \frac{n_i L^{ei}}{8\pi} \frac{\partial}{\partial v_k} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial v_k \partial v_l} \frac{\partial f_e}{\partial v_l} - \frac{\partial^2}{\partial v_k \partial v_l} \left(\frac{v_m u_m}{v} \right) \frac{\partial f_e}{\partial v_l} \right] \quad (6.3.8)$$

$$= C_{ei}^0 + C_{ei}^1 \quad (6.3.9)$$

と書ける。ただし、電子の分布は 0 次近似的にマクスウェル-ボルツマン分布 f_e^0 であるとして、式 (6.3.5) の展開の 1 次の項から出てくる上式の第 2 項においては f_e を f_e^0 で近似した。

C_{ei}^0 については、

$$\frac{\partial^2 v}{\partial v_k \partial v_l} = \frac{v^2 \delta_{kl} - v_k v_l}{v^3} \quad (6.3.10)$$

という関係を用い、速度空間での極座標 (v, θ, ϕ) を用いて勾配や発散を書き換える^{†22}と、

$$C_{ei}^0 = \frac{n_i L^{ei}}{8\pi} \nabla_v \cdot \left[\frac{1}{v} \nabla_v f_e - \frac{\mathbf{v}}{v^3} (\mathbf{v} \cdot \nabla_v f_e) \right] \quad (6.3.11)$$

$$= \frac{n_i L^{ei}}{8\pi v^3} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f_e}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f_e}{\partial \phi^2} \right] \quad (6.3.12)$$

^{†22} 極座標での微分の表し方については付録 1.B を参考にして欲しい。

と書ける。 C_{ei}^1 についてもひたすらに計算すると、

$$\frac{\partial^2}{\partial v_k \partial v_l} \left(\frac{v_m}{v} \right) \frac{\partial f_e^0}{\partial v_l} = \frac{v^2 \delta_{km} - v_k v_m}{v^3} \frac{m_e}{k_B T_e} f_e^0 = \frac{\partial^2 v}{\partial v_k \partial v_m} \frac{m_e}{k_B T_e} f_e^0 \quad (6.3.13)$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial v_k \partial v_k \partial v_m} = -\frac{2v_m}{v^3} \quad (6.3.14)$$

という関係が分かり、

$$C_{ei}^1 = \frac{n_i L^{ei}}{4\pi} \frac{m_e}{k_B T_e} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{v^3} f_e^0 \quad (6.3.15)$$

と書ける。まとめると、 C_{ei} は次のように書ける。

$$C_{ei}[f_e] = \nu_{ei}(v) \left(\mathcal{L}[f_e] + \frac{m_e \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{k_B T_e} f_e^0 \right) \quad (6.3.16)$$

$$\text{ただし, } \mathcal{L}[f_e] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f_e}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f_e}{\partial \phi^2} \right] \quad (6.3.17)$$

$$\nu_{ei}(v) = \frac{n_i L^{ei}}{4\pi v^3} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\tau_e} \left(\frac{\bar{v}_e}{v} \right)^3 = \frac{n_i e_i^2 e^2 \ln \Lambda}{4\pi m_e^2 \epsilon_0^2 v^3} \quad (6.3.18)$$

\mathcal{L} はローレンツ散乱演算子と呼ばれる。 $\nu_{ei}(v)$ は電子-イオン間衝突頻度であり、 v^{-3} に依存する。 τ_e は式 (6.1.63) で定義した電子の緩和時間である。上式の第 1 項はイオンの質量が無限度で、静止していると考えたときの衝突 (小角散乱) の効果を表す。そのような衝突では電子の速さ (エネルギー) は変化せず、速度の向きのみが変化する。このことに関連して $\mathcal{L}[f_e]$ に v 微分は現れない。 $2\mathcal{L}$ はラプラシアン ∇_v^2 の θ と ϕ に関する部分に一致する。第 1 項は電子の速度分布を v が一定の球面上で拡散させる効果であると解釈できる。つまり、イオンの集団の静止系で見た電子の分布関数を等方的にしようとする効果である。マクスウェル-ボルツマン分布に \mathcal{L} を作用させるとゼロになる。

$$\mathcal{L}[f_s^0] = 0 \quad (6.3.19)$$

式 (6.3.16) の第 2 項は、電子集団とイオン集団の平均速度に差があった場合に、イオン集団に電子集団が引きずられる効果である。式 (6.3.16) はイオンの質量には依存しないことも特筆しておく。

6.3.2 マクスウェル-ボルツマン分布との衝突項

前節では電子-イオン間の衝突を考え、イオンの速度分布をデルタ関数的とみなして衝突項を単純化した。また、衝突項 (6.2.71) の第 1 項は無視した。本節では衝突相手 (粒子種 s') がマクスウェル-ボルツマン分布に従うとして衝突項を第 1 項も含めて考え、任意の粒子種間の衝突に

ついて一般的に言える議論をする。衝突相手の集団は平均的に静止している ($\mathbf{u}_{s'} = 0$) とする。つまり、

$$f_{s'}(\mathbf{v}) = f_{s'}^0(v) = \frac{n_{s'}}{\pi^{3/2} v_{s'}^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_{s'}^2}\right) \quad (6.3.20)$$

である。 $f_{s'}^0$ が等方的なので、ローゼンブルースポテンシャル $\varphi_{s'}, \psi_{s'}$ は速度の大きさ v にのみ依存し、速度の向きには依存しない関数になる。よって、 $\varphi_{s'}, \psi_{s'}$ を v で微分した導関数をそれぞれ $\varphi'_{s'}, \psi'_{s'}$ と書くことにすると、

$$\frac{\partial \varphi_{s'}}{\partial v_k} = \frac{v_k}{v} \varphi'_{s'} \quad (6.3.21)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{s'}}{\partial v_k \partial v_l} = \frac{\partial^2 v}{\partial v_k \partial v_l} \psi'_{s'} + \frac{v_k v_l}{v^2} \psi''_{s'} \quad (6.3.22)$$

と計算できる。これを用いると、式 (6.2.71) より

$$C_{ss'}[f_s, f_{s'}^0] = L^{ss'} \frac{\partial}{\partial v_k} \left[\frac{m_s}{m_{s'}} \frac{v_k}{v} \varphi'_{s'} f_s - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial v_k \partial v_l} \psi'_{s'} + \frac{v_k v_l}{v^2} \psi''_{s'} \right) \frac{\partial f_s}{\partial v_l} \right] \quad (6.3.23)$$

となる。更に、

$$\frac{\partial^2 v}{\partial v_k \partial v_l} v_k = 0 \quad (6.3.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial v_k} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial v_k \partial v_l} \frac{\partial f_s}{\partial v_l} \right) = \frac{2}{v^3} \mathcal{L}[f_s] \quad (6.3.25)$$

$$\nabla_v \cdot [F(v)\mathbf{v}] = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} [v^3 F(v)] \quad (6.3.26)$$

という関係を用いれば、

$$C_{ss'}[f_s, f_{s'}^0] = -\frac{2L^{ss'}}{v^3} \psi'_{s'} \mathcal{L}[f_s] + \frac{L^{ss'}}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^3 \left(\frac{m_s}{m_{s'}} \frac{\varphi'_{s'}}{v} f_s - \frac{\varphi''_{s'}}{v} \frac{\partial f_s}{\partial v} \right) \right] \quad (6.3.27)$$

と書ける。上式の物理的意味をはっきりさせるために、次のように書き換える。

$$C_{ss'}[f_s, f_{s'}^0] = \nu_D^{ss'} \mathcal{L}[f_s] + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^3 \left(\frac{m_s}{m_s + m_{s'}} \nu_S^{ss'} f_s + \frac{1}{2} \nu_{\parallel}^{ss'} v \frac{\partial f_s}{\partial v} \right) \right] \quad (6.3.28)$$

ただし、

$$\nu_S^{ss'} = L^{ss'} \left(1 + \frac{m_s}{m_{s'}} \right) \frac{\varphi'_{s'}}{v} \quad (6.3.29)$$

$$\nu_D^{ss'} = -\frac{2L^{ss'}}{v^3} \psi'_{s'} \quad (6.3.30)$$

$$\nu_{\parallel}^{ss'} = -2L^{ss'} \frac{\psi''_{s'}}{v^2} \quad (6.3.31)$$

と書いた。節 6.2.2 の議論を思い出すと、衝突項の係数は衝突によって変化する速度の期待値や分散を表すのだった。

$$\frac{\langle \delta v_k \rangle}{\delta t} = -L^{ss'} \left(1 + \frac{m_s}{m_{s'}} \right) \frac{\partial \varphi_{s'}}{\partial v_k} \quad (6.3.32)$$

$$\frac{\langle \delta v_k \delta v_l \rangle}{2\delta t} = -L^{ss'} \frac{\partial^2 \psi_{s'}}{\partial v_k \partial v_l} \quad (6.3.33)$$

$$= -L^{ss'} \left(\frac{\delta_{kl}}{v} - \frac{v_k v_l}{v^3} \right) \psi'_{s'} - L^{ss'} \frac{v_k v_l}{v^2} \psi''_{s'} \quad (6.3.34)$$

速度ベクトル \boldsymbol{v} と同じ向きの速度変化を δv_{\parallel} 、直交する向きの速度変化を δv_{\perp} と書くことにすると、上式より

$$\nu_S^{ss'} = \frac{\langle -\delta v_{\parallel}/v \rangle}{\delta t}, \quad \nu_D^{ss'} = \frac{\langle (\delta v_{\perp}/v)^2 \rangle}{\delta t}, \quad \nu_{\parallel}^{ss'} = \frac{\langle (\delta v_{\parallel}/v)^2 \rangle}{\delta t} \quad (6.3.35)$$

という関係が分かる。つまり、 $\nu_S^{ss'}$ は衝突によって粒子種 s の速さが遅くなる割合を表している、減速頻度 (slowing-down frequency) と呼ばれる。 $\nu_D^{ss'}$ は \mathcal{L} 項に係っていることから分かるように、速度の向きが等方分布に向かって拡散していく速さを表す。 $\nu_{\parallel}^{ss'}$ は速度の大きさが拡散していく速さを表す。

マクスウェル-ボルツマン分布 f_s^0 に対するローゼンブルースポテンシャル $\varphi_{s'}, \psi_{s'}$ を求めることで、 $\nu_D^{ss'}, \nu_S^{ss'}, \nu_{\parallel}^{ss'}$ の形を具体的に決定する。 $\varphi_{s'}$ の定義 (6.2.65) の形を見ると、 $\varphi_{s'}$ は次のポアソン方程式によって決定されることが分かる。

$$\nabla_v^2 \varphi_{s'} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^2 \frac{\partial \varphi_{s'}}{\partial v} \right) = f_{s'}^0(v) \quad (6.3.36)$$

上式を解くと、次のような解を得る。

$$\varphi'_{s'}(v) = \frac{m_{s'} n_{s'}}{4\pi k_B T_{s'}} G(w_{s'}) \quad (6.3.37)$$

$$\text{ただし, } w_{s'} = \frac{v}{\bar{v}_{s'}} \quad (6.3.38)$$

$$G(x) = \frac{\text{erf}(x) - x \text{erf}'(x)}{2x^2} \quad (6.3.39)$$

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2) dy \quad (6.3.40)$$

$\text{erf}(x)$ は誤差関数 (error function) である。 $G(x)$ はチャンドラセカール関数と呼ばれる。 $G(x)$ は $x \rightarrow 0$ と $x \rightarrow \infty$ ではそれぞれ次のような関数に漸近する。

$$G(x) \rightarrow \frac{2x}{3\sqrt{\pi}} \quad (x \rightarrow 0) \quad (6.3.41)$$

$$G(x) \rightarrow \frac{1}{2x^2} \quad (x \rightarrow \infty) \quad (6.3.42)$$

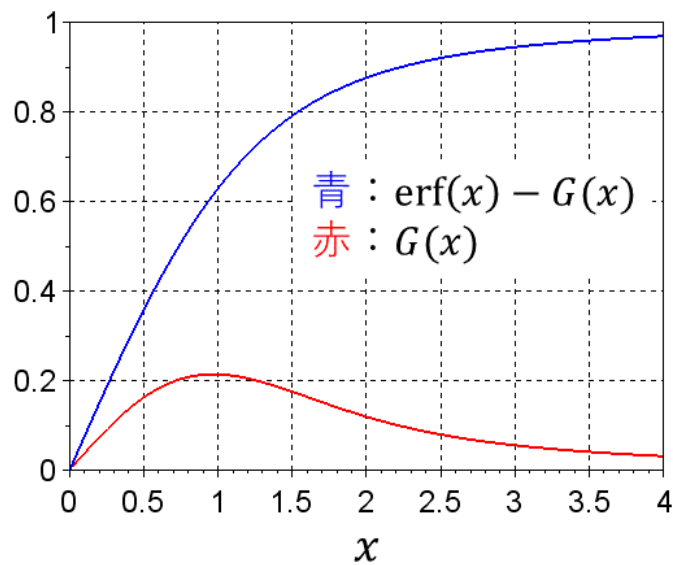


図 6.5 チャンドラセカル関数 $G(x)$ と誤差関数 $\text{erf}(x)$: $G(1) = 0.21, \text{erf}(1) = 0.84$

図 6.5 に $G(x)$ とすぐ後に出てくる $\text{erf}(x) - G(x)$ の値を示した。 $\psi_{s'}$ は $\varphi_{s'}$ との間に

$$\frac{1}{v^2} \frac{d}{dv} \left(v^2 \frac{d\psi_{s'}}{dv} \right) = \varphi_{s'} \tag{6.3.43}$$

という関係があることを用いれば

$$\psi'_{s'} = -\frac{n_{s'}}{8\pi} [\text{erf}(w_{s'}) - G(w_{s'})] \tag{6.3.44}$$

と求まる。結局、各衝突頻度は次のように書ける。

$$\nu_D^{ss'} = \hat{\nu}_{ss'} \frac{\text{erf}(w_{s'}) - G(w_{s'})}{w_s^3} \tag{6.3.45}$$

$$\nu_S^{ss'} = \hat{\nu}_{ss'} \frac{2T_s}{T_{s'}} \left(1 + \frac{m_{s'}}{m_s} \right) \frac{G(w_{s'})}{w_s} \tag{6.3.46}$$

$$\nu_{\parallel}^{ss'} = 2\hat{\nu}_{ss'} \frac{G(w_{s'})}{w_s^3} \tag{6.3.47}$$

$$\text{ただし, } \hat{\nu}_{ss'} = \frac{n_{s'} e_s^2 e_{s'}^2 \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_s^2 \bar{v}_s^3} \tag{6.3.48}$$

$w_s = v/\bar{v}_s$ である。例えば電子と H^+ イオンの衝突 ($s = e, s' = i$) で $w_e = 1$ 程度の速さの電

子を考えた場合、 $w_i \simeq 43$ になるため、上式より

$$\nu_D^{ei} \simeq \nu_S^{ei} \simeq \hat{\nu}_{ei} \quad (6.3.49)$$

$$\nu_{\parallel}^{ei} \simeq 5 \times 10^{-4} \cdot \hat{\nu}_{ei} \simeq \frac{m_e}{m_i} \hat{\nu}_{ei} \quad (6.3.50)$$

と計算できる。ただし、 $T_e = T_i$ とした。 ν_{\parallel}^{ei} が小さいことは、電子とイオンの質量 (熱速度) の違いが大きいため、衝突でのエネルギー交換の効率が悪いことを反映している。式 (6.3.28) を見ると、 ν_S^{ei} の項には m_e/m_i が係っているため、この速度領域の電子に対しては第 1 項 (\mathcal{L} の項) の効果が大きいことが分かる。これは前節の単純化と整合的である。e-i 間と i-i 間の衝突の場合、 $\hat{\nu}_{ss'}$ は節 6.1.4 で定義した各粒子種の緩和時間の逆数に相当する。

$$\hat{\nu}_{ei} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\tau_e}, \quad \hat{\nu}_{ii} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\tau_i} \quad (6.3.51)$$

6.3.3 イオン-電子間の衝突項

電子との衝突によってイオンの分布関数はどのような影響を受けるのかを考える。まず、電子の分布関数 f_e を平均速度がゼロのマクスウェル-ボルツマン分布 f_e^{0+23} とそこからのずれ f_e^1 に分けて考える。

$$f_e = f_e^0 + f_e^1 \quad (6.3.52)$$

衝突項も 2 つの部分に分かれる。

$$C_{ie}[f_i, f_e] = C_{ie}[f_i, f_e^0] + C_{ei}[f_i, f_e^1] \quad (6.3.53)$$

まず、上式の第 1 項を求める。前節で定義した変数 w_s について、典型的には $w_e \ll w_i$ であることを考慮し、式 (6.3.37) の $G(w_{s'})$ において $w_{s'} \rightarrow 0$ の状況を考えることで、

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial v_k} = \frac{\partial v}{\partial v_k} \psi'_e = \frac{n_e}{3} \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{3/2} v_k \quad (6.3.54)$$

が分かる。また、 ψ_e と φ_e の関係

$$\nabla_v^2 \psi_e = \varphi_e = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f_e^0(v')}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} d^3 v' \quad (6.3.55)$$

の右辺について、 f_i の分布幅は f_e の幅に比べて無視できるほど小さいことから、衝突項において注目される速度帯の \mathbf{v} は、上式の積分で大きな寄与を果たす速度帯の \mathbf{v}' に対して無視できるため、 $|\mathbf{v} - \mathbf{v}'| \simeq v'$ と近似して計算する。つまり、

$$\frac{\partial^2 \psi_e}{\partial v_k^2} \simeq -n_e \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{3/2} \int v' \exp\left(-\frac{v'^2}{v_e^2}\right) dv' = -\frac{n_e}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m_e}{k_B T_e}} \quad (6.3.56)$$

^{†23} 今はイオン集団の平均速度 \mathbf{u}_i からのずれを \mathbf{v} と書いているので、平均速度が \mathbf{u}_i のマクスウェル-ボルツマン分布という意味である。

である。上式をテンソル $\partial^2 \psi_e / \partial v_k \partial v_l$ のトレースと見ると、

$$\frac{\partial^2 \psi_e}{\partial v_k \partial v_l} \simeq -\frac{n_e}{3(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m_e}{k_B T_e}} \delta_{kl} \quad (6.3.57)$$

が分かる。よって、式 (6.3.53) の第 1 項は

$$C_{ie}[f_i, f_e^0] = \frac{m_e n_e}{m_i n_i \tau_e} \nabla_v \cdot \left(\mathbf{v} f_i + \frac{k_B T_e}{m_i} \nabla_v f_i \right) \quad (6.3.58)$$

と書ける。 τ_e は式 (6.1.63) で定義した電子の緩和時間である。

式 (6.3.53) の第 2 項を考える。衝突項 (6.2.71) の中で、 m_i/m_e が係っていて寄与が大きいと思われる項のみを取り出すと、

$$C_{ie}[f_i, f_e^1] \simeq L^{ie} \frac{\partial}{\partial v_k} \left(\frac{m_i}{m_e} \frac{\partial \varphi_e[f_e^1]}{\partial v_k} \right) \quad (6.3.59)$$

である。上式は衝突での速度変化 δv_k について、

$$L^{ie} \frac{m_i}{m_e} \frac{\partial \varphi_e}{\partial v_k} \simeq -\frac{\langle \delta v_k \rangle}{\delta t} = -\frac{F_k}{m_i} \quad (6.3.60)$$

という物理的意味を持つ。つまり、右辺の \mathbf{F} は、電子とイオンの平均速度のずれが存在する場合に、イオンが衝突によって電子から受ける力の期待値と解釈できる。 f_e^1 の典型的な速度帯に比べて f_i の速度帯は小さいため、どの速度のイオンも電子から同様の力を受けるとみなせる。よって、

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{R}_i}{n_i} = -\frac{\mathbf{R}_e}{n_i} \quad (6.3.61)$$

と解釈できる。 \mathbf{R}_s は式 (6.2.118) で定義した摩擦力である。

以上より、イオン-電子間の衝突項は

$$C_{ie}[f_i] = \frac{\mathbf{R}_e}{m_i n_i} \cdot \nabla_v f_i + \frac{m_e n_e}{m_i n_i \tau_e} \nabla_v \cdot \left(\mathbf{v} f_i + \frac{k_B T_e}{m_i} \nabla_v f_i \right) \quad (6.3.62)$$

と書ける。上式の第 1 項は電子とイオンの平均速度にずれがあったときにはたらく摩擦力による速度空間での移流を表す。第 2 項は、 f_i が電子と同じ温度 T_e のマクスウェル-ボルツマン分布である場合はゼロになることから分かるように、イオン集団と電子集団がエネルギー交換によって等しい温度になろうとする効果を表す。この項の衝突頻度は n_e と n_i が同じオーダーと考えれば $1/\tau_{eq} = m_e/(m_i \tau_e)$ 程度と考えられる。

6.3.4 衝突項の線形化

異種粒子間の衝突では電子とイオンの質量が大きく異なることを用いて衝突項を単純化することができた。同種粒子間の衝突では上述したような単純化は行えない。単純化されていない

衝突項 (6.2.71) および (6.2.73) は双線形 (bilinear) とよばれる性質を持つ。つまり、

$$C_{ss'}[f_s^0 + f_s^1, f_{s'}] = C_{ss'}[f_s^0, f_{s'}] + C_{ss'}[f_s^1, f_{s'}] \quad (6.3.63)$$

$$C_{ss'}[f_s, f_{s'}^0 + f_{s'}^1] = C_{ss'}[f_s, f_{s'}^0] + C_{ss'}[f_s, f_{s'}^1] \quad (6.3.64)$$

$$C_{ss'}[c_s f_s, c_{s'} f_{s'}] = c_s c_{s'} C_{ss'}[f_s, f_{s'}] \quad (6.3.65)$$

である。よって、同種粒子間の衝突項は非線形である。しかし、 f_s はマクスウェル-ボルツマン分布 f_s^0 とそこからの微小なずれ f_s^1 で表される

$$f_s = f_s^0 + f_s^1, \quad |f_s^1| \ll f_s^0 \quad (6.3.66)$$

と仮定すると、次のように線形化することができる。

$$C_{ss}[f_s] = \underbrace{C_{ss}[f_s^0, f_s^0]}_{=0} + C_{ss}[f_s^1, f_s^0] + C_{ss}[f_s^0, f_s^1] + \underbrace{C_{ss}[f_s^1, f_s^1]}_{\text{無視}} \quad (6.3.67)$$

$$\simeq C_{ss}[f_s^1, f_s^0] + C_{ss}[f_s^0, f_s^1] \quad (6.3.68)$$

2 次の項は無視した。第 1 項はマクスウェル-ボルツマン分布に対する衝突項であり、節 6.3.2 で行った考察が使える。ローゼンブルースポテンシャルを用いる場合、第 2 項は f_s^1 に対する φ_s のポアソン方程式を解く必要がある。ランダウの形式を用いる場合、

$$f_s^1 = f_s^0 \chi \quad (6.3.69)$$

と書くことで、線形化された衝突項は

$$C_{ss}^l[f_s] = -\frac{L^{ss}}{8\pi} \frac{\partial}{\partial v_k} \int U_{kl} f_s^0(v) f_s^0(v') \left(\frac{\partial \chi(v')}{\partial v'_l} - \frac{\partial \chi(v)}{\partial v_l} \right) d^3 v' \quad (6.3.70)$$

と書ける。異種粒子間の衝突項に対しても、分布関数をマクスウェル-ボルツマン分布とそこからのずれに分けて、

$$C_{ss'}[f_s, f_{s'}] \simeq C_{ss'}[f_s^1, f_{s'}^0] + C_{ss'}[f_s^0, f_{s'}^1] \quad (6.3.71)$$

と近似する操作を線形化と呼ぶ。

6.4 古典輸送理論

各粒子種の分布関数がマクスウェル-ボルツマン分布とそこからの微小なずれで表されるといふ仮定の下で運動論的方程式を解くことで、節 6.2.4 で定義した輸送過程を表す項 $\pi_s, \mathbf{R}_s, \mathbf{q}_s, Q_s$ と巨視的な量の間関係が求まる。この問題は今まで様々な方法で解かれてきた。その中でよく目にすると思われる Spitzer & Härm (1953) と Braginskii (1965) の方法について、それぞれどのような問題設定が行われているのかの概要と計算結果を示す。

これらの研究は古典輸送理論 (classical transport theory) と呼ばれる。「古典」という言葉は、後に考えられるようになった新古典輸送 (neoclassical transport) や異常輸送 (anomalous transport)、乱流輸送 (turbulent transport) と対比するために用いられる。新古典輸送理論は核融合炉にプラズマを閉じ込めるための研究の文脈において、トーラス型 (ドーナツ型) の系で観測される、古典輸送理論では説明できないほど大きな輸送現象を理解するために発展した。トーラス型磁場における磁気ミラーや粒子のシェル運動 (節 6.1.5 参照) 起因の輸送が考慮されている。異常輸送とは、新古典輸送理論でも説明できない大きさの輸送現象を理解するために、プラズマの中で起こる様々な揺らぎの効果を考慮に入れたものであり、乱流輸送とも呼ばれる。新古典輸送については例えば横山雅之 (2000), Balescu (1988) を、異常輸送については例えば岸本泰明 (2000), Horton (2017) を参考にして欲しい。また、宇宙物理、特にダイナモ理論への応用も念頭に置いた乱流理論についての文献には Yoshizawa et al. (2002), Krause & Rädler (1980) がある^{†24}。

6.4.1 ブラギンスキーの輸送係数

Braginskii (1965) は強い磁場が存在する完全電離プラズマを想定して運動論的方程式を解くことで異方性のある輸送係数を見積もった。それらの輸送係数を用いて方程式系を閉じた電子-イオン 2 流体モデルはブラギンスキー方程式と呼ばれることがある。

ブラギンスキーの輸送係数は $x = \Omega_s \tau_s$ の関数として表される。 $\Omega_s = |e_s|B/m_s$ は電子またはイオンのジャイロ周波数、 τ_s は節 6.1.4 で定義した緩和時間である。ブラギンスキーの計算結果はこの x がそれ程大きくない場合、つまり磁場がそれ程強くない場合に精度の悪い振る舞いをするという指摘が Epperlein & Haines (1986) によってなされた。Epperlein & Haines (1986) の提唱した輸送係数の表式は後に Ji & Held (2013) によって更に補正された。任意の x や Z (イオンの電荷量) に対して適用できる正確な値は Ji & Held (2013) にまとめられている。このようにブラギンスキーの計算結果は注意して扱う必要があるが、これは後述する基本方程式の解き方が各研究で異なるためであり、ブラギンスキーの問題設定の仕方は他の研究でもおよそ共通するものである。本節ではどのような基本方程式を解くことで輸送係数が得られるのかについて説明した後、 $x \rightarrow \infty$ の極限、つまり磁場が十分に強い場合のブラギンスキーの計算結果を示しながら各係数の定性的な解釈について説明する。Ji & Held (2013) の計算結果も $x \rightarrow \infty$ では本節で示す結果と一致した振る舞いをする。

^{†24} 本章で説明する輸送理論は、微視的な現象を巨視的な流体方程式に反映させる手法の手法の本質として重要である。しかし、現実の系ではしばしば、乱流 (対象とする系の時空間スケールより小さいスケールの乱雑な流れ) によってずっと大きな輸送現象が起きる。この乱流輸送をどう理解するかという問題は難しい (節 4.7 参照)。

問題設定

強い磁場の下での異方化した輸送係数を調べるため、次のような仮定を課す。対象とする系における流体的現象の典型的な時間スケールを τ_H としたとき、

$$\tau_H \gg \tau_i \gg \tau_e \quad (6.4.1)$$

とする。つまり、時間変化が緩和時間より遅い現象を対象にするため、各粒子種は殆どマクスウェル-ボルツマン分布に従う。そこからのずれ (1 次の微小量) が輸送現象の主役である。更に、強い磁場の存在を仮定する。

$$\Omega_s \tau_s \gg 1 \quad (6.4.2)$$

つまり、衝突頻度よりジャイロ周波数の方がずっと大きく、平均自由行程 $\ell_s = \bar{v}_s \tau_s$ よりジャイロ半径 r_{gs} の方がずっと小さい。流体现象の空間変化のスケールについては次の仮定をする。

$$\ell_s \ll L_{\parallel}, \quad r_{gi} \ll L_{\perp} \quad (6.4.3)$$

L_{\parallel} は磁場に平行な方向、 L_{\perp} は垂直な方向の空間スケールである。磁場に垂直な方向には ℓ_s よりずっと大きい必要はなく、 r_{gi} よりずっと大きければ十分である。

上述の仮定の下で運動論的方程式 (6.2.14) の各項の寄与の大きさを見積もる。

$$C_e[f_e] + \Omega_e(\mathbf{v} \times \mathbf{b}) \cdot \nabla_v f_e = \mathbf{v} \cdot \nabla f_e - \frac{e\mathbf{E}}{m_e} \cdot \nabla_v f_e + \frac{\partial f_e}{\partial t} \quad (6.4.4)$$

上式は電子についての運動論的方程式を、項の順番を入れ替えて書いただけである。ただし、 e は素電荷、 $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ は磁場の向きの単位ベクトルである。上式の左辺第 1 項は ν_{ei} 、第 2 項は Ω_e のオーダーである。一方で右辺第 1 項は磁場に平行な方向の勾配を考えるなら \bar{v}_e/L_{\parallel} のオーダーである。静電ポテンシャル ϕ が熱エネルギー $k_B T_e$ と同じくらいであるとして、 $E_{\parallel} = -\nabla\phi$ より $E_{\parallel} \sim k_B T_e / (eL_{\parallel})$ と見積もると、第 2 項も第 1 項と同じオーダーであることが分かる。よって、左辺第 1 項と右辺第 1,2 項の比は

$$\frac{|v_{\parallel} \nabla_{\parallel} f_e|}{|C_e|} \sim \frac{\ell_e}{L_{\parallel}} \ll 1 \quad (6.4.5)$$

であることが分かる。右辺の勾配を磁場に垂直な方向にとったとしても、左辺第 2 項との比が

$$\frac{|v_{\perp} \nabla_{\perp} f_e|}{|\Omega_e(\mathbf{v} \times \mathbf{b}) \cdot \nabla_v f_e|} \sim \frac{r_{ge}}{L_{\perp}} \ll 1 \quad (6.4.6)$$

と見積もられる。右辺の時間微分項が緩和の過程で生じたとしても小さいことが期待される。つまり、式 (6.4.4) の左辺の項 (衝突項と磁場の項) が支配的である。

運動論的方程式 (6.2.14) では分布関数 f_s の変数を $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ にとっていたが、このうちの速度変数を平均速度からのずれ

$$\tilde{\mathbf{v}}_s(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v} - \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) \quad (6.4.7)$$

に変換する。ここで、 \mathbf{u}_s は (\mathbf{x}, t) に依るため、 \tilde{v}_s も (\mathbf{x}, t) に依る変数であることに注意して欲しい。つまり、各微分を連鎖律を用いて

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial u_{sk}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{v}_{sk}} \quad (6.4.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial u_{sk}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \tilde{v}_{sk}} \quad (6.4.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial v_i} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial \tilde{v}_i} \quad (6.4.10)$$

と変換する。すると、運動論的方程式は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} & C_{ee}^l[f_e] + C_{ei}^0[f_e] + \frac{e}{m_e} \varepsilon_{klm} \tilde{v}_{el} B_m \frac{\partial f_e}{\partial \tilde{v}_{ek}} \\ &= \frac{Df_e}{Dt} + \tilde{v}_{ek} \frac{\partial f_e}{\partial x_k} - \left(\frac{e}{m_e} E'_k + \frac{Du_{ek}}{Dt} \right) \frac{\partial f_e}{\partial \tilde{v}_{ek}} - \tilde{v}_{ek} \frac{\partial u_{el}}{\partial x_k} \frac{\partial f_e}{\partial \tilde{v}_{el}} - \nu_{ei}(\tilde{v}_e) \frac{m_e \tilde{v}_{ek} u_k}{k_B T_e} f_e^0 \end{aligned} \quad (6.4.11)$$

C_{ei}^1 については節 6.3.1 で説明したものをを用いる。 $u \ll \bar{v}_e$ と仮定し、第 2 項 (C_{ei}^1) の大きさは第 1 項 (C_{ei}^0) に比べて小さいとして右辺の最後に移項した。 $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u}_e \cdot \nabla$ はラグランジュ微分である。 $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}$ は電子集団と共に速度 \mathbf{u}_e で動く観測系 (共動系) で見た電場である。以後 \tilde{v}_e を \mathbf{v} と書くことにする。分布関数をマクスウェル-ボルツマン分布 f_e^0 とそこからの微小なずれ f_e^1 に分ける。

$$f_e = f_e^0 + f_e^1, \quad |f_e^1| \ll f_e^0 \quad (6.4.12)$$

f_e^0 は f_e の数密度、平均速度、平均エネルギーに対応した数密度、平均速度、温度を持つマクスウェル-ボルツマン分布であることに留意して欲しい。

$$\int f_e^0 d^3v = \int f_e d^3v \quad (6.4.13)$$

$$\int \mathbf{v} f_e^0 d^3v = \int \mathbf{v} f_e d^3v = 0 \quad (6.4.14)$$

$$\int v^2 f_e^0 d^3v = \int v^2 f_e d^3v \quad (6.4.15)$$

つまり、 f_e^1 に対しては次の条件が課される。

$$\int f_e^1 d^3v = 0 \quad (6.4.16)$$

$$\int \mathbf{v} f_e^1 d^3v = 0 \quad (6.4.17)$$

$$\int v^2 f_e^1 d^3v = 0 \quad (6.4.18)$$

式 (6.4.12) を式 (6.4.11) に代入して 1 次の微小量まで取り出す。式 (6.4.11) の左辺は f_e^0 に対してはゼロになるため、 f_e^1 に関わる項だけが残る。右辺については f_e^0 に関わる項だけを取

り出す。すると、次の式を得る。

$$\begin{aligned}
& C_{ee}^l[f_e^1] + C_{ei}^0[f_e^1] + \frac{e}{m_e} \varepsilon_{klm} v_l B_m \frac{\partial f_e^1}{\partial v_k} \\
&= \left[\frac{D \ln n_e}{Dt} + v_k \frac{\partial \ln n_e}{\partial x_k} + \left(\frac{m_e v^2}{2k_B T_e} - \frac{3}{2} \right) \left(\frac{D \ln T_e}{Dt} + v_k \frac{\partial \ln T_e}{\partial x_k} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{m_e v_k}{k_B T_e} \left(\frac{e}{m_e} E'_k + \frac{D u_{ek}}{Dt} \right) + \frac{m_e v_k v_l}{k_B T_e} \frac{\partial u_{el}}{\partial x_k} - \nu_{ei}(v) \frac{m_e v_k u_k}{k_B T_e} \right] f_e^0 \quad (6.4.19)
\end{aligned}$$

この式に $1, \mathbf{v}, v^2$ を乗じて d^3v で積分すると節 6.2.4 で導出した保存則が得られる。ただし、右辺は f_e^0 に関わる項だけを取り出したものであるので、 $\boldsymbol{\pi}_e, \mathbf{q}_e$ は現れず、今考えている C_{ei} では電子-イオン間のエネルギー交換は無視しているため、 Q_e も出てこない。それらの保存則を用いて上式右辺の時間微分項を消去すると、次の式が得られる。

$$\begin{aligned}
& C_{ee}^l[f_e^1] + C_{ei}^0[f_e^1] + \frac{e}{m_e} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f_e^1 \\
&= \left[\left(\frac{m_e v^2}{2k_B T_e} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \nabla \ln T_e + \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\mathbf{R}_e[f_e^1]}{n_e k_B T_e} - \frac{m_e \nu_{ei}(v) \mathbf{u}}{k_B T_e} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{m_e}{2k_B T_e} \left(\mathbf{v} \mathbf{v} - \frac{v^2}{3} \mathbf{I} \right) : \mathbf{W}^e \right] f_e^0 \quad (6.4.20)
\end{aligned}$$

$$\text{ただし, } \mathbf{R}_e[f_e^1] = \int m_e \mathbf{v} C_{ei}[f_e^1] d^3v \quad (6.4.21)$$

$$W_{kl}^s = \frac{\partial u_{sk}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_{sl}}{\partial x_k} - \frac{3}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u}_s) \delta_{kl} \quad (6.4.22)$$

\mathbf{W}^e はトレースがゼロになるように定義された歪速度テンソルである。上式がブラギンスキーの問題設定で解かれる基本方程式である。 f_e^1 についての微分積分方程式であり、パラメータとして $\mathbf{B}, T_e, \nabla \ln T_e, \mathbf{u}, \mathbf{W}^e$ を含む。各パラメータ値の下で上式を解くことを繰り返せばパラメータと f_e^1 の関係が求まる。求まった f_e^1 から $\mathbf{R}_e, \mathbf{q}_e, \boldsymbol{\pi}_e, Q_e$ を定義に従って計算すれば、各輸送係数が求まることになる。イオンについての式も同様にして導出される。

$$\begin{aligned}
& C_{ii}[f_i^1] - \frac{Ze}{m_i} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f_i^1 \\
&= \left[\left(\frac{m_i v^2}{2k_B T_i} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \nabla \ln T_i + \frac{m_i}{2k_B T_i} \left(\mathbf{v} \mathbf{v} - \frac{v^2}{3} \mathbf{I} \right) : \mathbf{W}^i \right] f_i^0 \quad (6.4.23)
\end{aligned}$$

イオンの場合は C_{ie} のオーダーは小さいとして丸ごと右辺に持ってかれるため、 \mathbf{R}_i の項は現れない。

詳細は Braginskii (1958) で説明されているが、ブラギンスキーは f_s^1 の解の形を

$$f^1 = f^0(\chi_u + \chi_T + \chi_W) \quad (6.4.24)$$

$$\chi_u = \mathbf{v} \cdot \left[A_u^{\parallel} \mathbf{u}_{\parallel} + A_u^{\perp} \mathbf{u}_{\perp} + A_u^{\wedge} (\mathbf{b} \times \mathbf{u}) \right] \quad (6.4.25)$$

$$\chi_T = \mathbf{v} \cdot \left[A_T^{\parallel} \nabla_{\parallel} \ln T + A_T^{\perp} \nabla_{\perp} \ln T + A_T^{\wedge} (\mathbf{b} \times \nabla \ln T) \right] \quad (6.4.26)$$

$$\chi_W = \left(\mathbf{v}\mathbf{v} - \frac{v^2}{3} \mathbf{I} \right) : \Phi \quad (6.4.27)$$

と仮定し^{†25}、更に、各係数 A を

$$A_u^{\perp}(v) = \frac{m_e}{k_B T_e} \sum_j a_j^{u\perp} L_j^{(3/2)}(w_e^2) \quad (6.4.28)$$

$$\text{ただし, } w_e^2 = \frac{m_e v^2}{2k_B T_e} \quad (6.4.29)$$

というようにラゲールの陪多項式 $L_n^k(x)$ で展開した^{†26}。すると、式 (6.4.20) は展開係数 a_j についての代数的な連立方程式に帰着する。それを解いて上式に戻すことで解 f^1 ないしは $\mathbf{R}_e, \mathbf{q}_s, \mathbf{Q}_i, \pi_s$ などを $\mathbf{u}, \nabla T_s, \mathbf{W}$ の関数として求めることができる。

計算結果と定性的解釈

イオンの電荷量が $Z = 1$ であり、強い磁場の極限 $\Omega_s \tau_s \rightarrow \infty$ における輸送係数の値を示す。Helander & Sigmar (2002) によると、平均速度が $\mathbf{u}_s \sim \bar{v}_i$ のオーダーであると仮定した計算結果と $\mathbf{u}_s \sim r_{gs} \bar{v}_i / L_{\perp}$ であると仮定した計算結果では、特に粘性率の結果に違いが現れるようだが、ブラギンスキーの計算結果は前者の仮定の下で解かれている。

以後登場する τ_e は節 6.1.4 で定義したものと同一

$$\tau_e = 6\sqrt{2}\pi^{3/2} \frac{\sqrt{m_e} (k_B T_e)^{3/2} \epsilon_0^2}{n_i Z^2 e^4 \ln \Lambda} \quad (6.4.31)$$

という値だが、イオンの緩和時間については、Braginskii (1965) に倣って

$$\tau_i' = \sqrt{2}\tau_i = 12\pi^{3/2} \frac{\sqrt{m_i} (k_B T_i)^{3/2} \epsilon_0^2}{n_i Z^4 e^4 \ln \Lambda} \quad (6.4.32)$$

^{†25} テンソル Φ については、 \mathbf{W} を磁場の向きを基準にしていくつかの成分に分解し、各成分の重ね合わせとして表している。詳細は省く。

^{†26} ラゲールの陪多項式について詳しくは付録 1.C.4 参照。この関数は

$$\int_0^{\infty} L_n^k(x) L_m^k(x) x^k \exp(-x) dx = \frac{\Gamma(n+k+1)}{n!} \delta_{nm} \quad (6.4.30)$$

という、マクスウェル-ボルツマン分布と相性の良い直交関係を持つため、輸送係数を求める際に用いられることがある。 $\Gamma(x)$ はガンマ関数と呼ばれる。例えば $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}, \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$ である。

という値を用いる。イオンと電子の平均速度差 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e$ の代わりに準中性の仮定 $n_e = Zn_i$ の下での電流密度

$$\mathbf{j} = en_e \mathbf{u} = en_e (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \quad (6.4.33)$$

を用いる。

まず電子集団にはたらく摩擦力 \mathbf{R}_e と熱流束 \mathbf{q}_e について述べる。節 6.3.1 で説明したように、電子-イオン間の衝突では電子の速度は変化しないとみなすことができ、速度の向きがイオン集団から見て等方的分布になるようにランダム化されていく。よって、イオン集団から見た相対的な平均速度 $-\mathbf{u}$ を電子集団が持っていた場合、巨視的には電子集団が \mathbf{u} の向きに力を受けるように見える。つまり、 \mathbf{R}_e は電流密度 \mathbf{j} に比例した成分を持つ。この比例係数が電気抵抗率 (電気伝導率の逆数) に相当する。

次に、イオンと電子の平均速度が等しい場合を想像する。ある瞬間に右方向の速度を持つ電子数と左方向の速度を持つ電子数は等しいため、右向きの電子集団が電子-イオン間衝突によって受ける左向きの摩擦力 \mathbf{R}_- と左向きの電子集団が受ける右向きの摩擦力 \mathbf{R}_+ はつり合い、電子集団全体として受ける摩擦力はゼロになっている。ここで、温度勾配があり、右側の方が高温である場合を考える。左向きの電子は右向きの電子より平均的に大きな速度を持つ。衝突頻度は電子の速度に対して $\nu_{ei} \propto v^{-3}$ という依存性を持つため、衝突の効果の表れである摩擦力は $\mathbf{R}_- > \mathbf{R}_+$ となり、電子集団全体としてはイオン集団から左方向に摩擦力を受けることになる。つまり、 \mathbf{R}_e は $-\nabla T_e$ に比例する成分も持つ。

温度勾配があると熱流束 \mathbf{q}_e が発生することは節 6.1.6 で説明した。速度差 \mathbf{u} が存在する場合、上述したように速い電子には摩擦力がはたらきにくく、遅い電子にははたらきやすいため、電子集団の静止系 $\mathbf{u}_e = 0$ で見た分布関数はマクスウェル-ボルツマン分布ではなく、早い電子は平均的に $-\mathbf{u}$ の向きの速度を持ち、遅い電子は \mathbf{u} の向きの速度を持つような形に歪んでいる。このため、正味として $-\mathbf{u}$ の向きに熱流束が生まれる。つまり、 \mathbf{q}_e は $-\mathbf{j}$ に比例する成分も持つ。

ブラギンスキーの計算結果は次の形式で表される。

$$\mathbf{R}_e = en_e \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{j} - \beta \cdot \nabla (k_B T_e) \quad (6.4.34)$$

$$\mathbf{q}_e = -\frac{k_B T_e}{en_e} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{j} - \boldsymbol{\kappa}_e \cdot \nabla (k_B T_e) \quad (6.4.35)$$

テンソル $\boldsymbol{\eta}$ は電気抵抗率、 $\boldsymbol{\kappa}_e$ は熱伝導率である。 \mathbf{R}_e と $-\nabla T_e$ を結ぶ係数と \mathbf{q}_e と $-\mathbf{j}$ を結ぶ係数に同じテンソル $\boldsymbol{\beta}$ が現れていることはオンサーガー対称性と呼ばれる^{†27}。磁場方向周り

^{†27} オンサーガー対称性が現れることは具体的に係数を計算せずとも示すことができる。詳しくは例えば Helander & Sigmar (2002) を読んで欲しい。あるいは、統計力学の一般論として、Landau & Lifshitz (1980); 沙川貴

の回転について対称な系を考えているため、各輸送係数テンソルの独立な成分は 3 つであることが言える。仮に磁場の方向を z 軸 (第 3 軸) 方向として成分表示すると、例えば η の場合、次のように書ける。

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_{\perp} & -\eta_{\wedge} & 0 \\ \eta_{\wedge} & \eta_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad \eta^{-1} = \begin{pmatrix} \eta_{\perp}/(\eta_{\perp}^2 + \eta_{\wedge}^2) & \eta_{\wedge}/(\eta_{\perp}^2 + \eta_{\wedge}^2) & 0 \\ -\eta_{\wedge}/(\eta_{\perp}^2 + \eta_{\wedge}^2) & \eta_{\perp}/(\eta_{\perp}^2 + \eta_{\wedge}^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1/\eta_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (6.4.36)$$

$\mathbf{b} = (0, 0, 1)$ を磁場の方向を向いた単位ベクトルとして、ベクトル $\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_{\parallel})$ に対して一般に

$$\mathbf{j}_{\parallel} = \mathbf{b}\mathbf{b} \cdot \mathbf{j} = (0, 0, j_{\parallel}) \quad (6.4.37)$$

$$\mathbf{j}_{\wedge} = \mathbf{b} \times \mathbf{j} = (-j_2, j_1, 0) \quad (6.4.38)$$

$$\mathbf{j}_{\perp} = (\mathbf{b} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{b} = (j_1, j_2, 0) \quad (6.4.39)$$

というベクトルを導入すれば、各テンソルとベクトルの内積は

$$\eta \cdot \mathbf{j} = \eta_{\parallel} \mathbf{j}_{\parallel} + \eta_{\wedge} \mathbf{j}_{\wedge} + \eta_{\perp} \mathbf{j}_{\perp} \quad (6.4.40)$$

というように表せる。 \mathbf{j}_{\parallel} は \mathbf{j} の磁場に平行な成分、 \mathbf{j}_{\perp} は磁場に垂直な成分、 \mathbf{j}_{\wedge} は磁場にも \mathbf{j} にも垂直で \mathbf{j}_{\perp} と同じ大きさを持った架空のベクトルである。

各輸送係数の成分は次のように表される^{†28}。

$$\eta_{\parallel} = 0.51\hat{\eta}, \quad \eta_{\wedge} \simeq 0, \quad \eta_{\perp} = \hat{\eta}, \quad \hat{\eta} = \frac{m_e}{e^2 n_e \tau_e} \quad (6.4.41)$$

$$\beta_{\parallel} = 0.71n_e, \quad \beta_{\wedge} = 1.5n_e(\Omega_e \tau_e)^{-1}, \quad \beta_{\perp} \simeq 0 \quad (6.4.42)$$

$$\kappa_{\parallel}^e = 3.16\hat{\kappa}_e, \quad \kappa_{\wedge}^e = 2.5\hat{\kappa}_e(\Omega_e \tau_e)^{-1}, \quad \kappa_{\perp}^e = 4.66\hat{\kappa}_e(\Omega_e \tau_e)^{-2}, \quad \hat{\kappa}_e = \frac{n_e k_B T_e \tau_e}{m_e} \quad (6.4.43)$$

電気抵抗率について、 $\eta_{\perp} \simeq 2\eta_{\parallel}$ であることはブラギンスキー以外の結果でも見られる特徴である。また、熱伝導率について、 $\kappa_{\perp}^e \sim \kappa_{\parallel}^e(\Omega_e \tau_e)^{-2}$ のオーダーになることは節 6.1.6 の考察と整合的である。 β_{\wedge} や κ_{\wedge}^e の存在は次のように解釈される。図 6.6 のように磁場と温度勾配が存在する状況を考える。図の右に行くほどジャイロ運動の速さが早くなるため、図の赤い線的位置において上向きの速度を持つ電子と下向きの速度を持つ電子では後者の方が平均的に速くなる。よって、上向きの電子がイオンとの衝突で受ける下向きの摩擦力が卓越するため、電子集団は全

大 (2022) などでも議論されている。

^{†28} $\eta_{\wedge}, \beta_{\perp}$ については、Braginskii (1965) ではそれぞれ $(\Omega_e \tau_e)^{-1}, (\Omega_e \tau_e)^{-2}$ のオーダーであると見積もられているが、Epperlein & Haines (1986) や Ji & Held (2013) では、それぞれ $(\Omega_e \tau_e)^{-2/3}, (\Omega_e \tau_e)^{-5/3}$ のオーダーであると見積もられる。いずれにせよ $(\Omega_e \tau_e) \rightarrow \infty$ では小さいオーダーであるとして、ここでは $\simeq 0$ と書いている。

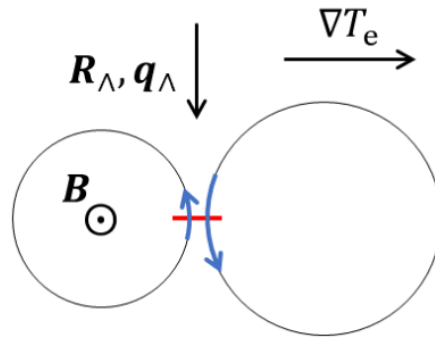


図 6.6 磁場に垂直な温度勾配の存在による摩擦力と熱流束のイメージ

体的に下向きの摩擦力 R_\perp を受けることになる。また、上から下に運ばれるエネルギーの方が多くなるため、下向きの正味の熱流束 q_\perp が発生する。 $\hat{\kappa}_e$ を使わずに κ_\perp^e を表すと

$$\kappa_\perp^e = \frac{5n_e k_B T_e}{2m_e \Omega_e} \quad (6.4.44)$$

であり、 τ_e に依らない。このことから推察されるように、 q_\perp は衝突由来の効果ではない。 q_\perp は反磁性熱流束 (diamagnetic heat flux) と呼ばれる。

イオンの場合について、まず $R_i = -R_e$ である。電子の場合と違い、イオン-電子間の衝突頻度はイオンの速さに依らないため、イオン集団の熱流束は j に依存しない。 q_i は次のように表される。

$$q_i = -\kappa_\parallel^i \nabla_\parallel (k_B T_i) + \kappa_\perp^i \mathbf{b} \times \nabla (k_B T_i) - \kappa_\perp^i \nabla_\perp (k_B T_i) \quad (6.4.45)$$

$$\kappa_\parallel^i = 3.9\hat{\kappa}_i, \quad \kappa_\perp^i = 2.5\hat{\kappa}_i(\Omega_i \tau_i')^{-1}, \quad \kappa_\perp^i = 2.0\hat{\kappa}_i(\Omega_i \tau_i')^{-2}, \quad \hat{\kappa}_i = \frac{n_i k_B T_i \tau_i'}{m_i} \quad (6.4.46)$$

温度勾配による熱流束についてまとめると、まず先ほども述べた通り、 κ_\parallel^s は κ_\perp^s に比べて $(\Omega_s \tau_s)^2$ のオーダーだけ大きい。 $\hat{\kappa}_s$ が $m_s^{-1/2}$ に依存することから、磁場に平行な方向の熱流束は主に電子によるものだと分かる。また、 κ_\perp^s が $m_s^{1/2}$ に依存することから、磁場に垂直な方向の熱流束の担い手はイオンであることも分かる。これらのことも節 6.1.6 の考察と整合的である。 κ_\perp^s は m_s に依らず、 κ_\parallel^s と κ_\perp^s の中間的なオーダーの大きさである。

異種間衝突による熱の交換率を表す項 Q_s は次のように表される。

$$Q_i = \frac{3m_e n_e k_B (T_e - T_i)}{m_i \tau_e} \quad (6.4.47)$$

$$Q_e = \frac{\mathbf{R}_e \cdot \mathbf{j}}{en_e} - Q_i \quad (6.4.48)$$

$\tau_{eq} \sim m_i \tau_e / m_e$ の長い時間スケールで電子集団とイオン集団の温度差分のエネルギーを交換して同じ温度になろうとする効果が表れている。

粘性率について説明する。粘性率は 2 階テンソル π_s と 2 階テンソル \mathbf{W}_s (定義は式 (6.4.22)) を結ぶ係数なので、4 階テンソルになる。 π_s, \mathbf{W}_s は対称テンソルであり、更に、磁場方向周りの回転について対称な系であるという条件より、このテンソルの独立な成分は 5 つであることが言える。それらを $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ と書くことにする。磁場の方向を z 軸 (第 3 軸) にとると、 π_s の各成分は次のように書ける。

$$\pi_{11} = -\frac{\mu_0}{2}(W_{11} + W_{22}) - \frac{\mu_1}{2}(W_{11} - W_{22}) - \mu_3 W_{12} \quad (6.4.49)$$

$$\pi_{22} = -\frac{\mu_0}{2}(W_{11} + W_{22}) - \frac{\mu_1}{2}(W_{22} - W_{11}) + \mu_3 W_{12} \quad (6.4.50)$$

$$\pi_{12} = -\mu_1 W_{12} + \frac{\mu_3}{2}(W_{11} - W_{22}) \quad (6.4.51)$$

$$\pi_{13} = -\mu_2 W_{13} - \mu_4 W_{23} \quad (6.4.52)$$

$$\pi_{23} = -\mu_2 W_{23} + \mu_4 W_{13} \quad (6.4.53)$$

$$\pi_{33} = -\mu_0 W_{33} \quad (6.4.54)$$

各粘性率は次のように表される。

$$\mu_0^i = 0.96 \hat{\mu}_i, \quad (6.4.55)$$

$$\mu_1^i = 0.3 \hat{\mu}_i (\Omega_i \tau_i')^{-2}, \quad \mu_2^i = 1.2 \hat{\mu}_i (\Omega_i \tau_i')^{-2} \quad (6.4.56)$$

$$\mu_3^i = 0.5 \hat{\mu}_i (\Omega_i \tau_i')^{-1}, \quad \mu_4^i = \hat{\mu}_i (\Omega_i \tau_i')^{-1}, \quad \text{ただし, } \hat{\mu}_i = n_i k_B T_i \tau_i' \quad (6.4.57)$$

$$\mu_0^e = 0.73 \hat{\mu}_e, \quad (6.4.58)$$

$$\mu_1^e = 0.51 \hat{\mu}_e (\Omega_e \tau_e)^{-2}, \quad \mu_2^e = 2.04 \hat{\mu}_e (\Omega_e \tau_e)^{-2} \quad (6.4.59)$$

$$\mu_3^e = -0.5 \hat{\mu}_e (\Omega_e \tau_e)^{-1}, \quad \mu_4^e = -\hat{\mu}_e (\Omega_e \tau_e)^{-1}, \quad \text{ただし, } \hat{\mu}_e = n_e k_B T_e \tau_e \quad (6.4.60)$$

イオン、電子のどちらの場合も、各成分の磁場の強さへの依存の仕方と $\mu_2 = 4\mu_1, \mu_4 = 2\mu_3$ であることは共通する。 μ_0 は κ_{\parallel} と同じように τ_s に依存する。この成分は磁場に平行な方向の平均自由行程のステップ長でのランダムウォークに由来する。 μ_2, μ_2 は μ_0 に比べて $(\Omega_s \tau_s)^2$ の

表 6.3 スピッツァーの輸送係数の計算結果

	$Z = 1$	$Z = 2$	$Z = 4$	$Z = 16$	$Z \rightarrow \infty$
γ_E	0.58	0.68	0.78	0.92	1.0
γ_T	0.27	0.41	0.57	0.83	1.0
δ_E	0.47	0.58	0.70	0.89	1.0
δ_T	0.23	0.36	0.51	0.79	1.0

オーダーだけ小さい成分であり、ジャイロ半径のステップ長でのランダムウォークに由来する。 μ_3, μ_4 は τ_s に依存しない成分であり、ジャイロ粘性 (gyroviscosity) と呼ばれる。反磁性熱流束と同類の機構によって発生する運動量フラックスである。

6.4.2 スピッツァーの輸送係数

Spitzer & Härm (1953) は平均速度がゼロ ($\mathbf{u}_s = 0$) で定常状態 ($\partial/\partial t = 0$) にあって、温度勾配と電場が存在する (磁場は存在しない) 系における運動論的方程式を解くことによって、電気抵抗率と熱伝導率を見積もった。そのような条件の下で前節と同様に考えると、次のような基本方程式が導出される。

$$\sum_{s'} C_{ss'}^l [f_s^1] = \left[\left(\frac{m_s v^2}{2k_B T} - \frac{5}{2} \right) \mathbf{v} \cdot \nabla \ln T - \frac{e_s}{k_B T} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \right] f_s^0 \quad (6.4.61)$$

電子とイオンの温度は等しく T としている。この式を各パラメータ $T, \nabla T, \mathbf{E}$ に対して解くことで、次の関係が得られる。

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \alpha \nabla(k_B T) \quad (6.4.62)$$

$$\mathbf{q} = -\beta \mathbf{E} - \kappa \nabla(k_B T) \quad (6.4.63)$$

$$\sigma = \frac{32n_e e^2 \tau_e}{3\pi m_e} \gamma_E = \frac{64\sqrt{2\pi}(k_B T)^{3/2} \epsilon_0^2}{Ze^2 \sqrt{m_e} \ln \Lambda} \gamma_E \quad (6.4.64)$$

$$\alpha = \frac{16en_e \tau_e}{\pi m_e} \gamma_T = \frac{96\sqrt{2\pi}(k_B T)^{3/2} \epsilon_0^2}{Ze^3 \sqrt{m_e} \ln \Lambda} \gamma_T \quad (6.4.65)$$

$$\beta = \frac{128en_e k_B T \tau_e}{3\pi m_e} \delta_E = \frac{256\sqrt{2\pi}(k_B T)^{5/2} \epsilon_0^2}{Ze^3 \sqrt{m_e} \ln \Lambda} \delta_E \quad (6.4.66)$$

$$\kappa = \frac{320n_e k_B T \tau_e}{3\pi m_e} \delta_T = \frac{640\sqrt{2\pi}(k_B T)^{5/2} \epsilon_0^2}{Ze^4 \sqrt{m_e} \ln \Lambda} \delta_T \quad (6.4.67)$$

イオンの電荷量 Z に対する $\gamma_E, \gamma_T, \delta_E, \delta_T$ の値は表 6.3 に示した。これらの値は Spitzer

(1962) によってまとめられていて、スピッツァーの値として文献で参照されていることがある。式 (6.4.61) の両辺に \mathbf{v} を乗じて速度空間で積分すると、摩擦力は

$$\mathbf{R}_e = n_e e \mathbf{E} \quad (6.4.68)$$

と表されることが分かる。 $Z = 1$ の場合について、上式と式 (6.4.62), (6.4.63) より、ブラギンスキーと同じ形の関係式に書き直すと次のようになる。

$$\mathbf{R}_e = \frac{en_e}{\sigma} \mathbf{j} - 0.70 n_e \nabla(k_B T) \quad (6.4.69)$$

$$\mathbf{q} = -3.2 \frac{k_B T}{e} \mathbf{j} - 3.4 \frac{n_e k_B T \tau_e}{m_e} \nabla(k_B T) \quad (6.4.70)$$

電気伝導率についてはブラギンスキーの値 $1/\eta_{\parallel}$ とほぼ等しい値であり、熱伝導率についてはブラギンスキーの値 κ_{\parallel}^e との違いは 8% 程度である。Spitzer (1962) は磁場のない状況での粘性率の値としてブラギンスキーの μ_0^i の値を引用しているため、この値もスピッツァーの値として参照されていることがある。 $Z = 1$ のときのスピッツァーの σ, κ とブラギンスキーの μ_0^i の実用的な表式を示す。

$$\sigma = 1.5 \times 10^{-2} \text{ S m}^{-1} \cdot \frac{1}{\ln \Lambda} \cdot \left(\frac{T}{\text{K}}\right)^{3/2} \quad (6.4.71)$$

$$\kappa k_B = 4.5 \times 10^{-10} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1} \cdot \frac{1}{\ln \Lambda} \cdot \left(\frac{T}{\text{K}}\right)^{5/2} \quad (6.4.72)$$

$$\mu = 2.2 \times 10^{-16} \text{ Pa s} \cdot \frac{A_i^{1/2}}{\ln \Lambda} \cdot \left(\frac{T}{\text{K}}\right)^{5/2} \quad (6.4.73)$$

A_i はイオンの原子量 (H^+ イオンなら $\simeq 1$) である。

6.5 部分電離プラズマ

例えば太陽の低層大気 (光球や彩層) では、図 3.6 (169 ページ) のように水素やヘリウムの殆どが中性原子の状態が存在し、ほんの僅かだけ電離している。或いは地球の電離層 (ionosphere) や原始惑星系円盤 (protoplanetary disk) を調べる場合など、中性分子とイオン、電子の混合気体を考えなければならない場合がある。このような気体は部分電離プラズマ (partially ionized plasma) と呼ばれる。荷電粒子と中性粒子間の衝突では長距離のクーロン相互作用がないため、その衝突断面積は一般に荷電粒子間のものより小さくなる。しかし、僅かに電離したプラズマでは中性粒子の数が多いため、電子やイオンと中性粒子間の衝突頻度が無視できない。流体的描像において、これらの効果は主にオームの法則に現れる。

各粒子種についての保存則は次のように書ける。

$$\frac{\partial m_s n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (m_s n_s \mathbf{u}_s) = S_s \quad (6.5.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_s n_s \mathbf{u}_s) + \nabla \cdot (m_s n_s \mathbf{u}_s \mathbf{u}_s + p_s \mathbf{I} + \boldsymbol{\pi}_s) = e_s n_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) + m_s n_s \mathbf{g} + \mathbf{R}_s \quad (6.5.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} m_s n_s u_s^2 + \mathcal{E}_s \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} m_s n_s u_s^2 \mathbf{u}_s + \mathcal{E}_s \mathbf{u}_s + p_s \mathbf{u}_s + \boldsymbol{\pi}_s \cdot \mathbf{u}_s + \mathbf{q}_s \right) \\ = Q_s + \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{R}_s + \frac{U_s S_s}{m_s} + m_s n_s \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{g} + e_s n_s \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (6.5.3)$$

$$\text{ただし,} \quad \mathcal{E}_s = \frac{3}{2} p_s + n_s U_s \quad (6.5.4)$$

重力も考慮した。粒子種 s とは例えば H, H⁺, H₂, 電子と言ったように、電離 (解離) した状態としていない状態を区別した各元素を考えることもあれば、H の束縛電子の励起状態まで区別して考えることもある。完全電離プラズマの場合と比べて新しく加わった項について、 S_s は電離や再結合で注目する粒子種の数が増える効果であり、 U_s は注目する粒子種がその元素の他の状態に対して持つポテンシャルエネルギーである。

6.5.1 各輸送係数について

S_s について

式 (6.5.1) は統計平衡方程式と呼ばれることがある。例えば、プラズマが薄いために、電離平衡に達するのにかかる時間スケールが注目する流体现象の時間スケールに対して無視できない場合に、サハの式からの電離率のずれを考慮に入れるために解かれる。或いはコロナのようなプラズマでは、吸収などの一部の反応が殆ど起きないため、系は局所熱平衡 (LTE) とは違う平衡状態に向かう。そのような場合は式 (6.5.1) の左辺をゼロにした式によって、電離度が決定される。

電離や再結合、励起などによって注目する粒子種の数が増える割合を表す S_s は、一般には次のような形で書ける。

$$S_s = \sum_{s' (s' \neq s)} (\rho_{s'} P_{s' \rightarrow s} - \rho_s P_{s \rightarrow s'}) \quad (6.5.5)$$

$\rho_s = m_s n_s$ は粒子種 s の質量密度で、 $P_{s \rightarrow s'}$ は単位時間あたりに粒子種 s から s' への変化が起きる確率である。例えば特定の励起状態の H (=H I) から H⁺ (=H II) への電離過程を考える場合、 $P_{\text{HI} \rightarrow \text{HII}}$ は更に、衝突によって電離過程が起こる確率 P_c と光電離が起こる確率 P_r に分けられる。

$$P_{\text{HI} \rightarrow \text{HII}} = P_c(n_e, T_e) + P_r[J_\nu] \quad (6.5.6)$$

衝突による電離とは、例えば



のような過程のことを指す。このような仮定の衝突断面積は付録 5.B.13 で説明しているような手法を用いて計算される。断面積 $\sigma_{CI}(v)$ が入射電子の速さ v の関数として表されれば、電子のマクスウェル-ボルツマン分布で平均することで P_c が計算できる。

$$P_c(n_e, T_e) = 4\pi \int \sigma_{CI}(v) v^3 f_e^0(v; n_e, T_e) dv \quad (6.5.8)$$

このように、 P_c は衝突相手の粒子種の数密度や温度に依存する。

光電離とは、節 5.3.6 で説明しているように、H が光子を吸収して束縛電子が自由電子化する過程



のことである。この過程の衝突断面積 $\sigma_{PI}(\nu)$ が入射光子の振動数 ν の関数として表されるとする。振動数 $\nu \sim \nu + d\nu$ を持つ光子の数密度フラックスは、全放射方向 4π の分を考えて $4\pi J_\nu d\nu / (h\nu)$ と書ける。 J_ν は平均放射強度である (節 5.1 参照)。吸収端より大きい振動数の光子による寄与を合計することで、次のように P_r が計算できる。

$$P_r[J_\nu] = \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi J_\nu(\nu)}{h\nu} \sigma_{PI}(\nu) d\nu \quad (6.5.10)$$

このように、 P_r は放射強度 I_ν に依存するため、自己無撞着に問題を解くには放射輸送方程式 (第 5 章参照) も解く必要がある^{†29}。他に多電子原子の電離を起こす機構として、光子が原子に入射して束縛電子を励起し、励起された束縛電子が脱励起する際に他の浅い準位にある束縛電子にエネルギーを与えて電離を起こす自動イオン化というものがあることも考えられることもある。

例えば Leenaarts et al. (2007) は太陽彩層での水素の電離平衡からのずれを取り入れるために、H 原子の主量子数 $n = 1, 2, 3, 4, 5$ の状態と電離状態 H^+ の 6 状態を別の粒子種として扱い、 S_s には衝突による遷移と光子の吸収・放射による遷移を考慮している。

R_s について

R_s は他の粒子種との衝突による運動量交換を表す。各粒子種との弾性衝突による寄与 $R_{ss'}^{\text{el}}$ と非弾性衝突による寄与 $R_{ss'}^{\text{inel}}$ に分けられる。

$$R_s = \sum_{s'(s' \neq s)} R_{ss'}^{\text{el}} + \sum_{s'} R_{ss'}^{\text{inel}} \quad (6.5.11)$$

弾性衝突による寄与は、衝突頻度を $\nu_{ss'}$ として次のように書ける。

$$R_{ss'}^{\text{el}} = -\rho_s \nu_{ss'} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{s'}) \quad (6.5.12)$$

^{†29} しかし、一般に放射輸送方程式を解くには計算資源が足りない場合があるため、現実的にモデルを計算する際には他のモデルの計算結果を利用したりなど、 J_ν の与え方に工夫が施される。

粒子種 s と s' の平均速度に差がある場合に、その差を緩和する向きに摩擦力がはたらく効果を表している。

上式の係数は電子-イオン間の衝突の場合は節 6.4 で説明した電気抵抗率に相当する。注目する粒子が磁化していない場合には、荷電粒子同士の衝突頻度は次のように見積もられる。

$$\nu_{ss'} = \frac{n_{s'} e_s^2 e_{s'}^2 \ln \Lambda}{6\sqrt{2}\pi^{3/2} \epsilon_0^2 \mu_{ss'}^2} \left(\frac{k_B T_s}{m_s} + \frac{k_B T_{s'}}{m_{s'}} \right)^{-3/2} \quad (6.5.13)$$

節 6.1.4 の考察において、電子の質量を注目する粒子種 s と衝突相手の粒子種 s' との換算質量 $\mu_{ss'} = m_s m_{s'} / (m_s + m_{s'})$ に置き換えて、粒子間の平均速度を $\sqrt{k_B T_s / m_s + k_B T_{s'} / m_{s'}}$ と見積もることで得られる。

中性粒子との衝突についての微分断面積は付録 5.B.13 で述べているような手法で求めることができる。微分断面積 $d\sigma/d\Omega$ が入射粒子の速さと散乱角の関数として得られれば、式 (6.5.12) に現れる衝突頻度は付録 6.B.3 の議論を発展させて次のように見積もられる (Ballester et al., 2018)。

$$\nu_{ss'} = \frac{4}{3} n_{s'} \frac{m_{s'}}{m_s + m_{s'}} \sigma_{ss'}^m \sqrt{\frac{8k_B T_s}{\pi m_s} + \frac{8k_B T_{s'}}{\pi m_{s'}}} \quad (6.5.14)$$

$$\text{ただし, } \sigma_{ss'}^m = \int_{4\pi} (1 - \cos \theta) \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega} d\Omega \quad (6.5.15)$$

$\sigma_{ss'}^m$ は運動量輸送断面積 (momentum transfer cross section) と呼ばれる。散乱角の大きい衝突ほど粒子種間の運動量交換に大きく寄与するので、その重み $(1 - \cos \theta)$ が加味されている。電子や陽子と水素原子、ヘリウム原子との衝突や水素原子同士の衝突についての断面積は Vranjes & Krstic (2013) にまとめられている。またこの文献では太陽大気での電子や陽子と各粒子との衝突頻度の見積もりもまとめられている。

非弾性衝突による寄与 $\mathbf{R}_{ss'}^{\text{inel}}$ として、例えば光電離や再結合によって注目する粒子数が増減することによる運動量変化を考えるならば次のように書ける。

$$\mathbf{R}_{ss'}^{\text{inel}} = \rho_{s'} \mathbf{u}_{s'} P_{s' \rightarrow s} - \rho_s \mathbf{u}_s P_{s \rightarrow s'} \quad (6.5.16)$$

π_s, q_s について

Khodachenko et al. (2004) は太陽大気での MHD 波の減衰を調べるために、各粒子種の粘性率を次のように見積もっている。

$$\mu_s \sim \frac{n_s k_B T}{\sum_{s'} \nu_{ss'}} \quad (6.5.17)$$

衝突頻度は前の小節で述べたのと同じようにして見積もられる。ただし、粘性率や熱伝導率を見積もる際の中性粒子との衝突頻度に用いられる断面積には次の形式が用いられることがある (Vranjes & Krstic, 2013)。

$$\sigma_{ss'}^v = \int_{4\pi} \sin^2 \theta \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega} d\Omega \quad (6.5.18)$$

これは粘性断面積 (viscosity cross section) と呼ばれる。特に散乱角が $\pi/2$ に近い衝突の頻度がエネルギー伝導の時間スケールを決めているという事情が加味されている。

Q_s について

異種間の衝突によって交換する熱を表す Q_s は、まず各粒子種との衝突による寄与に分けられる。

$$Q_s = \sum_{s' (s' \neq s)} Q_{ss'} \quad (6.5.19)$$

Q_{ei}, Q_{ie} は節 6.4 で示したように表される。中性粒子との弾性衝突に関する項は、節 6.4 の結果を自然に拡張するならば、次のように書ける (Leake et al., 2014)。

$$Q_{ss'} = \frac{1}{2} \mathbf{R}_{ss'} \cdot (\mathbf{u}_{s'} - \mathbf{u}_s) + 3 \frac{\mu_{ss'}}{m_s} n_s \nu_{ss'} k_B (T_{s'} - T_s) \quad (6.5.20)$$

$\mu_{ss'}$ は粒子種 s と s' の換算質量である。

6.5.2 一般化されたオームの法則

部分電離プラズマは完全電離プラズマの場合よりも磁気拡散 (節 4.2 参照) が起こりやすい。流体方程式を考える場合には、この効果はオームの法則に対する変更として取り込まれる。所謂一般化されたオームの法則 (generalized Ohm's law) を導出する。この節の議論は Khomenko et al. (2014) によるものである。

各粒子種の運動方程式 (6.5.2) に電荷と質量の比 $r_s = e_s/m_s$ を乗じて全粒子種について足し合わせる。中性粒子の電荷はゼロなので、荷電粒子全てについて足し合わせるということである。

$$\begin{aligned} \sum_{s=i,e} \left[r_s \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s \mathbf{u}_s) + r_s \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{u}_s \mathbf{u}_s + \mathbf{p}_s) \right] \\ = \sum_{s=i,e} \left[\rho_s r_s^2 (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) + \rho_s r_s \mathbf{g} + r_s \mathbf{R}_s \right] \end{aligned} \quad (6.5.21)$$

圧力と粘性はテンソル \mathbf{p}_s にまとめた。実際には粘性は無視されることもある。電流密度 \mathbf{j} と全粒子の重心速度 \mathbf{u} を次のように導入する。

$$\mathbf{j} = \sum_{s=i,e} \rho_s r_s \mathbf{u}_s \quad (6.5.22)$$

$$\mathbf{u} = \frac{\sum_s \rho_s \mathbf{u}_s}{\sum_s \rho_s} \quad (6.5.23)$$

各粒子種の平均速度の \mathbf{u} からのずれを

$$\mathbf{w}_s = \mathbf{u}_s - \mathbf{u} \quad (6.5.24)$$

と書くことにする。準中性の仮定 ($\sum_{s=i,e} \rho_s r_s \approx 0$) を課すと、式 (6.5.21) は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \sum_{s=i,e} \rho_s r_s^2 (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) &= \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j} \mathbf{u} + \mathbf{u} \mathbf{j}) \\ &+ \nabla \cdot \sum_{s=i,e} (\rho_s r_s \mathbf{w}_s \mathbf{w}_s) + \sum_{s=i,e} r_s \nabla \cdot \mathbf{p}_s - \sum_{s=i,e} r_s \mathbf{R}_s \end{aligned} \quad (6.5.25)$$

太陽大気の部分電離プラズマを想定し、イオンは 1 価 (H^+ , He^+) であるとする。式 (6.5.25) の各項を簡単にするを考える。

$\nabla \cdot \mathbf{p}_s$ 項について

イオンと電子の項を分けることで、次のようになる。

$$\sum_{s=i,e} r_s \nabla \cdot \mathbf{p}_s = r_e \nabla \cdot \left(\sum_{s=i} \mathbf{p}_s \frac{r_s}{r_e} + \mathbf{p}_e \right) \simeq -\frac{e}{m_e} \nabla \cdot \mathbf{p}_e \quad (6.5.26)$$

$m_e/m_i = -r_i/r_e \ll 1$ であることを用いて近似した。

左辺について

イオンと電子の項を分けることで、準中性の仮定の下で次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \sum_{s=i,e} \rho_s r_s^2 (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) &= \rho_e r_e^2 \left(\sum_{s=i} \frac{\rho_s r_s^2}{\rho_e r_e^2} + 1 \right) (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ &+ \rho_e r_e^2 \left[\sum_{s=i} \frac{n_s \mathbf{w}_s}{n_e} \left(1 - \frac{r_s}{r_e} \right) \right] \times \mathbf{B} + r_e \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (6.5.27) \\ &\simeq \frac{e^2 n_e}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{e^2}{m_e} \sum_{s=i} n_s \mathbf{w}_s \times \mathbf{B} - \frac{e}{m_e} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (6.5.28)$$

再び $m_e/m_i \ll 1$ であることを用いて近似した。各イオン種の平均速度 \mathbf{u}_s はイオンの重心速度

$$\mathbf{u}_i = \frac{\sum_{s=i} \rho_s \mathbf{u}_s}{\sum_{s=i} \rho_s} \quad (6.5.29)$$

とほぼ等しいと仮定し、

$$s = i \text{ の場合について } \quad \mathbf{w}_s \simeq \mathbf{u}_i - \mathbf{u} \quad (6.5.30)$$

と近似する。荷電粒子の重心速度 $\mathbf{u}_c (\simeq \mathbf{u}_i)$ や中性粒子の重心速度 \mathbf{u}_n も同様にして導入する。中性粒子の質量分率

$$\xi_n = \frac{\sum_{s=n} \rho_s}{\rho_e + \sum_{s=i} \rho_s + \sum_{s=n} \rho_s} \simeq \frac{\sum_{s=n} \rho_s}{\sum_{s=i} \rho_s + \sum_{s=n} \rho_s} \quad (6.5.31)$$

を用い、電子の質量は無視すると、全体の重心速度は

$$\mathbf{u} = (1 - \xi_n)\mathbf{u}_c + \xi_n\mathbf{u}_n \quad (6.5.32)$$

と書ける。このことを用いると、

$$\mathbf{w}_s \simeq \xi_n \mathbf{w} \quad (6.5.33)$$

$$\text{ただし, } \mathbf{w} = \mathbf{u}_c - \mathbf{u}_n \quad (6.5.34)$$

と書ける。この \mathbf{w} を用いて式 (6.5.28) の第 2 項を書き換えると、次の式が得られる。

$$\sum_{s=i,e} \rho_s r_s^2 (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) \simeq \frac{e^2 n_e}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{e^2 n_e}{m_e} \xi_n \mathbf{w} \times \mathbf{B} - \frac{e}{m_e} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (6.5.35)$$

ただし、準中性の仮定より $\sum_{s=i} n_s \simeq n_e$ であることも用いている。

R_s 項について

式 (6.5.13) を見ると、各粒子種の温度が等しい場合には電子-イオン間の衝突頻度は粒子種に依らない温度のみの関数 $f_1(T)$ を用いて

$$\nu_{ei} = \frac{n_i}{\sqrt{m_e}} f_1(T) \quad (6.5.36)$$

と書けることが分かる。また、電子と中性粒子間の衝突断面積およびイオンと中性粒子間の衝突断面積はそれぞれ中性粒子の種類によらず同じ値であると見積もることになると、式 (6.5.14) よりイオン-中性粒子間衝突頻度 ν_{in} および電子-中性粒子間衝突頻度 ν_{en} は、粒子種に依らない温度のみの関数 $f_2(T), f_3(T)$ を用いて

$$\nu_{in} = \frac{n_n}{\sqrt{\mu_{in}}} f_2(T) = \frac{n_n}{\sqrt{m_p}} f_2(T) \frac{1}{\sqrt{A_{in}}} \quad (6.5.37)$$

$$\nu_{en} = \frac{n_n}{\sqrt{m_e}} f_3(T) \quad (6.5.38)$$

と書ける。ただし、 m_p は陽子質量であり、 A_{in} は注目するイオンと中性粒子の換算質量を m_p を原子量として (m_p を単位として) 表したものである。一般に $\nu_{ss'}$ と $\nu_{s's}$ の間には

$$\rho_s \nu_{ss'} = \rho_{s'} \nu_{s's} \quad (6.5.39)$$

という関係があることも用い、 R_s 項をイオンについての和と電子の場合に分けて計算する。ただし、弾性散乱による寄与 (6.5.12) のみを考える。まず、イオンについての和は

次のように計算できる。

$$\sum_{s=i} \frac{e}{m_s} \mathbf{R}_s = - \sum_{s=i} \frac{e}{m_s} \rho_s \nu_{se} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_e) - \sum_{s=i} \frac{e}{m_s} \rho_s \sum_{s'=n} \nu_{ss'} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{s'}) \quad (6.5.40)$$

$$= - \frac{n_e}{\sqrt{m_e}} f_1(T) \sum_{s=i} \frac{m_e}{m_s} e n_s (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_e) - \frac{e}{\sqrt{m_p}} f_2(T) \sum_{s=i} \sum_{s'=n} \frac{n_s n_{s'}}{\sqrt{A_{ss'}}} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{s'}) \quad (6.5.41)$$

$$\simeq - \frac{n_e}{\sqrt{m_e}} f_1(T) \frac{m_e}{m_p} \mathbf{j} - \frac{e n_i n_n}{\sqrt{m_p}} f_2(T) (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_n) \quad (6.5.42)$$

$$= - \frac{m_e}{m_p} \mathbf{j} \sum_{s=i} \nu_{es} - e n_e (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_n) \sum_{s=i} \sum_{s'=n} \nu_{ss'} \quad (6.5.43)$$

$$\text{ただし,} \quad n_i = \sum_{s=i} n_s, \quad n_n = \sum_{s=n} n_s \quad (6.5.44)$$

$$\mathbf{u}_i = \frac{\sum_{s=i} \rho_s \mathbf{u}}{\sum_{s=i} \rho_s}, \quad \mathbf{u}_n = \frac{\sum_{s=n} \rho_s \mathbf{u}}{\sum_{s=n} \rho_s} \quad (6.5.45)$$

2 段目から 3 段目の近似では、元素として水素とヘリウムを念頭に置いているため $\sqrt{A_{ss'}} \sim 1$ とみなし、各粒子種の平均速度はイオンの場合は \mathbf{u}_i 、中性粒子の場合は \mathbf{u}_n とほぼ等しいと仮定した。また、準中性の仮定は $n_e \simeq n_i$ と表せることも用いる。一方で、電子についての項は同様にして次のように書ける。

$$- \frac{e}{m_e} \mathbf{R}_e \simeq - \mathbf{j} \sum_{s=i} \nu_{es} - e n_e (\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_e) \sum_{s=n} \nu_{es} \quad (6.5.46)$$

式 (6.5.43) の第 1 項は式 (6.5.46) の第 1 項に比べて無視できるので、式 (6.5.25) の \mathbf{R}_s 項は次のようになる。

$$\sum_{s=i,e} r_s \mathbf{R}_s \simeq - \mathbf{j} \left(\sum_{s=i} \nu_{es} + \sum_{s=n} \nu_{es} \right) + e n_e \mathbf{w} \left(\sum_{s=n} \nu_{es} - \sum_{s=i} \sum_{s'=n} \nu_{ss'} \right) \quad (6.5.47)$$

式 (6.5.26), (6.5.35), (6.5.47) を式 (6.5.25) に代入する。また、電流は十分に弱くほぼ定常であり流体は平衡からそれ程離れていないとして、式 (6.5.25) の慣性項と $\mathbf{w}_s \mathbf{w}_s$ 項は無視する。すると、次の式を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} &= - \xi_n \mathbf{w} \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{e n_e} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{p}_e}{e n_e} \\ &+ \frac{m_e}{e^2 n_e} \left(\sum_{s=i} \nu_{es} + \sum_{s=n} \nu_{es} \right) \mathbf{j} - \frac{m_e}{e} \left(\sum_{s=n} \nu_{es} - \sum_{s=i} \sum_{s'=n} \nu_{ss'} \right) \mathbf{w} \end{aligned} \quad (6.5.48)$$

1 流体方程式に適用できるオームの法則の形式にするには、上式に含まれる $\mathbf{w} = \mathbf{u}_c - \mathbf{u}_n$ を求

める必要がある。そのために、

$$\begin{aligned} & \xi_n \left[(\text{電子の運動量保存則}) + \sum (\text{イオンの運動量保存則}) \right] \\ & - (1 - \xi_n) \sum (\text{中性粒子の運動量保存則}) \end{aligned} \quad (6.5.49)$$

という式を考える。準中性の仮定の下で、電子の質量をイオンのそれに対して無視し、イオンと中性粒子の平均速度はそれぞれの重心速度とほぼ等しいという仮定を課すと、次の式を得る。

$$\begin{aligned} & \xi_n \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_c \mathbf{u}_c) + \nabla \cdot (\rho_c \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c) \right] - (1 - \xi_n) \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_n \mathbf{u}_n) + \nabla \cdot (\rho_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n) \right] \\ & = \xi_n \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \mathbf{G} + \frac{\mathbf{j}}{en_e} \rho_e \sum_{s=n} \nu_{es} - \alpha_n \mathbf{w} \end{aligned} \quad (6.5.50)$$

ただし、 \mathbf{G} と α_n は次のように定義される。

$$\mathbf{G} = \xi_n \nabla \cdot \left(\sum_{s=i} \mathbf{p}_s + \mathbf{p}_e \right) - (1 - \xi_n) \nabla \cdot \left(\sum_{s=n} \mathbf{p}_s \right) \quad (6.5.51)$$

$$\alpha_n = \rho_e \sum_{s=n} \nu_{es} + \rho_i \sum_{s=i} \sum_{s'=n} \nu_{ss'} \quad (6.5.52)$$

上式の左辺は $\rho \xi_n (1 - \xi_n) \partial \mathbf{w} / \partial t$ のオーダーと見積もられる^{†30}が、これはイオンや電子と中性粒子との衝突時間に比べて長い時間スケールの現象を調べる場合には $\alpha_n \mathbf{w}$ 項に比べて無視できる。よって、

$$\mathbf{w} \simeq \frac{\xi_n}{\alpha_n} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{G}}{\alpha_n} + \frac{\mathbf{j}}{en_e \alpha_n} \rho_e \sum_{s=n} \nu_{es} \quad (6.5.53)$$

となる。これを式 (6.5.48) に代入すると、最終的な一般化されたオームの法則の表式は次のようになる。

^{†30} 一般化されたオームの法則は太陽大気での MHD 波の減衰を調べる場合に用いられることが多く、そのような振幅の小さな現象を考える場合には移流項の効果は一般に小さい。

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} + \eta_H \mathbf{j} \times \mathbf{b} - \eta_A (\mathbf{j} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} - \eta_{pe} \frac{\nabla \cdot \mathbf{p}_e}{B} + \eta_{pt} \frac{\mathbf{G}}{B} + \eta_{ptb} \frac{\mathbf{G} \times \mathbf{b}}{B} \quad (6.5.54)$$

$$\eta = \frac{1}{(en_e)^2} \left(\rho_e \sum_{s=i} \nu_{es} + o\rho_e \sum_{s=n} \nu_{es} \right) \simeq \frac{\alpha_e}{(en_e)^2} \quad (6.5.55)$$

$$\eta_H = \frac{B}{en_e} (1 - 2\xi_n \epsilon_1 + \xi_n \epsilon_2) \simeq \frac{B}{en_e} \quad (6.5.56)$$

$$\eta_A = \frac{\xi_n^2 B^2}{\alpha_n} \quad (6.5.57)$$

$$\eta_{pe} = \frac{B}{en_e} \simeq \eta_H \quad (6.5.58)$$

$$\eta_{pt} = \frac{B}{en_e} (\epsilon_1 - \epsilon_2) \quad (6.5.59)$$

$$\eta_{ptb} = \frac{\xi_n B^2}{\alpha_n} \quad (6.5.60)$$

$$\text{ただし, } \alpha_e = \rho_e \sum_{s=i} \nu_{es} + \rho_e \sum_{s=n} \nu_{es} \quad (6.5.61)$$

$$\epsilon_1 = \rho_e \sum_{s=n} \nu_{es} / \alpha_n \ll 1 \quad (6.5.62)$$

$$\epsilon_2 = \rho_e \sum_{s=i} \sum_{s'=n} \nu_{ss'} / \alpha_n \ll 1 \quad (6.5.63)$$

$$o = \sum_{s=i} \sum_{s'=n} \rho_s \nu_{ss'} / \alpha_n \simeq 1 \quad (6.5.64)$$

$\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ は磁場の向きの単位ベクトルである。 $\epsilon_1, \epsilon_2, o$ のオーダーは ν_{sn} が大まかに $1/\sqrt{m_s}$ に依存することと、 ρ_s が m_s に依存することを用いて評価した。 η_H が係る項が表す効果はホール効果 (Hall effect)、 η_A が係る項が表す効果は両極性拡散 (ambipolar diffusion) と呼ばれる。節 6.4.1 (485 ページ) で説明したように、磁場の方向 \mathbf{b} を z 軸 (第 3 軸) にとって、テンソルを用いて式 (6.5.54) を書き換えると次のようになる。

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \boldsymbol{\eta}_j \cdot \mathbf{j} - \eta_H \frac{\nabla \cdot \mathbf{p}_e}{B} + \frac{\boldsymbol{\eta}_G \cdot \mathbf{G}}{B} \quad (6.5.65)$$

$$\boldsymbol{\eta}_j = \begin{pmatrix} \eta + \eta_A & \eta_H & 0 \\ -\eta_H & \eta + \eta_A & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix} \quad (6.5.66)$$

$$\boldsymbol{\eta}_G = \begin{pmatrix} \eta_{pt} & \eta_{ptb} & 0 \\ -\eta_{ptb} & \eta_{pt} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{pt} \end{pmatrix} \quad (6.5.67)$$

$\boldsymbol{\eta}_j$ の磁場に垂直な成分 $\eta_{\text{cow}} = \eta + \eta_A$ はカウリング抵抗率と呼ばれる。部分電離プラズマで

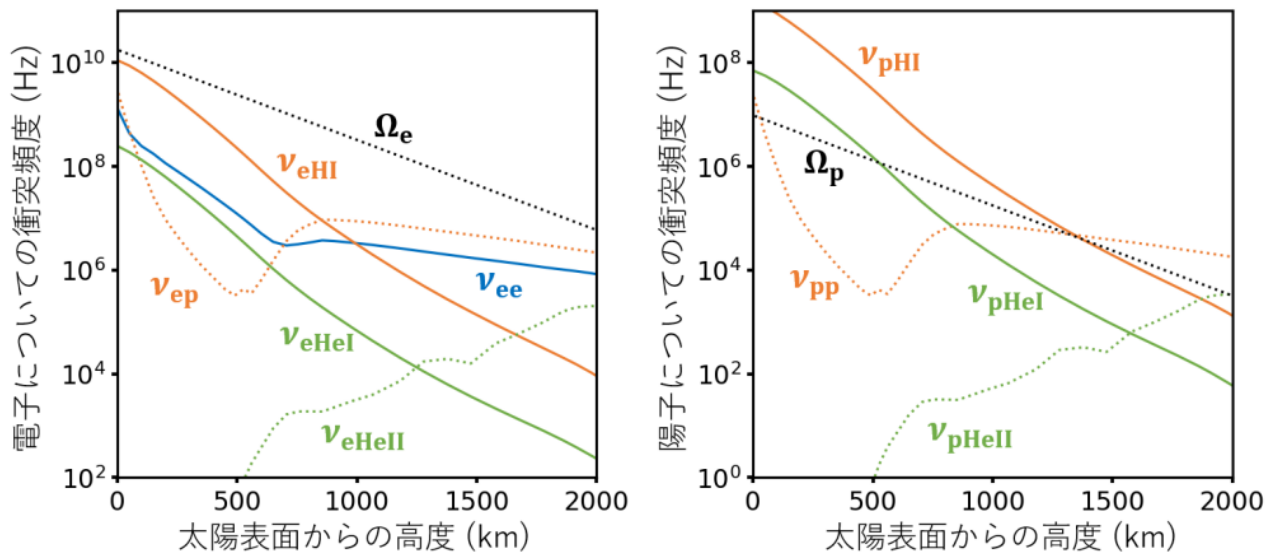


図 6.7 太陽大気での電子と陽子についての衝突頻度：黒い点線は電子と陽子のジャイロ周波数、他の線は各粒子種間の衝突頻度を表す。添え字の e, p, H I, He I, He II はそれぞれ電子、陽子、水素またはヘリウムの中性原子、ヘリウムの一価イオンを表す。高度が大体 0 ~ 500 km の領域は光球、500 ~ 2500 km の領域は彩層と呼ばれる。計算方法は Vranjes & Krstic (2013) を参考にした。温度や各粒子種の数密度のモデルには Fontenla et al. (1993) の MODEL C を用いた。ジャイロ周波数 $\Omega_s = |e_s|B/m_s$ の見積りに用いた磁場強度 $B(z)$ (z は高度) は、大雑把なモデルとして、重力成層 (節 4.3.1) を仮定したときの値 $B(z) = B_0 \exp[-z/(2H_B)]$ を採用した。ただし、表面での磁場は $B_0 = 0.1$ T、スケールハイトは $H_B = 125$ km とした。

は、磁場に感度のない中性粒子との衝突の効果によって磁場凍結の具合が緩くなり、完全電離プラズマの場合よりも磁場が抜けやすく (気体が磁場に対して動きやすく) なる。

η, η_H, η_A の比はジャイロ周波数 Ω_s を用いて

$$\frac{\eta_H}{\eta} = \frac{\Omega_e}{\sum_{s=i} \nu_{es} + \sum_{s=n} \nu_{es}}, \quad \frac{\eta_A}{\eta_H} \simeq \frac{\xi_n^2 \Omega_i}{\sum_{s=i} \sum_{s'=n} \nu_{ss'}} \quad (6.5.68)$$

と書ける。磁化をしているプラズマでは電気抵抗に比べてホール効果や両極性拡散が大きいことが分かる。図 6.7 に、太陽大気で推定される電子と陽子についての衝突頻度をジャイロ周波数と共に示した。特にジャイロ周波数の見積りは不確かさが大きいことに注意されたい。特に彩層では両粒子種とも磁化している可能性があるため、ホール効果と両極性拡散の効果は無視できない。太陽大気での各種の拡散係数の比較については Khomenko et al. (2014) で詳しく議論されている。一般化されたオームの法則の適用可能な現象スケールの考察について、Pandey & Wardle (2008) も参考にして欲しい。

6.6 非マクスウェル-ボルツマン分布

6.7 プラズマ中の波

付録 6.A 非理想気体の状態方程式

節 3.4.1 で理想気体の状態方程式を説明した。これは気体を構成する各粒子が周りの粒子と相互作用せず、自由に運動している場合を想定した状態方程式である (付録 3.B.3 も参照)。節 6.2 で説明している運動論においても、弱結合プラズマ (節 6.1.2 参照) を想定し、各粒子は基本的にポテンシャルに強く束縛されずに運動していることを仮定した議論を行っているため、平衡状態では分布関数はマクスウェル-ボルツマン分布になるという帰結を得る (節 6.2.3 参照)。この場合、節 6.2.3 で実際に計算しているように、 p_s, n_s, T_s は理想気体の状態方程式に従う。

各粒子同士に常時働く相互作用を考慮に入れた場合、状態方程式は理想気体のものから変化する。例えば太陽や恒星内部の構造を良い精度で計算したい場合、粒子間に働くクーロン力による効果や電子の縮退の効果などを状態方程式に取り入れる必要がある (e.g. Kippenhahn et al., 2012; Christensen-Dalsgaard, 2021)。本付録はそのような理想気体の状態方程式からのずれについて説明する。

本付録は Kippenhahn et al. (2012), Landau & Lifshitz (1980) を参考にした。

6.A.1 クーロン力による効果

節 6.1.2 で電荷を取り巻く電子とイオンの分極が静電ポテンシャルに及ぼす影響 (デバイ遮蔽) を簡単なモデルを用いて考察し、デバイ遮蔽が上手く機能しているプラズマを弱結合プラズマと呼ぶことを説明した。そのような弱結合プラズマにおいては、各粒子は衝突の瞬間を除けば、静電ポテンシャルによる強い束縛を受けないため、理想気体の状態方程式が比較的良い精度で成り立つ。しかし、例えば恒星内部の構造を細かく計算する場合などには、各粒子が周りの粒子から受けるクーロン力に起因する理想気体からのずれを考慮する必要がある。本節では、そのずれの効果節 6.1.2 の考察に基づいて見積もる。

デバイ遮蔽の考察の拡張

節 6.1.2 では水素イオンと電子から成るプラズマを考えたが、より一般に、複数の種類の陽イオンと電子から成るプラズマの場合を考えることにする。陽イオンの種類を表すラベルを i とし、第 i 種のイオンが持つ電荷を $Z_i e$ と書く。 e は素電荷である。電子の持つ電荷は $-e$ である。各粒子種の平均的な数密度を \bar{n}_i, \bar{n}_e と書くことにする。プラズマが全体的に中性である (準

中性) と仮定すると、次の関係が成り立っている。

$$\sum_i Z_i e \bar{n}_i - e \bar{n}_e = 0 \quad (6.A.1)$$

各粒子が作り出す静電ポテンシャルの重ね合わせを $\phi(\mathbf{x})$ と書くことにする。座標の原点に Q の電荷を置くと、周りの粒子は分極し、電荷 q を持つ粒子種の数密度は次のようになる。

$$n(\mathbf{x}) = \bar{n} \exp\left(-\frac{q\phi(\mathbf{x})}{k_B T}\right) \quad (6.A.2)$$

節 6.1.2 と同様に、弱結合プラズマの場合には $|q\phi/(k_B T)| \ll 1$ が成り立つため、 \exp を展開して 1 次の項までで近似することによって、各粒子種の数密度は次のように書ける。

$$n_i(\mathbf{x}) = \bar{n}_i \left(1 - \frac{Z_i e \phi(\mathbf{x})}{k_B T}\right), \quad n_e(\mathbf{x}) = \bar{n}_e \left(1 + \frac{e \phi(\mathbf{x})}{k_B T}\right) \quad (6.A.3)$$

電荷密度 $\zeta(\mathbf{x})$ は各粒子種の電荷を合計することで、次のように書ける。

$$\zeta = \sum_i Z_i e n_i - e n_e \quad (6.A.4)$$

$$= -\sum_i \frac{(Z_i e)^2 \phi}{k_B T} \bar{n}_i - \frac{e^2 \phi}{k_B T} \bar{n}_e \quad (6.A.5)$$

$$= -\chi \frac{e^2 \phi}{k_B T} n \quad (6.A.6)$$

ただし、2 段目では式 (6.A.3) を代入し、式 (6.A.1) の関係を用いた。3 段目で導入した n と χ はそれぞれ全数密度と電荷の 2 乗平均であり、次のように書ける。

$$n = \sum_i \bar{n}_i + \bar{n}_e \quad (6.A.7)$$

$$\chi = \frac{1}{n} \left(\sum_i Z_i^2 \bar{n}_i + \bar{n}_e \right) \quad (6.A.8)$$

平均分子量 (無次元) μ と各イオンの原子量 A_i 、質量存在率 $X_i = A_i \bar{n}_i / (n \mu)$ を用いると、 χ は次のようにも書ける。

$$\chi = \mu \sum_i \frac{Z_i (Z_i + 1)}{A_i} X_i \quad (6.A.9)$$

静電ポテンシャル ϕ は次のポアソン方程式に従う。

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\zeta}{\epsilon_0} = \frac{\chi n e^2}{\epsilon_0 k_B T} \phi \quad (6.A.10)$$

これを節 6.1.2 と同様に、極座標で書き下して解くと、次の解を得る。

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \quad (6.A.11)$$

$$\text{ただし,} \quad \lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{\chi n e^2}} \quad (6.A.12)$$

デバイ長に χ の修正が加わったが、節 6.1.2 と同じように、デバイ-ヒュッケルポテンシャルが導出された。

状態方程式の修正

付録 3.B.3 で説明しているが、理想気体の状態方程式は、系のエネルギーが各粒子の持つ運動エネルギーの合計だけである場合を想定して導出されたものである。つまり、各粒子は他の粒子が作り出すポテンシャルに束縛されておらず、自由に運動している場合である。クーロン力の効果を考慮すると、単位質量あたりの内部エネルギー $\varepsilon^{\dagger 31}$ は、理想気体の場合の値 ε_{id} から次のように修正されるはずである。

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{id}} + \varepsilon_{\text{corr}} \quad (6.A.13)$$

それに伴って、ヘルムホルツの自由エネルギー (付録 3.A.3 参照) も理想気体の場合から

$$f = f_{\text{id}} + f_{\text{corr}} \quad (6.A.14)$$

と修正される。熱力学的関係式 (3.A.19) より、修正項の間には次の関係があることが分かる。

$$\frac{\varepsilon_{\text{corr}}}{T^2} = - \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{f_{\text{corr}}}{T} \right) \right]_{\rho} \quad (6.A.15)$$

内部エネルギーに対する修正項 $\varepsilon_{\text{corr}}$ を求める。第 i 種のイオンと電子が周りの粒子集団から受けるポテンシャルをそれぞれ ϕ_i, ϕ_e と書くことにすると、単位質量あたりの静電エネルギーの合計は次のように書ける。

$$\varepsilon_{\text{corr}} = \frac{v}{2} \left(\sum_i Z_i e \bar{n}_i \phi_i - e \bar{n}_e \phi_e \right) \quad (6.A.16)$$

v は単位質量当たりの体積 (比体積) である。系内の粒子が互いに及ぼし合う自己エネルギーを考えているので、二重に数え上げた分を補正するために $1/2$ を乗じた。

原点の近傍 ($r/\lambda_D \ll 1$) を想定して、式 (6.A.11) を r/λ_D について展開すると、次のように書ける。

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \lambda_D} + \dots \quad (6.A.17)$$

第 1 項は原点に置かれた電荷 Q 自身が作り出すポテンシャルであり、第 2 項は周りの電荷の集団が作り出すポテンシャルである。第 2 項を取り出すことで、各粒子種が周りから受けるポテンシャル ϕ_i, ϕ_e は、それぞれ次のように表せる。

$$\phi_i = -\frac{Z_i e}{4\pi\epsilon_0 \lambda_D}, \quad \phi_e = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 \lambda_D} \quad (6.A.18)$$

^{†31} 他の節では e を用いている量だが、この節では素電荷との混同を避けるために ε と書く。

これと上で定義した n, χ を用い、 λ_D を具体的に表すことで、 $\varepsilon_{\text{corr}}$ は次のように書ける。

$$\varepsilon_{\text{corr}} = -\frac{ve^3n^{3/2}\chi^{3/2}}{8\pi\epsilon_0^{3/2}(k_B T)^{1/2}} \quad (6.A.19)$$

$$= -\frac{e^3\chi^{3/2}\rho^{1/2}}{8\pi\epsilon_0^{3/2}m_p^{3/2}\mu^{3/2}(k_B T)^{1/2}} \quad (6.A.20)$$

ただし、2 段目では、

$$\rho = \frac{1}{v}, \quad \rho = \mu m_p n \quad (6.A.21)$$

という関係^{†32}を用いて v と n を質量密度 ρ に書き直した。

式 (6.A.15) に従って $\varepsilon_{\text{corr}}$ を積分することで、

$$f_{\text{corr}} = -\frac{e^3\chi^{3/2}\rho^{1/2}}{12\pi\epsilon_0^{3/2}m_p^{3/2}\mu^{3/2}(k_B T)^{1/2}} \quad (6.A.22)$$

を得る。温度が高くなると、個々の粒子はポテンシャルを振り切って自由粒子と同様に運動するようになるため、 $T \rightarrow \infty$ の極限では f は f_{id} に一致する必要がある。よって、上式では積分定数をゼロとした。

熱力学的関係式 (3.A.17) より、圧力は次のように計算できる。

$$p = p_{\text{id}} + \rho^2 \left(\frac{\partial f_{\text{corr}}}{\partial \rho} \right)_T \quad (6.A.23)$$

$$= nk_B T \left[1 - \frac{e^3\chi^{3/2}\rho^{1/2}}{24\pi\epsilon_0^{3/2}m_p^{1/2}\mu^{1/2}(k_B T)^{3/2}} \right] \quad (6.A.24)$$

$$= nk_B T \left[1 - 9.9 \times 10^5 \cdot \frac{\chi^{3/2}}{\mu^{1/2}} \cdot \left(\frac{\rho}{\text{kg m}^{-3}} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{T}{\text{K}} \right)^{-3/2} \right] \quad (6.A.25)$$

例えば 0.95 太陽半径の深さ ($\mu \simeq 0.6, \chi \simeq 1.1, T \simeq 2.7 \times 10^5 \text{ K}, \rho \simeq 2.9 \times 10^{-2} \text{ kg m}^{-3}$) では、圧力の理想気体の場合からのずれは 3% 程度になる。その精度での計算を行う場合には、この補正が必要になる。

6.A.2 電子の縮退

節 6.1.7 で説明したように、温度が低くて密度の高いプラズマでは縮退の効果を考える必要がある。電子の縮退の効果の方が、イオンより先に現れる。本節では、電子が縮退したプラズマの状態方程式について説明する。

^{†32} 本書では、平均分子量 μ は陽子質量 m_p を用いて無次元化したものと定義している。文献によっては原子質量単位 m_u が用いられていることもある。

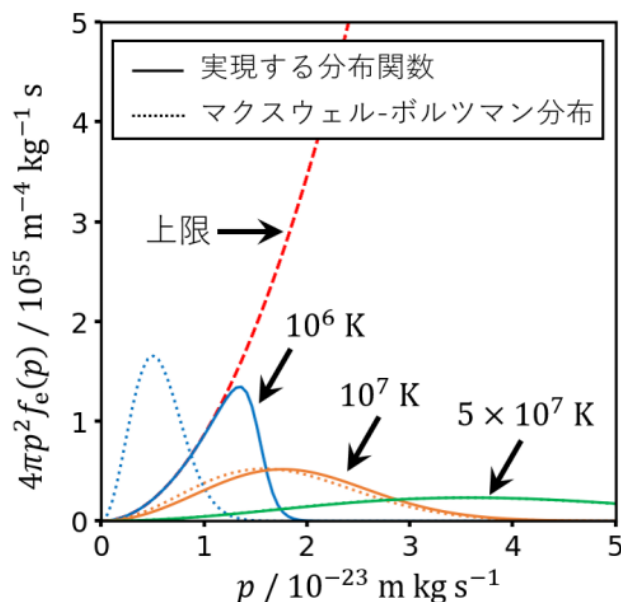


図 6.8 数密度 $n_e = 10^{32} \text{ m}^{-3}$ の場合に実現する分布関数 (実線) とマクスウェル-ボルツマン分布 (点線) : 分布関数の上限値が赤色の破線で示されている。縮退パラメータの値は、 $T = 10^6 \text{ K}, 10^7 \text{ K}, 5 \times 10^7 \text{ K}$ の場合について、それぞれ $\psi = 9.0, -0.19, -2.8$ 。

今は比較的密度の濃いプラズマを対象としているので、電子集団は基本的に節 6.1.1 で説明したマクスウェル-ボルツマン分布

$$4\pi p^2 f_e^0(p) = \frac{4\pi p^2 n_e}{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_e k_B T}\right) \quad (6.A.26)$$

に従うと考えられる。ただし、 p は集団の静止系で見た各粒子の運動量の大きさである。 $f_e^0(p) \cdot 4\pi p^2 dp d^3x$ は運動量の大きさが $p \sim p + dp$ の間にある粒子数を表す。つまり、節 6.1.1 で導入した分布関数 $f_e^0(v)$ とは次の関係にある。

$$f_e^0(p) \cdot 4\pi p^2 dp d^3x = f_e^0(v) \cdot 4\pi v^2 dv d^3x, \quad p = m_e v \quad (6.A.27)$$

電子はフェルミ粒子 (付録 5.B.9 参照) なので、複数の電子が同じ運動状態になれない。これはパウリの排他律と呼ばれる。この帰結として、相空間 $d^3p d^3x$ において特定の体積を占めることのできる電子の数には限度がある。電子はスピンと呼ばれる運動もしており、スピンは 2 つの状態をとり得る。このことも考慮すると、相空間の体積 h^3 内に存在できる電子数の上限は 2 個である。 h はプランク定数である。つまり、電子の分布関数 $f_e(p)$ には次の上限がある。

$$f_e(p) \cdot 4\pi p^2 dp d^3x \leq \frac{8\pi p^2 dp d^3x}{h^3} \quad (6.A.28)$$

図 6.8 に電子の数密度が 10^{32} m^{-3} (\approx 太陽中心での値) の場合のマクスウェル-ボルツマン分布 (点線) と、上式で表される上限値 (赤色の破線) を示した。温度が 10^6 K の場合のマクスウェ

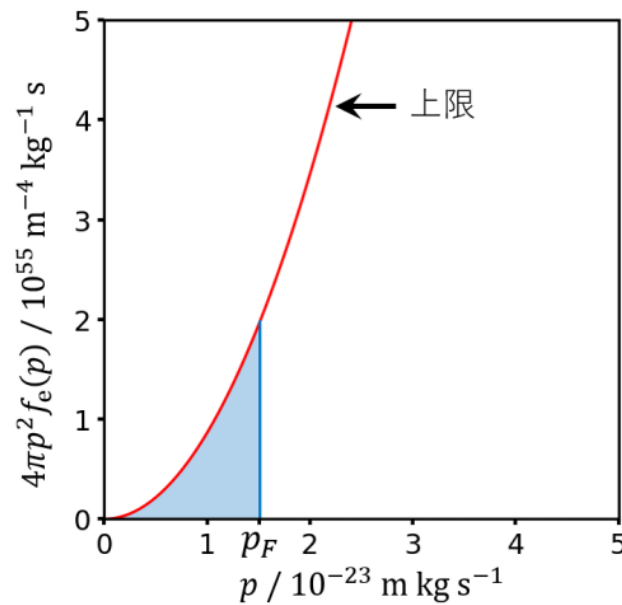


図 6.9 数密度 $n_e = 10^{32} \text{ m}^{-3}$ 、温度 $T = 0$ の場合の電子の分布関数 (青色で塗りつぶした範囲)

ル-ボルツマン分布は、上限値を大きく上回っていることが分かる。このプラズマが仮に 10^6 K にあった場合、実際の分布関数は上限値を上回らないように大きく歪み、マクスウェル-ボルツマンとは違う形になる。その様子を図に実線で示した。この状態を縮退と言う。実際の太陽中心部の温度は 10^7 K 程度の温度である。図を見ると、そのような場合のマクスウェル-ボルツマン分布は上限値を大きく上回っているわけではないが、それでも上限の影響を受けて、真のマクスウェル-ボルツマン分布から少し歪んだ形の分布関数が実現する。これを部分縮退と言う。この微小な歪みによる効果を状態方程式にどう取り入れるかを説明することがこの節の目標である。

なお、この節では非相対論的な場合、つまり系内の全粒子が光速に比べて十分に遅い速さで運動している場合を考える。これは $T \ll 10^9 \text{ K}$ かつ $n_e \ll 10^{35} \text{ m}^{-3}$ の場合に相当する。例えば太陽中心部はこの条件を満たす。相対論的な場合を含む議論については例えば Kippenhahn et al. (2012) の Chapter 15 や Rezzolla & Zanotti (2013) の Chapter 2 を読んで欲しい。

完全縮退の場合

まずは電子集団の温度がゼロである場合を考える。この場合、電子は運動量の小さい状態から順に、上限の許す限り敷き詰められた分布をする (図 6.9 参照)。系内の電子が持ついちばん大きな運動量 p_F はフェルミ運動量と呼ばれる。或いは、 $E_F = p_F^2 / (2m_e)$ はフェルミエネルギー

と呼ばれる。 p_F は次の関係より決定される。

$$\int_0^{p_F} \frac{8\pi p^2}{h^3} dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 = n_e \quad (6.A.29)$$

$$\rightarrow p_F = \left(\frac{3h^3 n_e}{8\pi} \right)^{1/3} \quad (6.A.30)$$

温度がゼロである場合も、電子は p_F 以下の有限の運動量を持ち得る。

節 6.2.3 で説明しているが、運動論において圧力 p_e とは、実現している分布関数 $f_e(p)$ を用いて次のように計算される量である。

$$p_e = \frac{1}{3} \int \frac{p^2}{m_e} f_e(p) d^3p \quad (6.A.31)$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{m_e} \frac{8\pi p^2}{h^3} dp \quad (6.A.32)$$

$$= \frac{8\pi p_F^5}{15h^3 m_e} \quad (6.A.33)$$

$$= \frac{3^{5/3} h^2}{60\pi^{2/3} m_e} n_e^{5/3} = 2.3 \times 10^{-38} \text{ Pa} \cdot \left(\frac{n_e}{\text{m}^{-3}} \right)^{5/3} \quad (6.A.34)$$

一方で、単位体積あたりの内部エネルギー \mathcal{E} は各粒子が持つ運動エネルギーの合計値であり、節 6.2.4 と同様にして次のように計算される。

$$\mathcal{E} = \int \frac{p^2}{2m_e} f_e(p) d^3p \quad (6.A.35)$$

$$= \frac{3}{2} p_e \quad (6.A.36)$$

このように、温度がゼロであっても、電子集団は有限の圧力と内部エネルギーを持つ。

部分縮退の場合

プラズマが有限の温度を持つ場合、全ての電子が運動量の小さい順に敷き詰められているわけではない。しかし、分布関数が上限を上回ってはいけないため、マクスウェル-ボルツマン分布からは歪んだ形をする。これは部分縮退 (partial degeneracy) と呼ばれる。一定の数密度のプラズマを考える場合、温度が高くなる程縮退は解け、分布関数はマクスウェル-ボルツマン分布の形に近づく。

1 つの運動状態を占める粒子数の期待値は平均占有率と呼ばれる。電子のようなフェルミ粒子の場合、付録 3.B.7 で説明しているように、平均占有率は 0 と 1 の間の値を持ち、フェルミ-ディラック分布に従う。電子の分布関数は上限値に平均占有率を乗じることで、次のように書ける。

$$4\pi p^2 f_e(p) = \frac{8\pi p^2}{h^3} \frac{1}{1 + \exp[p^2/(2m_e k_B T) - \psi]} \quad (6.A.37)$$

ψ は付録 3.B.7 での化学ポテンシャルに相当する量であり、今の文脈では縮退パラメータ (degeneracy parameter) と呼ばれる。後に説明するが、 ψ の値は電子の数密度と温度が与えられれば決定される。 ψ は縮退がどれだけ強いかの指標である。 $\psi \rightarrow \infty$ の極限が前節で説明した完全に縮退している場合に相当する。逆に、 $\psi \rightarrow -\infty$ の極限が縮退していない場合に相当し、そのときの式はマクスウェル-ボルツマン分布に一致する。

ψ の値の決定方法について説明する。分布関数 (6.A.37) を運動量空間全体に渡って積分すると、 n_e に一致するのだった。

$$n_e = \int_0^\infty 4\pi p^2 f_e(p) dp \tag{6.A.38}$$

$$= \frac{4\pi(2m_e)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{E^{1/2}}{1 + \exp[E/(k_B T) - \psi]} dE \tag{6.A.39}$$

2 段目では、 $E = p^2/(2m_e)$, $m_e dE = p dp$ を用いて積分変数をエネルギー E に変換した。次の積分はフェルミ-ディラック積分と呼ばれる。

$$F_\nu(\psi) = \int_0^\infty \frac{u^\nu}{1 + \exp(u - \psi)} du \tag{6.A.40}$$

この表式を用いると、式 (6.A.39) は次のように書き換えられる。

$$n_e = \frac{4\pi(2m_e k_B T)^{3/2}}{h^3} F_{1/2}(\psi) \tag{6.A.41}$$

n_e と T が与えられれば、上式を ψ についての方程式と見て解くことで、 ψ を決定できる。図 6.8 に実線で示した分布関数は、この方法で求めた ψ を用いて式 (6.A.37) をプロットしたものである。各温度における ψ の値は図の見出しに記した。参考として、表 6.4 にフェルミ-ディラック積分の値を載せる。

$\psi \gg 1$ の場合は $F_{1/2}(\psi) \simeq 2\psi^{3/2}/3$ と近似できる。これを式 (6.A.41) に代入して、フェルミエネルギー E_F を用いて書き換えると、

$$\psi \simeq \frac{E_F}{k_B T} \tag{6.A.42}$$

を得る。温度ゼロの極限では、 $\psi \rightarrow \infty$ となる。このとき、平均占有率は次のようになる。ただし、 $E = p^2/(2m_e)$ である。

$$\frac{1}{1 + \exp[E/(k_B T) - \psi]} \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \exp[\psi(E/E_F - 1)]} \begin{cases} 1 & (E < E_F \text{ のとき}) \\ 0 & (E > E_F \text{ のとき}) \end{cases} \tag{6.A.43}$$

つまり、平均占有率はステップ関数に漸近し、閾値 E_F 以下のエネルギーの状態にはびっしりと電子が敷き詰められた分布を表す。これは前節の議論に他ならない。

逆に、 $\psi \rightarrow -\infty$ の場合は、フェルミ-ディラック積分は次のように近似できる。

$$F_\nu(\psi) = \int_0^\infty \frac{u^\nu}{1 + \exp(u - \psi)} du \simeq \exp(\psi) \int_0^\infty u^\nu \exp(-u) du \tag{6.A.44}$$

表 6.4 フェルミ-ディラック積分の値

ψ	$F_{1/2}(\psi)$	$F_{3/2}(\psi)$	ψ	$F_{1/2}(\psi)$	$F_{3/2}(\psi)$	ψ	$F_{1/2}(\psi)$	$F_{3/2}(\psi)$
-5.0	0.00596	0.00895	3.5	4.83707	13.65420	12.0	27.95178	208.06196
-4.5	0.00981	0.01474	4.0	5.77073	17.62770	12.5	29.69679	229.67792
-4.0	0.01613	0.02427	4.5	6.77257	22.32733	13.0	31.47746	252.61606
-3.5	0.02648	0.03993	5.0	7.83798	27.80245	13.5	33.29308	276.90285
-3.0	0.04337	0.06561	5.5	8.96300	34.09920	14.0	35.14297	302.56425
-2.5	0.07072	0.10758	6.0	10.14428	41.26100	14.5	37.02649	329.62572
-2.0	0.11459	0.17580	6.5	11.37899	49.32897	15.0	38.94305	358.11225
-1.5	0.18380	0.28577	7.0	12.66464	58.34222	15.5	40.89206	388.04840
-1.0	0.29050	0.46085	7.5	13.99910	68.33813	16.0	42.87300	419.45832
-0.5	0.44979	0.73466	8.0	15.38049	79.35259	16.5	44.88535	452.36576
0.0	0.67809	1.15280	8.5	16.80714	91.42017	17.0	46.92862	486.79409
0.5	0.99021	1.77279	9.0	18.27756	104.57424	17.5	49.00235	522.76631
1.0	1.39638	2.66168	9.5	19.79041	118.84712	18.0	51.10608	560.30511
1.5	1.90083	3.89198	10.0	21.34447	134.27016	18.5	53.23939	599.43282
2.0	2.50246	5.53725	10.5	22.93862	150.87385	19.0	55.40187	640.17149
2.5	3.19660	7.66880	11.0	24.57185	168.68786	19.5	57.59313	682.54283
3.0	3.97699	10.35371	11.5	26.24319	187.74115	20.0	59.81280	726.56828

つまり、 $F_{1/2}(\psi) \simeq \sqrt{\pi} \exp(\psi)/2$ と近似できる。これと式 (6.A.41) より、

$$\exp(\psi) \simeq \frac{h^3 n_e}{2(2\pi m_e k_B T)^{3/2}} \tag{6.A.45}$$

を得る。よって、分布関数は式 (6.A.37) より、

$$f_e(p) = \frac{2}{h^3} \frac{1}{1 + \exp[p^2/(2m_e k_B T) - \psi]} \tag{6.A.46}$$

$$\simeq \frac{2}{h^3} \exp(\psi) \exp\left(-\frac{p^2}{2m_e k_B T}\right) \tag{6.A.47}$$

$$\simeq \frac{n_e}{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_e k_B T}\right) \tag{6.A.48}$$

と近似でき、マクスウェル-ボルツマン分布に一致することが分かる。 ψ は $n_e/T^{3/2}$ についての単調増加関数であるため、この極限は数密度が低く、温度が高い場合に相当する。この場合は縮退の影響を無視でき、電子集団は理想気体と捉えられる。

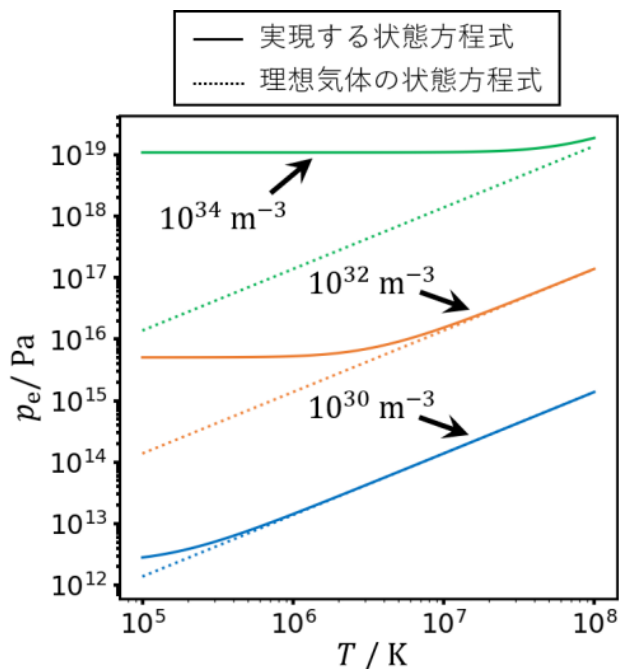


図 6.10 数密度 $n_e = 10^{30} \text{ m}^{-3}, 10^{32} \text{ m}^{-3}, 10^{34} \text{ m}^{-3}$ の場合についての実現する状態方程式 (実線) と理想気体の状態方程式 (点線)

求まった ψ を用いれば、電子の圧力は次のように計算できる。

$$p_e = \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{p^2}{m_e} \cdot 4\pi p^2 f_e(p) dp \tag{6.A.49}$$

$$= \frac{8\pi(2m_e)^{3/2}}{3h^3} \int_0^\infty \frac{E^{3/2}}{1 + \exp[E/(k_B T) - \psi]} dE \tag{6.A.50}$$

$$= \frac{8\pi(2m_e)^{3/2}(k_B T)^{5/2}}{3h^3} F_{3/2}(\psi) \tag{6.A.51}$$

$\psi \rightarrow -\infty$ の極限では、式 (6.A.44) より $F_{3/2}(\psi) \simeq 3\sqrt{\pi} \exp(\psi)/4$ と近似できる。これと式 (6.A.45) を上式に代入すれば、

$$p_e \simeq n_e k_B T \tag{6.A.52}$$

となることが確認できる。図 6.10 に各数密度 n_e に対する $p - T$ 図をプロットした。参考として、理想気体の状態方程式も点線でプロットしてある。数密度が一定の状況では、温度が高くなると理想気体の状態方程式に漸近することが分かる。逆に、温度が低くなると理想気体の場合より圧力が高くなり、温度に依存せず一定値をとるようになる。この状況における圧力は縮退圧と呼ばれる。

付録 6.B 中性粒子の衝突

長距離のクーロン相互作用が働かない中性粒子との衝突過程について説明する。

6.B.1 ボルツマンの衝突項

節 6.2.2 では、クーロン散乱について、小角散乱の効果のみを考慮した形式の衝突項を考えた。ここでは、より一般の 2 体弾性衝突を想定した衝突項の形を考える。この節は Huang (1987) を参考にしている。衝突項は次のように書けるはずである。

$$C_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{s'} [\bar{R}_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - R_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)] \quad (6.B.1)$$

ただし、 $R_{ss'}$, $\bar{R}_{ss'}$ はそれぞれ次のような量である。

- $R_{ss'} \delta t d^3x d^3v$: 注目する点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) を含む体積要素 $d^3x d^3v$ 内に衝突前の粒子種 s が属するような衝突が、時刻 t から $t + \delta t$ の間に起こる数。
- $\bar{R}_{ss'} \delta t d^3x d^3v$: 注目する点 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) を含む体積要素 $d^3x d^3v$ 内に衝突後の粒子種 s が属するような衝突が、時刻 t から $t + \delta t$ の間に起こる数。

衝突相手の粒子種 s' について和をとっている。よって以下では、特定の粒子種 s' との衝突に注目して $R_{ss'}$ の具体的な形を求めることに専念する。

衝突前の粒子 s, s' の速度をそれぞれ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 、衝突後の速度を $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ とする。すると、運動量とエネルギーの保存則より

$$m_s \mathbf{v}_1 + m_{s'} \mathbf{v}_2 = m_s \mathbf{v}'_1 + m_{s'} \mathbf{v}'_2 \quad (6.B.2)$$

$$\frac{1}{2} m_s v_1^2 + \frac{1}{2} m_{s'} v_2^2 = \frac{1}{2} m_s v'^2_1 + \frac{1}{2} m_{s'} v'^2_2 \quad (6.B.3)$$

が成り立つ。1 つの衝突について、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ と衝突後の \mathbf{v}'_1 の向き $\Omega = (\theta, \phi)$ が分かれば、残りの 4 変数 $|\mathbf{v}'_1|, \mathbf{v}'_2$ は上記の運動量・エネルギー保存則の 4 式より決まる。 $R_{ss'}$ の考え方の流れは次の通りである。

1. 実空間の体積要素 d^3x 内で時刻 t から $t + \delta t$ の間に、初めに d^3v_1 内にいた粒子 s と d^3v_2 内にいた粒子 s' が相互作用し、粒子 s の軌道が立体角 Ω を含む $d\Omega$ 内の方向に曲げられるような衝突の数 $dR_{12 \rightarrow \Omega} \delta t$ を求める。
2. $dR_{12 \rightarrow \Omega} \delta t$ を d^3v_2 と $d\Omega$ について積分したものが $R_{ss'} \delta t d^3x d^3v_1$ である。

$dR_{12 \rightarrow \Omega} \delta t$ は更に次のように書ける。

$$dR_{12 \rightarrow \Omega} \delta t = dN_{12} dP_{12 \rightarrow \Omega} \delta t \quad (6.B.4)$$

dN_{12} は速度 \mathbf{v}_1 の粒子 s と \mathbf{v}_2 の粒子 s' の単位時間あたりの衝突数であり、2 粒子相関関数 $F_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t)$ を導入することで、

$$dN_{12} = F_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) d^3x d^3v_1 d^3v_2 \quad (6.B.5)$$

と書ける。 $dP_{12 \rightarrow \Omega}$ は初めに速度 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ を持っていた 2 粒子が衝突をした結果、粒子 s の軌道が Ω を含む $d\Omega$ の方向へ曲げられる確率であり、粒子種 s と s' の衝突微分断面積 $d\sigma_{ss'}/d\Omega$ を用いて次のように書ける。

$$dP_{12 \rightarrow \Omega} = \frac{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}{d^3x} \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega} d\Omega \quad (6.B.6)$$

以上の議論をまとめると、次のことが言える。

$$R_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) = \int d^3v_2 \int_{4\pi} d\Omega |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \Omega) F_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) \quad (6.B.7)$$

次に $\bar{R}_{ss'}$ を考える。2 体衝突では一般に次のような対称性がある。

- それぞれ速度 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ を持った 2 粒子が衝突して速度が $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ に変わる確率は、速度 $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ を持った 2 粒子が衝突して速度 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ に変わる確率と等しい。

この対称性は、2 体衝突過程が時間の反転 ($t \rightarrow -t$)、空間回転、空間反転について対称であることを組み合わせると得られる。このことと衝突前後で 2 粒子の相対速度が変わらないこと

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2| \quad (6.B.8)$$

より、式 (6.B.7) の微分断面積と同じ関数を用いて、

$$\bar{R}_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t) = \int d^3v'_2 \int_{4\pi} d\Omega |\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2| \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega}(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \Omega) F_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) \quad (6.B.9)$$

と書くことができる。この場合は、衝突後の粒子 s' の速度 $d^3v'_2$ と衝突前の粒子 s の軌道方向 $d\Omega$ で積分していることになる。式 (6.B.7) と、式 (6.B.9) で変数 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ と $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ の表記を入れ替えたものを式 (6.B.1) に代入することで、衝突項は次のように表される。

$$C_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) = \sum_{s'} \int d^3v_2 \int_{4\pi} d\Omega |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \Omega) \cdot [F_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, t) - F_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t)] \quad (6.B.10)$$

ただし、 $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ は $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ と式 (6.B.2), (6.B.3) の関係で結ばれる変数であり、 Ω は \mathbf{v}'_1 の方向を表す 2 変数である。

微分断面積は付録 5.B.13 にまとめたような方法で考えることができる^{†33}。更に、未知の関数 $F_{ss'}$ と分布関数の間に次の関係を仮定することで、方程式系を閉じることができる。

$$F_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) f_{s'}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, t) \quad (6.B.11)$$

^{†33} ただし、付録 5.B.13 では 2 粒子の相対運動量の曲がり角を Ω とした微分断面積を考えていることに注意が必要である。

これは 2 粒子の速度や位置に相関がないため、衝突回数は単に衝突に関わる 2 粒子の数の積に比例することを言っている^{†34}。これは分子的混沌 (molecular chaos) の仮定と呼ばれる。この仮定を取り入れると、衝突項は次のようになる。

$$C_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) = \sum_{s'} \int d^3v_2 \int_{4\pi} d\Omega |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \Omega) (f_{s,1'} f_{s',2'} - f_{s,1} f_{s',2}) \quad (6.B.12)$$

$$\text{ただし, } f_{s,1} = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) \quad (6.B.13)$$

$$f_{s',2} = f_{s'}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, t) \quad (6.B.14)$$

$$f_{s,1'} = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t) \quad (6.B.15)$$

$$f_{s',2'} = f_{s'}(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_2, t) \quad (6.B.16)$$

6.B.2 マクスウェル-ボルツマン分布との衝突

6.B.3 中性粒子との間の摩擦力

中性粒子と別の粒子種の集団間に平均速度差があった場合に働く摩擦力 $\mathbf{R}_{ss'}$ を見積もる。この節の議論は Braginskii (1965) によるものである。 $\mathbf{R}_{ss'}$ は衝突項を用いて次のように定義されるのだった。

$$\mathbf{R}_{ss'} = \int m_s \mathbf{v} C_{ss'}[f_s^0, f_{s'}^0] d^3v \quad (6.B.17)$$

両粒子種は温度の等しいマクスウェル-ボルツマン分布にあるとする。また、上式における \mathbf{v}_1 は粒子種 s の集団の静止系で見た速度を表すものとする。つまり、粒子種 s の平均速度はゼロであり、粒子種 s' の平均速度が 2 粒子種間の平均速度差 $-\mathbf{u} = \mathbf{u}_s - \mathbf{u}_{s'}$ に相当する。この平均速度差は小さいとして、粒子種 s' のマクスウェル-ボルツマン分布 $f_{s'}^0$ を \mathbf{u} で展開して 1 次の項まで残すと、平均速度がゼロのマクスウェル-ボルツマン分布を $f_{s'}^{00}$ として次のように書ける。

$$f_{s'}^0 = f_{s'}^{00} - \frac{m_{s'} \mathbf{u} \mathbf{v}_2}{k_B T} f_{s'}^{00} \quad (6.B.18)$$

^{†34} 因みに、熱平衡からそれほど離れていない系で量子統計性も考慮する場合、 $F_{ss'}$ は次のように表される。

$$F_{ss'}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, t) = f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) f_{s'}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_2, t) [1 \pm h^3 f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t)/g_s] [1 \pm h^3 f_{s'}(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_2, t)/g_{s'}]$$

h はプランク定数、 g_s は各粒子種の内部自由度である。複号について、関係する粒子がボース粒子の場合は $[1 + h^3 f_s/g_s]$ とし、“Bose enhancement factor” と呼ばれる。フェルミ粒子の場合は $[1 - h^3 f_s/g_s]$ とし、“Pauli blocking factor” と呼ばれる。それぞれ、反応後の粒子に関する分布関数を用いた因子であり、次の効果を表す。節 5.3.1 で、光子の放射過程には自発放射に加えて、放射強度に比例する誘導放射もあることを述べた。一般的に、反応後にボース粒子が生成される場合は、他に粒子が存在しない状況での反応率に加えて、反応後の粒子種の分布関数に比例した反応率も考慮せねばならない。逆に、反応後にフェルミ粒子が生成される場合は、部分縮退 (パウリの排他律) に起因して、反応率が抑えられる。実際に、完全縮退している場合は $f_s = g_s/h^3$ である (付録 6.A.2) が、この場合、この因子はゼロになり、反応が全く起きない。これらの因子は、希薄な系を考える際には無視できるが、初期宇宙の高密度系を考える際に用いられることがある (e.g. Dodelson & Schmidt, 2020; Laine & Vuorinen, 2016)。

これを式 (6.B.17) に代入すると、上式の第 2 項の寄与だけが残るため、

$$R_{ss',i} = -\frac{m_s m_{s'}}{k_B T} u_j \int v_i C_{ss'} [f_s^0, f_{s'}^{00} v_{2,j}] d^3 v \quad (6.B.19)$$

となる。ここで、 $C_{ss'} [f_s^0, f_{s'}^{00} v_{2,j}]$ は全体として \mathbf{v} に依存するベクトルであり、他にベクトルのパラメータを含まないので、適当なスカラー関数 $A(v)$ を用いて

$$C_{ss'} [f_s^0, f_{s'}^{00} v_{2,j}] = v_j A(v) \quad (6.B.20)$$

と書ける。つまり、式 (6.B.19) の積分は

$$I_{ij} = \int v_i v_j A(v) d^3 v \quad (6.B.21)$$

という 2 階等方テンソルになる。このテンソルのトレースは

$$I = \int v^2 A(v) d^3 v \quad (6.B.22)$$

であり、トレースを用いると $I_{ij} = I \delta_{ij} / 3$ と書けることを用いると、摩擦力は次のようになる。

$$R_{ss',i} = -\frac{m_s m_{s'}}{3k_B T} u_i \int v_j C_{ss'} [f_s^0, f_{s'}^{00} v_{2,j}] d^3 v \quad (6.B.23)$$

$C_{ss'}$ の表式に式 (6.B.12) を用い、マクスウェル-ボルツマン分布の性質

$$f_{s,1}^0 f_{s',2}^{00} = f_{s,1}^0 f_{s',2}^{00} \quad (6.B.24)$$

も用いて変形すると、 $R_{ss'}$ は更に次のように書き換えられる。

$$\mathbf{R}_{ss'} = -\frac{m_s m_{s'}}{3k_B T} \mathbf{u} \int d^3 v_1 \int d^3 v_2 \int d\Omega \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega} f_{s,1}^0 f_{s',2}^{00} [\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2)] |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \quad (6.B.25)$$

重心の速度 \mathbf{v}_c と速度差 \mathbf{v}_r を

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_c + \frac{m_{s'}}{m_s + m_{s'}} \mathbf{v}_r, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_c - \frac{m_s}{m_s + m_{s'}} \mathbf{v}_r \quad (6.B.26)$$

と導入すると、 $f_{s,1}^0 f_{s',2}^{00}$ は新たな関数 f_c, f_r を用いて次のように表せる。

$$f_{s,1}^0 f_{s',2}^{00} = n_s n_{s'} f_c f_r \quad (6.B.27)$$

$$\text{ただし, } f_c = \left(\frac{m_s + m_{s'}}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{(m_s + m_{s'}) v_c^2}{2k_B T} \right] \quad (6.B.28)$$

$$f_r = \left(\frac{\mu_{ss'}}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{\mu_{ss'} v_r^2}{2k_B T} \right] \quad (6.B.29)$$

$\mu = m_s m_{s'} / (m_s + m_{s'})$ は換算質量である。更に、 $d^3 v_1 d^3 v_2 = d^3 v_c d^3 v_r$ という関係も分かるので、 $\mathbf{R}_{ss'}$ は次のように計算できる。

$$\mathbf{R}_{ss'} = -\frac{n_s n_{s'} m_s^2 m_{s'}}{3(m_s + m_{s'}) k_B T} \mathbf{u} \int d^3 v_r \int d^3 v_c \int d\Omega \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega} f_c f_r \cdot \left[\left(\mathbf{v}_c + \frac{m_{s'}}{m_s + m_{s'}} \mathbf{v}_r \right) \cdot (\mathbf{v}_r - \mathbf{v}'_r) \right] v_r \quad (6.B.30)$$

散乱角は $\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}'_r = v_r^2 \cos \theta$ を満たすような θ であることを思い出して $d^3 v_c$ についての積分を実行すると、 $\mathbf{R}_{ss'}$ は次のようになる。

$$\mathbf{R}_{ss'} = -\frac{4\pi n_s n_{s'} \mu_{ss'}^2}{3k_B T} \mathbf{u} \int v_r^5 \sigma_{ss'}^m(v_r) f_r dv_r \quad (6.B.31)$$

$$\text{ただし, } \sigma_{ss'}^m(v_r) = \int_{4\pi} (1 - \cos \theta) \frac{d\sigma_{ss'}}{d\Omega} d\Omega \quad (6.B.32)$$

特に $\sigma_{ss'}^m$ が v_r に依らないとみなせる場合は、

$$\mathbf{R}_{ss'} = -\frac{4}{3} n_s n_{s'} \mu_{ss'} \sigma_{ss'}^m \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi \mu_{ss'}}} \quad (6.B.33)$$

と書ける。

7

相対論

前章までは非相対論的な磁気流体を対象としてきた。非相対論的な磁気流体とは、次の全ての条件を満たすような磁気流体のことである。

- 流速 v が光速 c に比べて十分に遅い。

$$\frac{|v|}{c} \ll 1 \quad (7.0.1)$$

- 内部エネルギー ρe 、圧力 p 、磁気エネルギー $B^2/(2\mu_0)$ がどれも静止エネルギー ρc^2 に比べて十分に小さい。

$$\rho e, p, \frac{B^2}{2\mu_0} \ll \rho c^2 \quad (7.0.2)$$

- 重力場 (重力ポテンシャル ϕ_g) が十分に弱くてほとんど時間変化しない。

$$\frac{\phi_g}{c^2} \ll 1, \quad \frac{\partial \phi_g}{\partial t} \simeq 0 \quad (7.0.3)$$

これらの条件を1つでも満たさない場合は、相対論的 MHD が必要となる。本章では、相対論とは何か、相対論を使わなければならない状況とは何かを把握することを目標に、相対論の基本事項の説明から相対論的 MHD や放射輸送の基礎方程式までを説明し、それらの方程式を前章までで説明した形式と比較する。

ある観測系における物理法則と、別の観測系における物理法則は形が変わらないはずであるという原理をつきつめた結果構築された理論が相対論である。ニュートンの運動法則はガリレイ変換 (節 2.3 参照) と呼ばれる変換の下で共変^{†1}である。一方で電磁気学の法則 (マクスウェル方程式) はローレンツ変換の下で共変である。慣性系^{†2}から慣性系への座標変換を正しく記述す

^{†1} ある座標変換の前と後で方程式の形が変わらないとき、その方程式はこの座標変換の下で共変であると表現する。

^{†2} 慣性系とは、外力が働いていない物体が静止し続けるか等速直線運動をするような座標系である。重力を忘れて特殊相対論の範疇で議論する場合には「加速度を持たない座標系」すなわち慣性力が働かない座標系のことである。一般相対論的には重力は外力ではなく時空の幾何学的な歪みなので、この意味では慣性系は重力以外の力が働いていない物体が等速直線運動をする座標系のことであり、つまり「重力に対して自由落下するような加速度を持った座標系」が慣性系にあたる。重力は一般に時空間的に変化するので、このような慣性系は時空間中の局所的にしか考えられない。このような、ニュートン力学における慣性系と一般相対論における慣性系の定義の違い (重力を外力と捉えるかもはや力と捉えないかの違い) は混乱を招きかねないので注意を要する。

るのはガリレイ変換か、ローレンツ変換か、或いは物理法則は特殊な座標系においてのみ正しく表現されうるものであり共変性を考えることがそもそも間違いであるのか、という問題がその昔議論された。その中で特殊相対論が構築され、ローレンツ変換に対して共変な運動法則が得られた。この枠組みの下では、光速より十分に遅い場合の近似としてニュートン力学の諸法則が得られる。特殊相対論では重力を表現できないという問題が残ったが、その後、一般相対論の確立によって重力は幾何学的な「時空の歪み」として表現された。現在ではこれらの相対論が正しいことを裏付ける実験・観測結果は多数存在し、天体物理学における基本道具のひとつになっている。

粒子 1 つ 1 つの運動を微視的に考える際は重力の影響は無視できる。また、一般相対論によると、重力がある場合でもその重力によって「自由落下する観測系」(局所慣性系)で考えることによって、ある時刻ある点の周りにおいてはまるで重力がないかのように考えることができる。この意味で特殊相対論は一般相対論を考える場合においても基礎となる理論である。

本章では一般相対論の基本的な考え方を説明(節 7.1 から節 7.6)した後、特殊相対論、つまり慣性系(ローレンツ系)において特に成立する概念を説明する(節 7.7)。その後、相対論的 MHD の定式化(節 7.8)や放射輸送(節 7.9)について説明する。ニュートン力学から特殊相対論へ、読者が日常感覚的に受け入れやすい形で導入されるような説明や、一般相対論の数学的にきちんとした説明^{†3}については他書を読んでいただくことにして、本書では相対論そのものの考え方を簡単にまとめることに努めた。

本章は全体として須藤靖(2005)、Rezzolla & Zanotti(2013)を参考にした。また電磁場に関する部分は Antón et al.(2006)、dos Santos(2016)も参考にした。相対論的な MHD や放射輸送については、他に Kato & Fukue(2020)が詳しい。日本語の教科書には小嶋康史 et al.(2019)がある。

7.1 相対論の基本的な考え方

運動を考える舞台である時空間と、時空間において考えることになる物理量について、その記述方法と基本的な性質を説明する。

7.1.1 4次元時空の座標表示

例えばある質点がある時刻に 3次元空間中のある点に位置しているという事象は、4次元時空間における点として表される。これを世界点と言う。この質点の運動は世界点を繋げることに

^{†3} 一般相対論は時空間を可微分多様体とみなす理論である。その数学的基礎は微分幾何という分野にまとめられる。理論物理学のための微分幾何の教科書としては、平易なものに佐古彰史(2021)、整然としたものに中原幹夫(2003)がある。

よってできる 4 次元時空間中の曲線として表される。これを世界線と言う。物理量はこの時空間のスカラー、4 元ベクトル、 4×4 テンソル、またはもっと高階のテンソルとして記述される。「実験室に固定されたデカルト座標で考える」「ブラックホールと共に動く球対称の座標で考える」などといった座標系を設定することは、時空間に 4 つの変数からなる座標 $(x^\mu; \mu = 0, 1, 2, 3)$ を設定することに対応する。一般には歪な形をした座標系 x^μ を設定し、この座標系を基準にして時空間を記述することになると、世界点 \mathcal{P} は適当な座標 x^μ で、世界線 \mathcal{C} は適当なパラメータ λ と 4 つの関数 $C^\mu(\lambda)$ を用いて

$$x^\mu = C^\mu(\lambda) \quad (7.1.1)$$

と表現できる。各世界点でのこの座標系の基底を $\{\mathbf{e}_\mu(\mathcal{P}); \mu = 0, 1, 2, 3\}$ と書くと^{†4}、ベクトル \mathbf{V} やテンソル \mathbf{T} は

$$\mathbf{V} = V^\mu \mathbf{e}_\mu, \quad \mathbf{T} = T^{\mu\nu} \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu \quad (7.1.2)$$

などと成分表示できる。ただし、ギリシャ文字の添え字は 0, 1, 2, 3 の 4 つの値を走り、同じ文字を使った上付き添え字と下付き添え字が現れたら総和記号 $\sum_{\mu=0}^3$ を省略したものを意味する。このように同じ添え字の総和をとることを縮約をとると表現する。相対論の場合は、後に説明するように上付き添え字と下付き添え字の違いに意味があり、上付き添え字で表現された成分は特に反変成分と呼ばれる。この記法はアインシュタインの縮約記法と呼ばれる。一方で i, j のようなラテン文字を添え字に使用した場合は、1, 2, 3 の 3 つの値を走るという約束で記述することにする。

時空間では内積なるものを考えることができる。これは時空間内で無限小離れた 2 つの世界点の間の距離というものを考えられることに対応する。同じ世界点での基底同士の内積を

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu \quad (7.1.3)$$

と書く。この $g_{\mu\nu}(\mathcal{P})$ は計量テンソルと呼ばれる。無限小離れた 2 点間の距離 ds は、座標 x^μ の差分 dx^μ と計量を用いて

$$ds^2 = (dx^\mu \mathbf{e}_\mu) \cdot (dx^\nu \mathbf{e}_\nu) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (7.1.4)$$

と書ける。また、任意のベクトル同士の内積は成分表示で

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = g_{\mu\nu} U^\mu V^\nu \quad (7.1.5)$$

と書ける。

^{†4} 一般の座標系において基底の向きは世界点ごとに異なるので \mathcal{P} という引数を付けた。

7.1.2 座標変換

ベクトルやテンソルは時空間において座標系 x^μ を設定すれば成分表示して考えられることを述べたが、別の座標系 $x^{\mu'}$ ^{†5} を用いてもまた、成分表示することができる。考えていた成分をこの新しい座標系における成分に変換したい場合を考える。

ベクトルの変換の前に、各世界点で定義されるスカラー $\phi(P)$ について説明する。古い座標系で x^μ と表される世界点 P が新しい座標系では $x^{\mu'}$ という座標で表されるとき、スカラーは

$$\phi'(x^{\mu'}) = \phi(x^\mu) \quad (7.1.6)$$

と変換する。つまり、同じ世界点を考える限りどの座標系で考えようが値は不変である。前述の ds もスカラーのひとつである。

次にベクトルの成分の変換を考える。新旧の座標間の関係式から $4^2 = 16$ 個の偏微分 $\partial x^\mu / \partial x^{\mu'}$ が求めれば、この 2 つの座標系の基底は、各世界点において

$$e_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} e_\mu \quad (7.1.7)$$

という関係で結ばれる。これは基底の定義に近い関係である^{†6}。つまり、ベクトルは各世界点において

$$V = V^\mu e_\mu = V^\mu \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} e_{\mu'} \quad (7.1.8)$$

と書け、右辺が座標系 $x^{\mu'}$ での成分表示に他ならない。反変成分は

$$V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} V^\mu \quad (7.1.9)$$

と変換する。このように変換する反変成分に双対する概念として、共変成分 V_μ を考えることができる。共変成分は反変成分の場合の変換の逆変換によって次のように座標変換される。

$$V_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V_\mu \quad (7.1.10)$$

これは基底と同じ変換則に従うとも言える。反変成分と共変成分は計量との縮約をとることで、

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu \quad (7.1.11)$$

^{†5} 別の座標系であることを示すためにプライム (') を用いるが、普通は x などの量を表す文字本体ではなく添え字にプライムを付けて記述する。縮約を考える際に、 μ と μ' は違う添え字と考えなければならないことに注意して欲しい。

^{†6} 基底の定義を求めると話がややこしくなり、見通しが悪くなると感じたので本書では省く。上記の変換則や本節で説明してある数々の関係が満たされるよう巧みに定義されている。詳しくは一般相対論や微分幾何の本を読んで欲しい。付録 1.B ではデカルト座標の基底と回転変換で結ばれる基底を極座標や円筒座標の基底として考えた。本章で考えている相対論における基底は回転変換ではなく、上記のような変換性を持つ量であり、一般に単位ベクトルから構成されるとは限らないことに注意されたい。

と結ばれる。また、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の逆行列^{†7}を $g^{\mu\nu}$ と書くと、

$$V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu \quad (7.1.12)$$

とも書ける。

テンソルについても計量や計量の逆行列との縮約をとることで、例えば

$$g_{\mu\beta} T^{\alpha\beta\gamma} = T^\alpha{}_{\mu}{}^\gamma, \quad g^{\mu\gamma} T_{\alpha\beta\gamma} = T_{\alpha\beta}{}^\mu \quad (7.1.13)$$

というように添え字の上げ下げを行える。一般には添え字の左右にも意味があるので、順番を勝手に変えてはならない。例えばテンソル $T^{\mu_1\mu_2}{}_{\nu_1\nu_2}$ についての座標変換法則は、各世界点において

$$T^{\mu'_1\mu'_2}{}_{\nu'_1\nu'_2} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \frac{\partial x^{\mu'_2}}{\partial x^{\mu_2}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial x^{\nu'_2}} T^{\mu_1\mu_2}{}_{\nu_1\nu_2} \quad (7.1.14)$$

と書ける。また、例えば 2 つのテンソルの縮約 $T^{\mu\alpha} S_{\alpha\nu}$ は、上記の変換法則を用いると、

$$T^{\mu'\alpha'} S_{\alpha'\nu'} = \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} T^{\mu\alpha} \right) \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} S_{\alpha\nu} \right) \quad (7.1.15)$$

$$= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} T^{\mu\alpha} S_{\alpha\nu} \quad (7.1.16)$$

と変換することが分かる。つまり、 $T^{\mu\alpha} S_{\alpha\nu}$ は全体として $R^\mu{}_\nu$ と同じように変換する。一般にテンソルやベクトルの縮約もまた、テンソル (ベクトル、スカラー) として振る舞う。

例えばある座標系でベクトル V^μ (テンソル $T^{\mu\nu}$) の成分が全てゼロだったとする。上述した変換法則を見ると、このベクトル (テンソル) は他の座標系で考えても必ず全成分がゼロであることが言える。逆にある座標系でゼロでない成分を持つベクトル (テンソル) は、別の座標系に変換しても必ずゼロでない成分を持つ^{†8}。このことは、座標系に依らないベクトル \mathbf{V} やテンソル \mathbf{T} という概念が存在して、 $V^\mu, T^{\mu\nu}$ などの表記は設定した座標系の基底で展開した成分を表しているという立場に立てば自然に感じられるかもしれない。つまり、ある物理法則が

$$(\text{ベクトル或いはテンソル}) = 0 \quad (7.1.17)$$

という形式 (共変形式) で表されている場合、この法則は座標系に依らず同じ形で書ける。

7.1.3 共変微分

時空間におけるベクトル場の微分について考える。図 7.1 のように、一般に歪な形をした座標系 x^μ でベクトルを考えているとする。世界点 \mathcal{P} の x^2 座標の値が λ だったとして、座標軸 x^2

^{†7} つまり $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu{}_\nu$ を満たすテンソルのこと。一般のテンソルにおいて $T^{\mu\nu}$ が $T_{\mu\nu}$ の逆行列を表すわけではないことに注意が必要である。計量テンソルはその定義 (内積の可換性) から対称テンソル $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ なので、添え字の左右には区別がない。

^{†8} でないと逆変換を施して元の座標系での成分に戻したときに復元されない。

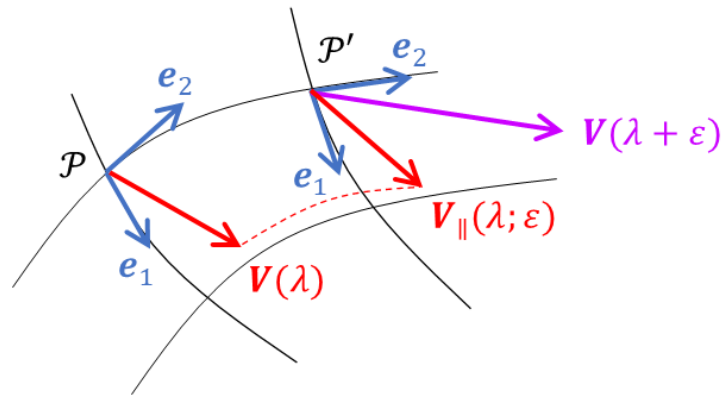


図 7.1 歪な座標系における平行移動と共変微分のイメージ

に沿って微小距離 ε だけ離れた世界点 \mathcal{P}' を考える。このとき、例えばベクトル場 \mathbf{V} の成分 V^1 の dx^2 方向への偏微分とは

$$\frac{\partial V^1}{\partial x^2} = \partial_2 V^1 = V^1_{;2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V^1(\lambda + \varepsilon) - V^1(\lambda)}{\varepsilon} \tag{7.1.18}$$

のことである。文献によっては偏微分はコンマに続く添え字で書かれるが、本書では ∂_α と書く。偏微分は数学的な計算の手順を表すが、一方で、「物理的に自然な」微分として共変微分というものを考えることができる。何らかのルールに従って世界点 \mathcal{P} から \mathcal{P}' へのベクトルの「平行移動」が定義できたとする。 $\mathbf{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{V}(\lambda)$ を点 \mathcal{P}' へ平行移動させたベクトルを $\mathbf{V}_{\parallel}(\lambda; \varepsilon)$ と書く。このとき、点 \mathcal{P}' でのベクトル場 $\mathbf{V}(\lambda + \varepsilon)$ と $\mathbf{V}_{\parallel}(\lambda; \varepsilon)$ の差による微分

$$\nabla_2 V^\mu = V^\mu_{;2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V^\mu(\lambda + \varepsilon) - V_{\parallel}^\mu(\lambda; \varepsilon)}{\varepsilon} \tag{7.1.19}$$

を共変微分と言う。偏微分をコンマで表すのに対して、共変微分はセミコロンのことである。本書では ∇_α を使うことにする。一般に点 \mathcal{P} と \mathcal{P}' における基底の向きは異なるため、共変微分には偏微分に加えて基底の向きが変わることによる補正分が加わり、

$$\nabla_\alpha V^\mu = \partial_\alpha V^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} V^\beta \tag{7.1.20}$$

と書ける。 $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ は平行移動の定義の仕方によって決まる補正分であり、接続係数と呼ばれる。

接続係数、すなわちベクトルの「平行移動」にはいろいろな定義の仕方があるが、一般相対論において使われるのはレヴィ-チヴィタ接続と呼ばれる定義方法である。レヴィ-チヴィタ接続における接続係数は計量を用いて次のように書ける。

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = g^{\alpha\mu} \Gamma_{\mu\beta\gamma} = g^{\alpha\mu} \frac{1}{2} (\partial_\gamma g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\gamma} - \partial_\mu g_{\beta\gamma}) \tag{7.1.21}$$

この接続係数を特にクリストッフエル記号と言う。クリストッフエル記号は後ろの添え字 2 つに対して対称 ($\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$) である。クリストッフエル記号には他に次の性質がある。

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\mu} = \frac{\partial_\mu \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \tag{7.1.22}$$

$$\text{ただし, } g = \det(g_{\mu\nu}) = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \tag{7.1.23}$$

$\det(g_{\mu\nu})$ とは計量の行列式のことである^{†9†10}。物理的に意味のある計量の行列式は必ず負の値になる。また、接続係数は座標変換に対して次のように変換する。

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\gamma'}} \Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\gamma'}} \tag{7.1.24}$$

第 2 項が付くことから、 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ はテンソルではないことが分かる。

レヴィ-チヴィタ接続における共変微分については、例えば次のことが言える。

- 計量 $g_{\mu\nu}$ に対する共変微分が常にゼロである。

$$\nabla_\gamma g_{\mu\nu} = 0 \tag{7.1.25}$$

- ベクトルの積に対する共変微分がライプニッツ則を満たす。

$$\nabla_\alpha (U_\mu V^\nu) = V^\nu \nabla_\alpha U_\mu + U_\mu \nabla_\alpha V^\nu \tag{7.1.26}$$

- 式 (7.1.22) の関係より、ベクトルの 4 元発散 $\nabla_\mu V^\mu$ は恒等的に次の関係を満たす。

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{\partial_\mu (\sqrt{-g} V^\mu)}{\sqrt{-g}} \tag{7.1.27}$$

例えばベクトルの共変成分 V_μ やテンソル $T^{\mu_1\mu_2}_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ の dx^α 方向への共変微分は、

$$\nabla_\alpha V_\mu = \partial_\alpha V_\mu - \Gamma^\beta_{\mu\alpha} V_\beta \tag{7.1.28}$$

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T^{\mu_1\mu_2}_{\nu_1\nu_2\nu_3} &= \partial_\alpha T^{\mu_1\mu_2}_{\nu_1\nu_2\nu_3} + \Gamma^{\mu_1}_{\lambda\alpha} T^{\lambda\mu_2}_{\nu_1\nu_2\nu_3} + \Gamma^{\mu_2}_{\lambda\alpha} T^{\mu_1\lambda}_{\nu_1\nu_2\nu_3} \\ &\quad - \Gamma^\lambda_{\nu_1\alpha} T^{\mu_1\mu_2}_{\lambda\nu_2\nu_3} - \Gamma^\lambda_{\nu_2\alpha} T^{\mu_1\mu_2}_{\nu_1\lambda\nu_3} - \Gamma^\lambda_{\nu_3\alpha} T^{\mu_1\mu_2}_{\nu_1\nu_2\lambda} \end{aligned} \tag{7.1.29}$$

^{†9} 一般のテンソル $T^{\mu\nu}$ に対して T が行列式を表すわけではないことに注意して欲しい。トレース $T = T^\mu_\mu = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ の意味で用いられることが普通である。

^{†10} 上述の関係は次のように導ける。計量 $g_{\mu\nu}$ の余因子行列 (付録 1.A.3 参照) を $\tilde{g}^{\mu\nu}$ と書くことにする。余因子行列の性質を用いると、

$$\frac{\partial g}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = \tilde{g}^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = g g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}$$

と書ける。ここで、クリストッフエル記号の定義より、

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = g_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} + g_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\alpha}$$

と書けることを用いれば、上述の関係を計算できる。

と計算できる。ベクトルやテンソルの共変微分は依然、座標変換に対して (共変成分の階数が 1 つ多い) テンソルとして振舞う。また、スカラーの偏微分は共変ベクトルになり、スカラーの共変微分は偏微分と同じである。その式の共変性を強調したい場合には、スカラーに対して ∂_μ と同じ意味で ∇_μ を用いることがある。

7.1.4 曲率テンソル

平行移動の結果は経路に依存する。すなわち、ベクトル $V(P)$ を 2 つの異なる経路に沿って点 P から P' へ平行移動させると、一般には異なった $V_{\parallel}(P \rightarrow P')$ が得られる。このことに関連して 2 階共変微分は一般に可換ではない^{†11}。ベクトル V^μ を dx^α 方向に共変微分してから dx^β 方向に共変微分した 2 階導関数を $\nabla_\beta \nabla_\alpha V^\mu$ と書くことにする。このとき、

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu - \nabla_\beta \nabla_\alpha V^\mu = R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta} V^\lambda \quad (7.1.30)$$

と書ける。 $R^\mu{}_{\lambda\alpha\beta}$ は非可換性の具合を表す量であり、曲率テンソル或いはリーマンテンソルと呼ばれる。リーマンテンソルの成分が全てゼロならば共変微分は可換である。このことを、注目する世界点の周りで時空が平坦であると言う^{†12}。リーマンテンソルはクリストッフエル記号を用いて

$$R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\beta \Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\beta} \Gamma^\lambda{}_{\alpha\gamma} - \Gamma^\mu{}_{\lambda\gamma} \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} \quad (7.1.31)$$

と書ける。また、一般のテンソル $T^{\mu_1\mu_2}{}_{\nu_1\nu_2}$ の共変微分の交換関係はリーマンテンソルを用いて

$$\begin{aligned} (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) T^{\mu_1\mu_2}{}_{\nu_1\nu_2} &= R^{\mu_1}{}_{\rho\alpha\beta} T^{\rho\mu_2}{}_{\nu_1\nu_2} + R^{\mu_2}{}_{\rho\alpha\beta} T^{\mu_1\rho}{}_{\nu_1\nu_2} \\ &\quad - R^\rho{}_{\nu_1\alpha\beta} T^{\mu_1\mu_2}{}_{\rho\nu_2} - R^\rho{}_{\nu_2\alpha\beta} T^{\mu_1\mu_2}{}_{\nu_1\rho} \end{aligned} \quad (7.1.32)$$

と書ける。

リーマンテンソルには次のような対称性がある。

- 後の 2 つの添え字に対して反対称

$$R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} = -R^\mu{}_{\alpha\gamma\beta}$$

- 3 つの添え字の循環和がゼロ

$$R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma} + R^\mu{}_{\beta\gamma\alpha} + R^\mu{}_{\gamma\alpha\beta} = 0$$

^{†11} 偏微分は可換である。

^{†12} 例えば、2 次元球面におけるベクトル場を考える。これは、球面の接ベクトルの集団を考えるということである。このとき、接ベクトルを大円に沿って、大円との間の角度を保ちながら移動させる操作は、レヴィ-チヴィタ接続の意味での平行移動の一種である。北極においてある方向を向いているベクトルを赤道上の特定の点まで平行移動させるとき、その経路に結果が依存することは比較的容易に想像できる。これは 2 次元球面が (至る所で) 平坦ではないことに相当する。

- $R_{\mu\alpha\beta\gamma} = g_{\mu\nu}R^{\nu}{}_{\alpha\beta\gamma}$ は前の 2 つの添え字に対して反対称

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\mu\beta\gamma}$$

以上の対称性から、 $R_{\mu\alpha\beta\gamma} = R_{\beta\gamma\mu\alpha}$ という対称性も言える。また、 $R_{\mu\alpha\beta\gamma}$ の独立な成分は 20 個であるとも言える。リーマンテンソルは更に、ビアンキの恒等式

$$\nabla_{\gamma}R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} + \nabla_{\alpha}R^{\mu}{}_{\nu\beta\gamma} + \nabla_{\beta}R^{\mu}{}_{\nu\gamma\alpha} = 0 \quad (7.1.33)$$

も満たす。

リーマンテンソルの縮約をとることにより、リッチテンソル

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} \quad (7.1.34)$$

とスカラー曲率

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\alpha\beta}R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} \quad (7.1.35)$$

が定義される。更に、リッチテンソルとスカラー曲率を用いて、アインシュタインテンソル

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (7.1.36)$$

も定義される。節 7.3 で説明するアインシュタイン方程式によって、物質 (エネルギーや運動量) の分布が与えられると $G_{\mu\nu}$ が決まる。 $G_{\mu\nu}$ は計量 $g_{\mu\nu}$ について最大 2 階の偏微分を含む。この偏微分方程式を解くことによって、設定した座標の幾何学的な性質がいくつかの自由度を残して決定される。このことが一般には「重力が時空の歪みである」と表現される。

本書の説明における「座標系の曲がり」と「時空間の歪み」の違いについて特筆しておく。上で述べたように、ある世界点で時空間が歪んでいるとは、リーマンテンソル $R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta}$ がゼロでないということである。リーマンテンソルはテンソルなので、この性質は座標系に依らない。時空間に座標を設定することは、対象の領域のあらゆる世界点において計量 $g_{\mu\nu}$ を与えることである。ただし、計量、すなわち座標系はアインシュタイン方程式を満たす必要がある。ある計量がアインシュタイン方程式の解ならば、それと任意の座標変換で結ばれる別の計量もまたアインシュタイン方程式の解になる。次節で述べるように、4 次元時空間においてもデカルト座標のような真っすぐな座標系 (ローレンツ系) を考えることができるが、これは平坦な時空を表す。すなわち、あらゆる世界点でリーマンテンソルがゼロである。反対に、平坦な時空間においても、ローレンツ系と座標変換で結ばれる曲がった座標系をとることができる。ここでいう曲がった座標系とは、接続係数 $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ がゼロではない座標系という意味である。接続係数はテンソルではないので、座標変換によってゼロでない値に変換され得る。アインシュタイン方程式の自由度については節 7.3.1 で再び説明する。

7.1.5 ローレンツ系

任意の世界点 \mathcal{P}_0 について、与えられた \mathcal{P}_0 において計量が

$$g_{\mu\nu}(\mathcal{P}_0) = \eta_{\mu\nu}, \quad \partial_\lambda g_{\mu\nu}(\mathcal{P}_0) = 0 \quad (7.1.37)$$

$$\text{ただし,} \quad (\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.1.38)$$

となるような座標系をとることができる。具体的に計量と世界点が与えられたとき、その世界点で計量が上式を満たすように座標変換する方法については次節で説明する。上式を満たす座標系を \mathcal{P}_0 での局所ローレンツ系と言う。 $\eta_{\mu\nu}$ はミンコフスキー計量と呼ばれる。2 段目はミンコフスキー計量を第 0 成分から第 3 成分の順に行列を用いて表したものである。一般には重力は時空間において変化するので、ある世界点 \mathcal{P}_0 でローレンツ系となるような座標系を設定しても、 \mathcal{P}_0 から離れた点ではミンコフスキー計量からずれた計量になる。この意味で局所という言葉が使われる。ただし、重力の影響が弱い場合には、このミンコフスキー計量からのずれは小さく、考えている時空間の範囲におけるあらゆる点で計量がミンコフスキー計量であると近似できる。つまり、あらゆる点でリーマンテンソルがゼロということである。このような場合の時空は (あらゆる点で) 平坦な時空と呼ばれる。

クリストッフェル記号は計量の偏微分で表されるので、上記のような局所ローレンツ系の接続係数は次のような性質を持つ。

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(\mathcal{P}_0) = 0 \quad (7.1.39)$$

これはこの座標系においては、 \mathcal{P}_0 での共変微分が偏微分に等しくなることを表している。これは、次節で説明する測地線方程式と併せて考えると、 \mathcal{P}_0 ではまるで重力が無いかのように物理量を扱える座標系であるという解釈ができる。このような座標系を局所慣性系と言う^{†13}。以上のことをまとめると、局所ローレンツ系は局所慣性系であることが言える。

式 (7.1.37) の 2 つの条件が満たされる座標系を局所ローレンツ系と呼ぶのに対し、最初の条件のみが満たされる座標系を、その世界点での局所直交系と呼ぶことにする。つまり、注目する世界点で $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ だけれども、計量の偏微分がゼロとは限らないような座標系のことである。局所直交系は局所ローレンツ系でない限り、局所慣性系ではない。

ローレンツ系についてももう少し説明する。ローレンツ系は 4 次元時空間中の「直交座標」と言え、代表的な座標のとり方のひとつである^{†14}。任意の世界点で局所ローレンツ系を考えられるので、ローレンツ系で適切な形式で記述された物理法則において偏微分を共変微分に置き換え

^{†13} 局所慣性系においても一般には接続係数の偏微分はゼロではない。よって、リーマンテンソルも一般にはゼロではない。

^{†14} 前述したように、平坦な時空に近似できる場合でないと、ローレンツ系を大域的にとることはできない。

て、 $\eta_{\mu\nu}$ を $g_{\mu\nu}$ に置き換えれば一般の座標系の場合に拡張したことになる。この意味でローレンツ系における考察は相対論的力学の基礎と言える。ローレンツ系での線素 ds は次のように書ける。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (7.1.40)$$

慣習として $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ と書く^{†15}。 c は光速である。ローレンツ系の原点にいる質量を持った粒子が運動して世界線を描き、無限小離れた世界点 (cdt, dx, dy, dz) に移動したとする。このとき、必ず

$$(cdt)^2 > dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (7.1.41)$$

が成り立つ。これは物体が光速を超えて運動できないことを表す。上式の関係がどの微小区間でも成り立つような世界線は時間的な世界線と表現される^{†16}。このことを考慮して (7.1.40) の右辺の符号を逆にした

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (7.1.42)$$

というスカラーを考える。式 (7.1.41) より、運動する物体が描く世界線を考える際には $d\tau$ は実数になることが分かる。 $d\tau$ を世界線に沿って積分した τ はこの世界線のある種の長さを表す量であり、世界線の同じ区間を考える限りどのような座標系で考えても不変な量である^{†17}。 τ は固有時と呼ばれ、物体の運動が描く世界線を考えるときのパラメータとして以後多用される。先ほど「質量を持った粒子」という注釈をつけて説明したが、一方で光は必ず

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 \quad (7.1.43)$$

が全ての微小区間で成り立つような世界線を移動する。このような世界線は光的、或いはヌル世界線と呼ばれる。

7.1.6 局所ローレンツ系への移り方

節 7.3 で説明するアインシュタイン方程式の解として計量 $g_{\mu\nu}$ が与えられたとする。この計量が表す時空において、世界点 P_0 での局所ローレンツ系への座標変換を考える。次の 3 ステップの変換を施すことで局所ローレンツ系へ移れる。

^{†15} 文献によっては $x^0 = w$ と書かれていることもある。また、ミンコフスキー計量が符号を逆にして定義されていることや、第 1 成分から第 4 成分の 4 成分を考えていることなどもある。更に、 $c = 1$ とする単位系が用いられていることもある。

^{†16} 一般的な座標に対しては世界線が時間的である条件は $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu < 0$ と書ける。一方で逆の不等号の関係 $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu > 0$ は空間的と表現される。 $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ はスカラーだったので、時間的な世界線を他の座標系で考えると空間的になる、というようなことはない。

^{†17} 一般の座標系においては、時間的な世界線に対して

$$cd\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

と定義される。

1. もし \mathcal{P}_0 が座標の原点でなく、 $x^\mu = a^\mu$ という座標値で表される点だったなら、

$$x^{\mu'} = x^\mu - a^\mu \tag{7.1.44}$$

という変換を行うことで、 \mathcal{P}_0 が原点となる座標系をとり直す。

2. 原点 \mathcal{P}_0 での接続係数が $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(\mathcal{P}_0) = C^\alpha_{\beta\gamma}$ という値を持っていたなら、次の変換を行うことで $\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}(\mathcal{P}_0) = 0$ とできる。

$$x^{\mu'} = x^\mu + \frac{1}{2}C^\mu_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \tag{7.1.45}$$

この変換によって原点は移動しない ($x^\mu = 0$ ならば $x^{\mu'} = 0$)。新しい座標系の原点で $\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}(\mathcal{P}_0) = 0$ となることを確認する。式 (7.1.45) より、再帰的に代入して逆変換を求めると、

$$x^\mu = x^{\mu'} - \frac{1}{2}C^{\mu'}_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \tag{7.1.46}$$

$$= x^{\mu'} - \frac{1}{2}C^{\mu'}_{\alpha'\beta'} \left(x^{\alpha'} - \frac{1}{2}C^{\alpha'}_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \right) \left(x^{\beta'} - \frac{1}{2}C^{\beta'}_{\gamma\delta}x^\gamma x^\delta \right) \tag{7.1.47}$$

$$= x^{\mu'} - \frac{1}{2}C^{\mu'}_{\alpha'\beta'}x^{\alpha'}x^{\beta'} + (x^{\mu'} \text{ の 3 次以上の項}) \tag{7.1.48}$$

と書ける。各微分を原点 $\mathcal{P}_0(x^\mu = x^{\mu'} = 0)$ で評価すると、

$$\left. \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \right|_{x=0} = \delta^{\mu'}_{\mu}, \quad \left. \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right|_{x'=0} = \delta^\mu_{\mu'}, \quad \left. \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \right|_{x'=0} = -C^\mu_{\mu'\nu'} \tag{7.1.49}$$

となる。よって、接続係数の変換公式 (7.1.24) より、

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}(\mathcal{P}_0) = \delta^\alpha_{\mu} \delta^\nu_{\beta} \delta^\lambda_{\gamma} \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(\mathcal{P}_0) + \delta^\alpha_{\rho} (-C^\rho_{\beta\gamma}) \tag{7.1.50}$$

$$= \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(\mathcal{P}_0) - C^\alpha_{\beta\gamma} \tag{7.1.51}$$

$$= 0 \tag{7.1.52}$$

となることが分かる。

3. 原点 \mathcal{P}_0 での計量の表示行列 $\underline{G} = (g_{\mu\nu}(\mathcal{P}_0))$ は対称行列なので、直交行列 \underline{U} をうまく選べば対角化できる (付録 1.A 参照)。具体的にはまず、 \underline{G} の 4 つの固有値と固有ベクトルを探す。普通の世界点において物理的に意味のある計量を考えている場合は \underline{G} は正則行列であり、その固有値のうちの 1 つは負の値、残り 3 つは正の値をとる。負の固有値を λ_0 、正の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ と書き、それぞれに対応する規格化された固有ベクトル (縦数ベクトル) を $\vec{u}_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ ($|\vec{u}_\mu| = 1$) と書くと、固有ベクトルを横に並べた行列

$$\underline{U} = (\vec{u}_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \tag{7.1.53}$$

は直交行列 ($\underline{U}^T \underline{U} = \underline{I}$) となり、 \underline{D} は \underline{U} によって

$$\underline{D} = \underline{U}^T \underline{G} \underline{U} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (7.1.54)$$

と対角化される。対角行列を $\underline{D} = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ のように書くことにする。このとき、

$$\underline{A} = \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda_0}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} \right) \quad (7.1.55)$$

という行列を用いて $\underline{B} = \underline{U} \underline{A}$ と書くと、

$$\underline{B}^T \underline{G} \underline{B} = \underline{A} \underline{U}^T \underline{G} \underline{U} \underline{A} = \underline{A} \underline{D} \underline{A} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) = (\eta_{\mu\nu}) \quad (7.1.56)$$

となる。また、

$$\underline{B} = \underline{U} \underline{A} = \left(\frac{\vec{u}_0}{\sqrt{-\lambda_0}}, \frac{\vec{u}_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{\vec{u}_2}{\sqrt{\lambda_2}}, \frac{\vec{u}_3}{\sqrt{\lambda_3}} \right) \quad (7.1.57)$$

$$\underline{B}^{-1} = \underline{A}^{-1} \underline{U}^T = \begin{pmatrix} \sqrt{-\lambda_0} \vec{u}_0^T \\ \sqrt{\lambda_1} \vec{u}_1^T \\ \sqrt{\lambda_2} \vec{u}_2^T \\ \sqrt{\lambda_3} \vec{u}_3^T \end{pmatrix} \quad (7.1.58)$$

と書ける。以上の議論から、 $\underline{B}, \underline{B}^{-1}$ の μ 行 ν 列成分をそれぞれ $b^\mu{}_\nu, \tilde{b}^\mu{}_\nu$ と書いて、原点を移動させない変換

$$x^{\mu'} = \tilde{b}^{\mu'}{}_\nu x^\nu \quad \longleftrightarrow \quad x^\mu = b^\mu{}_{\nu'} x^{\nu'} \quad (7.1.59)$$

を行えば、

$$g_{\mu'\nu'}(\mathcal{P}_0) = b^\mu{}_{\mu'} b^\nu{}_{\nu'} g_{\mu\nu}(\mathcal{P}_0) = \eta_{\mu'\nu'} \quad (7.1.60)$$

となることが分かる。上記の座標変換では $\partial^2 x^\mu / \partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'} = 0$ なので、接続係数はテンソルと同じように変換する。よって、旧座標で $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}(\mathcal{P}_0) = 0$ ならば新しい座標でも $\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}(\mathcal{P}_0) = 0$ となる。一般にクリストッフエル記号が $\Gamma^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'}(\mathcal{P}_0) = 0$ ならば $\partial_{\alpha'} g_{\mu'\nu'}(\mathcal{P}_0) = 0$ であることが言える。つまり、この新しい座標系が原点 \mathcal{P}_0 での局所ローレンツ系である。

7.2 運動方程式

物体の運動が従うべき方程式を説明する。

7.2.1 測地線方程式

前節までで、物体が運動すると時空間中の時間的な世界線を描くことを説明した。実際どのような世界線を描くかを規定するのが測地線方程式である。重力以外の力が働いていない質点は次の式で規定される測地線を描いて運動する^{†18}。

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (7.2.1)$$

τ は前節で説明した固有時である。つまり、この微分方程式を解いて得られる関数 $x^\mu(\tau)$ でパラメータ表示として描かれる世界線が測地線である。特に慣性系 ($\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = 0$) では、上式は

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (7.2.2)$$

となる。これは直線を表す。つまり、ローレンツ系では測地線は直線である。上式を解くと、初期条件で与えられる適当な 8 個の定数 a^μ, b^μ を用いて

$$x^\mu = a^\mu + b^\mu \tau \quad (7.2.3)$$

と書けるが、この 4 式から τ を消去して ($x^i; i = 1, 2, 3$) を $x^0 = ct$ を用いて表すと、

$$x^i = \left(a^i - a^0 \frac{b^i}{b^0} \right) + \frac{b^i}{b^0} ct \quad (7.2.4)$$

と書ける。これは質点がこの座標系において速度 $b^i c / b^0$ の等速直線運動をしていることを表す。

節 7.4 で説明する完全流体の圧力勾配力や、節 7.6 で説明する電磁気力のような力が物体に働く場合は、測地線方程式の右辺に相互作用を表す項が加わる。

7.2.2 変分法

付録 5.A.1 で最小作用の原理を説明したが、それと似た考え方で測地線を求める方法がある。つまり、与えられた計量に対して何らかの作用が停留値をとるような経路が測地線であるという定式化ができる。作用は

$$I = \int_{\mathcal{P}_0}^{\mathcal{P}_1} d\tau \quad (7.2.5)$$

^{†18} このことは光 (光子) の場合も例外ではない。ただし、光的測地線の場合はパラメータとして固有時 τ が使えないので、代わりに

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$$

を満たすようなパラメータ λ を使って

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0$$

と記述される。

と書ける。時間的な世界線に対しては

$$cd\tau = \sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = \sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}d\tau \quad (7.2.6)$$

と書けるので、変分を計算すると

$$\delta I = \delta \int_{\mathcal{P}_0}^{\mathcal{P}_1} \frac{1}{c} \sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau \quad (7.2.7)$$

$$= \frac{1}{c} \int_{\mathcal{P}_0}^{\mathcal{P}_1} \frac{-\delta(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau})}{2\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}} d\tau \quad (7.2.8)$$

となる。つまり、停留条件は

$$\delta \int_{\mathcal{P}_0}^{\mathcal{P}_1} g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau = 0 \quad (7.2.9)$$

を考えた場合と変わらない。この変分を実際に計算するか、 $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau$ と書いて、

$$L = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (7.2.10)$$

をラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad (7.2.11)$$

に代入することにより、

$$\frac{d}{d\tau} (g_{\mu\beta}\dot{x}^\beta + g_{\alpha\mu}\dot{x}^\alpha) - \partial_\mu g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0 \quad (7.2.12)$$

$$g_{\mu\alpha}\ddot{x}^\alpha + \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\alpha\beta})\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0 \quad (7.2.13)$$

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + g^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \quad (7.2.14)$$

というようにして測地線方程式が得られる。以上のことから、固有時を停留値にするような世界線が測地線であると言える^{†19}。

7.2.3 ニュートンの運動方程式との対応

測地線方程式は次の 3 つの仮定の下で、ニュートン力学において重力のみを受ける質点の運動方程式に帰着する。

^{†19} 例えば地球表面において、東京からサンフランシスコへの最短ルート（距離を停留値にするルート）は、その 2 点を通る大円（その 2 点と地球の中心を含む平面と地球面の交線）である。これが 2 次元球面における測地線である。メルカトル図法ではこの大円ルートは直線では表されず、太平洋を北に大きく迂回するような曲線で表される。このことは 4 次元時空間にとった座標系で一般には測地線が直線とならないことに対応する。

1. 質点の速度が非相対論的

$$\frac{|v^i|}{c} \ll 1$$

2. 計量のミンコフスキー計量からのずれが小さい (重力場が弱い)

$$g_{\mu\nu}(\mathcal{P}) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(\mathcal{P}), \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

3. 計量 (重力場) の時間変化が無視できる

$$|\partial_0 h_{\mu\nu}| \simeq 0$$

まず、測地線方程式の第 1 ~ 3 成分をもう少し詳しく書き下す。

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i{}_{00} c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + 2\Gamma^i{}_{0j} c \left(\frac{dt}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^j}{d\tau} \right) + \Gamma^i{}_{jk} \left(\frac{dx^j}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^k}{d\tau} \right) = 0 \quad (7.2.15)$$

2 番目の仮定より、

$$\Gamma^i{}_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{2} \eta^{i\alpha} (\partial_\nu h_{\alpha\mu} + \partial_\mu h_{\alpha\nu} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}) \quad (7.2.16)$$

$$= \frac{1}{2} \eta^{ii} (\partial_\nu h_{i\mu} + \partial_\mu h_{i\nu} - \partial_i h_{\mu\nu}) \quad (7.2.17)$$

と近似できる一方で、1 番目の仮定 ($dx^i/dt \ll c$) より式 (7.2.15) の第 3,4 項は第 2 項に比べて無視できる。また、

$$c^2 d\tau^2 = -(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu \quad (7.2.18)$$

$$= c^2 dt^2 \left(1 - \delta_{ij} \frac{v^i v^j}{c^2} - h_{00} - 2h_{0i} \frac{v^i}{c} - h_{ij} \frac{v^i v^j}{c^2} \right) \quad (7.2.19)$$

$$\simeq c^2 dt^2 \quad (7.2.20)$$

と近似できる。よって、式 (7.2.15) は

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \simeq -c^2 \Gamma^i{}_{00} \simeq -\frac{c^2}{2} \eta^{ii} (2\partial_0 h_{i0} - \partial_i h_{00}) \quad (7.2.21)$$

と書ける。更に 3 番目の仮定より、 $2\partial_0 h_{i0}$ を $\partial_i h_{00}$ に対して無視して

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \simeq -\frac{\partial}{\partial x^i} \left(-\frac{c^2 h_{00}}{2} \right) \quad (7.2.22)$$

となる。この $-c^2 h_{00}/2$ がニュートン力学での重力ポテンシャル ϕ_g であると考えれば、この式は重力だけを受ける質点の運動方程式である。

7.3 重力場の方程式

計量が従うべき方程式を説明する。

7.3.1 アインシュタイン方程式

物質の分布とその時間発展、すなわち 4 次元時空間的分布が与えられれば重力、すなわち時空の幾何学的な性質が決まり、逆に時空の幾何学的な性質が与えられればそれに従って物質は運動するため、物質の時空間的分布が決まる。このように、物質分布と時空の幾何学的性質が互いに相手を規定した結果、双方が落ち着くべきところに落ち着いているというのが基本的な考え方である。物質分布と時空の幾何学的性質の間の関係を定める式がアインシュタイン方程式である。すなわち、ニュートン力学におけるポアソン方程式とエネルギー・運動量保存則の役割を兼ね備えた連立方程式と言える。アインシュタイン方程式は次のように書ける。

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (7.3.1)$$

$G_{\mu\nu}$ は節 7.1.4 で述べたアインシュタインテンソルである。すなわちこの式の左辺は時空の幾何学的性質を表す量である。 G は重力定数、 c は光速である。 $T_{\mu\nu}$ はエネルギー・運動量テンソルと呼ばれ、物質の時空間的分布を特徴づける場の量である。真空の場合は $T_{\mu\nu} = 0$ となる。エネルギー・運動量テンソルの具体的な形については次節で説明する。

アインシュタイン方程式の両辺 ($G_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$) は対称テンソルである。よって、これは計量 $g_{\mu\nu}$ に関する 10 個の 2 階微分方程式である。しかし、 $G_{\mu\nu}$ はビアンキの恒等式 (7.1.33) より、

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0 \quad (7.3.2)$$

を恒等的に満たすので、この 4 つの拘束条件の下で解くことになる。 $g_{\mu\nu}$ の成分は 10 個なので、与えられた $T_{\mu\nu}$ と境界条件に対してこの微分方程式を解くことによって、 $g_{\mu\nu}$ は 4 つの自由度を残して決定される。この自由度は一般座標変換の自由度に対応する。すなわち、 $g_{\mu\nu}$ がアインシュタイン方程式の解ならば、

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu} \quad (7.3.3)$$

もまた解になる。逆に言うと、アインシュタイン方程式の解と上式の形の座標変換で結ばれない座標系は、その時空間に敷くことができない。アインシュタイン方程式によって時空の幾何学的性質は決まれど、どの座標系で考えるかの任意性は残される^{†20}。

アインシュタイン方程式と恒等式 (7.3.2) より、

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (7.3.4)$$

が分かる。これはエネルギー・運動量保存則を表す。節 7.4 で完全流体の場合において、上式の具体的な成分やニュートン力学における保存則との対応を説明する。

^{†20} アインシュタイン方程式によって決まるのはリッチテンソルである。リッチテンソルが決まれば、リーマンテンソルの独立な成分 20 個のうちの 10 個が決まる。真空 $T_{\mu\nu} = 0$ の場合はこれらの 10 成分はゼロであるが、必ずしもリーマンテンソルの全ての成分がゼロであるような解が求まるわけではない。境界条件によって時空の歪んだ解が得られる。実際に、節 7.5 で説明するシュバルツシルト計量は原点以外が真空の場合の解であるが、そこの時空は歪んでいる。また、重力波は真空を伝搬することができる。

7.3.2 エネルギー運動量テンソル

エネルギー運動量テンソル (次元 $[\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}]$) の各成分の意味は次の通りである。

- T^{00} : エネルギー密度 $[\text{J m}^{-3}]$
- T^{0i} : (エネルギーフラックスの第 i 成分 $[\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1}]$)/ c
- T^{i0} : (運動量密度の第 i 成分 $[\text{kg m s}^{-1} \text{m}^{-3}]$) $\cdot c$
- T^{ij} : 運動量流束テンソル (応力テンソル) $[\text{kg m s}^{-1} \text{m}^{-2} \text{s}^{-1}]$

$T^{\mu\nu}$ は対称テンソルなので、

$$(\text{エネルギーフラックス}) = (\text{運動量密度}) \cdot c^2 \quad (7.3.5)$$

であることが言える。このことは、相対論において質量 m とエネルギー E が同一視 ($E = mc^2$) されることに対応する。つまり、

$$(\text{エネルギーフラックス})^i = (\text{エネルギー密度}) \cdot (\text{エネルギー流束の平均速度})^i \quad (7.3.6)$$

$$= (\text{質量密度}) \cdot c^2 \cdot (\text{質量流束の平均速度})^i \quad (7.3.7)$$

$$= (\text{運動量密度})^i \cdot c^2 \quad (7.3.8)$$

が成り立つように、エネルギーの定義がニュートン力学の場合から若干変更されている。考える時空間中に物質が分布している場合は物質場によるエネルギー運動量テンソルによって時空が曲げられる。また、電磁場もエネルギーや運動量を持つので、電磁場が存在している場合は物質場に加えて電磁場のエネルギー運動量テンソルによっても時空が曲げられる。この場合は、 $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ より物質場と電磁場を合わせたエネルギー運動量保存則が得られる。電磁場のエネルギー運動量テンソルについては節 7.6、理想磁気流体のエネルギー運動量保存則については節 7.8 で説明する。

完全流体の場合のエネルギー運動量テンソルを説明する。添え字にハット ($\hat{\mu}$) を付けた場合、流体の共動系、すなわち注目する世界点で流体が静止しているような局所直交系で表した成分であることを意味する。完全流体は熱伝導のない流体なので、共動系ではエネルギーフラックス (運動量密度) はゼロ

$$T^{\hat{0}\hat{i}} = T^{\hat{i}\hat{0}} = 0 \quad (7.3.9)$$

である。次に $T^{\hat{0}\hat{0}}$ について、物質は静止していても正の値のエネルギー (質量) を持つ。これを静止エネルギー (静止質量) と言う。これが前述した「エネルギーの定義の変更」の内容である。流体の静止質量密度を ρ 、単位質量あたりの内部エネルギーを e と書くと、静止エネルギーと内部エネルギーを合わせたエネルギー密度は

$$T^{\hat{0}\hat{0}} = \rho(c^2 + e) \quad (7.3.10)$$

と書ける。完全流体とは静止圧力が等方的な流体のことだったので、静止圧力を p とすると、結局共動系でのエネルギー運動量テンソルは

$$(T^{\hat{\mu}\hat{\nu}}) = \begin{pmatrix} \rho(c^2 + e) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (7.3.11)$$

と行列表示できる。

各流体粒子が描く時間的な世界線の接ベクトル

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (7.3.12)$$

を流体の 4 元速度と言う。4 元速度の大きさはあらゆる世界点で一定の値

$$u^\mu u_\mu = \frac{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{d\tau^2} = -c^2 \quad (7.3.13)$$

をとる。この関係は規格化条件と呼ばれる。3 次元空間における速度を $v^i = dx^i/dt$ と書くと、4 元速度との関係は

$$(u^\mu) = u^0 \left(1, \frac{1}{c} \frac{d\tau}{dt} \frac{dx^i}{d\tau} \right) = u^0 \left(1, \frac{v^i}{c} \right) \quad (7.3.14)$$

と書ける。すなわち、静止した流体粒子に対しては

$$(u^{\hat{\mu}}) = (c, 0, 0, 0) \quad (7.3.15)$$

という成分を持つ。この 4 元速度とミンコフスキー計量を使うと、共動系でのエネルギー運動量テンソル (7.3.11) は

$$T^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \rho(c^2 + e) \frac{u^{\hat{\mu}} u^{\hat{\nu}}}{c^2} + p \left(\eta^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + \frac{u^{\hat{\mu}} u^{\hat{\nu}}}{c^2} \right) \quad (7.3.16)$$

$$= (\rho c^2 + \rho e + p) \frac{u^{\hat{\mu}} u^{\hat{\nu}}}{c^2} + p \eta^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \quad (7.3.17)$$

と書ける。これを拡張することで、一般の座標系におけるエネルギー運動量テンソルは

$$T^{\mu\nu} = (\rho c^2 + \rho e + p) \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} + p g^{\mu\nu} \quad (7.3.18)$$

となる。

上記のエネルギー運動量テンソルが非相対論的流体に対してどう表されるかを考える。具体的にはまず、重力は弱いとして

$$g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} \quad (7.3.19)$$

とする。この計量の下での 4 元速度の規格化条件 (7.3.13) は、

$$u^\mu u_\mu = u^0 u^0 \left(-1 + \frac{v^2}{c^2} \right) = -c^2 \quad (7.3.20)$$

$$\rightarrow u^0 = \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.3.21)$$

$$\text{ただし, } v^2 = \sum_{i=1}^3 v^i v^i \quad (7.3.22)$$

と書けるので、3 次元速度は光速に比べて十分に小さいとして、

$$(u^\mu) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (c, v^i) \simeq (c, v^i) \quad (7.3.23)$$

と近似する。また、エネルギー密度においては静止エネルギーが卓越している (内部エネルギーが非相対論的な大きさ)

$$\rho c^2 \gg \rho e + p \quad (7.3.24)$$

と仮定する。すると、エネルギー運動量テンソルは

$$(T^{\mu\nu}) \simeq \begin{pmatrix} \rho c^2 & \rho c v_x & \rho c v_y & \rho c v_z \\ \rho c v_x & \rho v_x v_x + p & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho c v_y & \rho v_x v_y & \rho v_y v_y + p & \rho v_y v_z \\ \rho c v_z & \rho v_x v_z & \rho v_y v_z & \rho v_z v_z + p \end{pmatrix} \quad (7.3.25)$$

と書ける。 T^{ij} 成分は非相対論的完全流体の運動量保存則に出てくる $\nabla \cdot$ の中身

$$\rho v_i v_j + p \delta_{ij} \quad (7.3.26)$$

に一致することが分かる。 T^{i0} 成分を c で割ることで、流体の運動量密度は ρv_i と表されていることが分かる。エネルギーに関する成分 $T^{0\mu}$ については、静止エネルギーというニュートン力学では無かった概念が加わっているため、非相対論的流体力学との対応は陽には分からない。

7.3.3 ポアソン方程式との対応

リーマンテンソルの定義から、リッチテンソルの 00 成分は

$$R_{00} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{00} - \partial_0 \Gamma^\alpha_{0\alpha} + \Gamma^\alpha_{00} \Gamma^\beta_{\beta\alpha} - \Gamma^\alpha_{0\beta} \Gamma^\beta_{0\alpha} \quad (7.3.27)$$

と書ける。測地線方程式のときの考察と同じように、弱い重力場

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (7.3.28)$$

を考えると、 $\Gamma \sim \mathcal{O}(h)$ なので、 h についての最低次の近似では

$$R_{00} \simeq \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{00} - \partial_0 \Gamma^\alpha_{0\alpha} \simeq \partial_i \Gamma^i_{00} \quad (7.3.29)$$

と書ける。ただし、2 番目の近似では接続係数の時間微分を空間微分に対して無視した。従って式 (7.2.21) の関係より、重力ポテンシャル ϕ_g との間に

$$R_{00} \simeq \frac{1}{c^2} \nabla^2 \phi_g \quad (7.3.30)$$

という関係があることが分かる。上記の ∇^2 は 3 次元的ラプラシアンのことである。

次に R_{00} をエネルギー運動量テンソルを用いて表すために、 $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$ の下でのアインシュタイン方程式のトレースをとる。

$$R - 2R = \frac{8\pi G}{c^4} T \quad (7.3.31)$$

$$\text{ただし, } T = T^\mu{}_\mu = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \quad (7.3.32)$$

この関係より、

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (7.3.33)$$

が分かるので、 R_{00} は

$$R_{00} \simeq \frac{8\pi G}{c^4} \left\{ T_{00} + \frac{1}{2} (T^0{}_0 + T^i{}_i) \right\} \simeq \frac{4\pi G}{c^4} \left(T_{00} + \sum_{i=1}^3 T_{ii} \right) \quad (7.3.34)$$

と書ける。式 (7.3.25) と、 $v \ll c$ かつ $\rho c^2 \gg p$ を用いて計算すると、

$$R_{00} \simeq \frac{4\pi G}{c^4} (\rho c^2 + \rho v^2 + 3p) \simeq \frac{4\pi G}{c^2} \rho \quad (7.3.35)$$

となる。式 (7.3.30) と併せると、ポアソン方程式

$$\nabla^2 \phi_g = 4\pi G \rho \quad (7.3.36)$$

が導かれる。

7.4 完全流体の保存則

相対論的完全流体の保存則について説明し、非相対論的流体力学との対応を見る。相対論的流体とは、次の 3 つの条件の 1 つ以上に当てはまる流体のことを指す。

- (3 次元的) 流速が光速に比べて無視できない流体
- 高温であり、内部エネルギーが静止質量に対して無視できない流体 (すなわち微視的な視点での熱運動が相対論的速度を持つ流体)
- 重力が強い、或いは時間変化する時空内での流体

完全流体とは、粘性も熱伝導もなく、静止圧力が等方的な流体のことで、そのエネルギー運動量テンソルは式 (7.3.18) で与えられる。

7.4.1 質量保存則

静止質量の保存則、すなわち微視的な視点での粒子数の保存則に相当するものを考えるために、静止質量流束 J^μ を考える。流体の共動系では静止質量密度 ρ を用いて

$$(J^{\hat{\mu}}) = c(\rho, 0, 0, 0) \quad (7.4.1)$$

と書ける。 c を乗じて $[\text{m}^{-2} \text{ kg s}^{-1}]$ の次元で定義する。これは共動系での 4 元速度 $(u^{\hat{\mu}}) = (c, 0, 0, 0)$ を用いて

$$J^{\hat{\mu}} = \rho u^{\hat{\mu}} \quad (7.4.2)$$

と書ける。これを拡張することで、一般の座標系における静止質量流束は

$$J^\mu = \rho u^\mu \quad (7.4.3)$$

となる。静止質量保存則は次のように表される^{†21}。

$$\nabla_\mu J^\mu = \nabla_\mu(\rho u^\mu) = u^\mu \nabla_\mu \rho + \rho \nabla_\mu u^\mu = 0 \quad (7.4.4)$$

流体を構成する粒子が生成消滅すると考える場合は右辺に生成消滅を表す項が加えられる。計量が与えられれば、この式とエネルギー運動量保存則 $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ 、状態方程式 $p = p(\rho, e)$ の成分にして計 6 つの方程式によって 6 つの未知数 v^i, p, ρ, e の時空間分布が決定される^{†22}。

静止質量保存則の非相対論的極限を考える。重力の影響は無いとして、ローレンツ系で考える。3 次元的速度場を $v^i = dx^i/dt$ と書く。 $v \ll c$ である。4 元速度の規格化条件より、

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \simeq c \quad (7.4.5)$$

と書けるので、

$$(u^\mu) \simeq (c, v^i), \quad (u_\mu) \simeq (-c, v_i) \quad (7.4.6)$$

となる。微分演算子 $u^\mu \nabla_\mu$ は、この近似の下でラグランジュ微分に一致する。

$$u^\mu \nabla_\mu \simeq \frac{u^0}{c} \frac{\partial}{\partial t} + u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (7.4.7)$$

$$\simeq \frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{D}{Dt} \quad (7.4.8)$$

また、 u^μ の 4 元発散は 3 次元速度場 \mathbf{v} の発散に近似できる。

$$\nabla_\mu u^\mu \simeq \frac{1}{c} \frac{\partial u^0}{\partial t} + \frac{\partial u^i}{\partial x^i} \quad (7.4.9)$$

$$\simeq \frac{\partial v^i}{\partial x^i} = \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (7.4.10)$$

^{†21} J^μ の表式は後に述べる 4 元電流でも使われるため、混同しないように、以後 J^μ を静止質量流束の意味で用いることはない。

^{†22} 4 元速度は規格化条件 (7.3.13) を満たす必要があるため、独立な成分は 3 つである。

以上のことから、式 (7.4.4) は非相対論的極限で

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (7.4.11)$$

と書けることが分かる。

7.4.2 運動量保存則

運動量保存則を考えるために、次の対称テンソルを導入する。

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{u_\mu u_\nu}{c^2} \quad (7.4.12)$$

$u_\mu = g_{\mu\nu} u^\nu$ は 4 元速度である。4 元速度の規格化条件 $u^\mu u_\mu = -c^2$ を用いると、 $h_{\mu\nu}$ は次の性質を持つことが分かる。

$$h_{\mu\nu} u^\mu = 0, \quad h_{\mu}{}^\alpha h_{\alpha\nu} = h_{\mu\nu}, \quad h^\mu{}_\mu = 3 \quad (7.4.13)$$

このテンソル $h_{\mu\nu}$ を用いると、任意のベクトル V^μ を u^μ に平行な成分と垂直な成分に

$$V^\mu = A \frac{u^\mu}{c} + B^\mu \quad (7.4.14)$$

$$\text{ただし,} \quad A = -\frac{u_\alpha}{c} V^\alpha \quad (7.4.15)$$

$$B^\mu = h^\mu{}_\alpha V^\alpha \quad (7.4.16)$$

$$u_\mu B^\mu = 0 \quad (7.4.17)$$

というように分解することができる。 $h_{\mu\nu}$ は u^μ に垂直な方向への射影テンソル (projection tensor) と呼ばれる。

エネルギー-運動量保存則

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (7.4.18)$$

は (ベクトル)=0 という式だが、この式の u^μ に平行な成分がエネルギー保存則、垂直な成分が運動量保存則を表す。 $h_{\mu\nu}$ を使って実際に垂直成分を計算すると、

$$\begin{aligned} & h^\mu{}_\alpha \nabla_\beta T^{\alpha\beta} \\ &= h^\mu{}_\alpha \left[\nabla_\beta (\rho c^2 + \rho e + p) \frac{u^\alpha u^\beta}{c^2} + (\rho c^2 + \rho e + p) \left(\frac{u^\beta \nabla_\beta u^\alpha}{c^2} + \frac{u^\alpha \nabla_\beta u^\beta}{c^2} \right) + g^{\alpha\beta} \nabla_\beta p \right] \end{aligned} \quad (7.4.19)$$

と書ける。式 (7.4.13) の 1 番目の性質 ($h^\mu{}_\alpha u^\alpha = 0$) と

$$h^\mu{}_\alpha u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = \left(g^\mu{}_\alpha + \frac{u^\mu u_\alpha}{c^2} \right) u^\beta \nabla_\beta u^\alpha \quad (7.4.20)$$

$$= u^\beta \nabla_\beta u^\mu + \frac{u^\mu u_\alpha u^\beta \nabla_\beta u^\alpha}{c^2} \quad (7.4.21)$$

$$= u^\beta \nabla_\beta u^\mu \quad (7.4.22)$$

という関係^{†23}を用いると、

$$h^\mu{}_\alpha \nabla_\beta T^{\alpha\beta} = (\rho c^2 + \rho e + p) \frac{u^\beta \nabla_\beta u^\mu}{c^2} + h^\mu{}_\alpha g^{\alpha\beta} \nabla_\beta p \quad (7.4.23)$$

と計算できる。よって、 $h^\mu{}_\alpha \nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$ より

$$\frac{u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu}{c^2} + \frac{h^{\mu\alpha} \nabla_\alpha p}{\rho c^2 + \rho e + p} = 0 \quad (7.4.24)$$

という式が出てくる。これが相対論的流体の運動量保存則である。この式の左辺は u^μ に垂直であるという拘束条件に従うため、この式の独立な成分は 3 つである。測地線方程式 (7.2.1) は u^μ を用いると

$$u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu = u^\alpha (\partial_\alpha u^\mu + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} u^\beta) \quad (7.4.25)$$

$$= \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \quad (7.4.26)$$

$$= 0 \quad (7.4.27)$$

と書けるが、完全流体の運動量保存則 (7.4.24) は測地線方程式の右辺に圧力勾配 $\nabla_\alpha p$ による力を表す項が加わったものと解釈できる。 $a^\mu = u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu$ は 4 元加速度と呼ばれ、運動量保存則を計算する際に脚注で説明した関係

$$u_\mu a^\mu = u_\mu u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu = 0 \quad (7.4.28)$$

は 4 元速度と 4 元加速度が常に直交することを表す。

非相対論的極限の場合は

$$\rho c^2 + \rho e + p \simeq \rho c^2 \quad (7.4.29)$$

$$u^\alpha \nabla_\alpha \simeq \frac{D}{Dt} \quad (7.4.30)$$

と近似し、第 i 成分について

$$h^{i\alpha} \nabla_\alpha p \simeq \left(\eta^{i\alpha} + \frac{u^i u^\alpha}{c^2} \right) \partial_\alpha p \quad (7.4.31)$$

$$\simeq \frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{v^i}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{v^i v^j}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x^j} \quad (7.4.32)$$

$$\simeq \frac{\partial p}{\partial x^i} \quad (7.4.33)$$

^{†23} ただし、

$$\begin{aligned} u_\alpha u^\beta \nabla_\beta u^\alpha &= u^\beta \nabla_\beta (u_\alpha u^\alpha) - u^\alpha u^\beta \nabla_\beta u_\alpha \\ &= -g^{\alpha\gamma} u_\gamma u^\beta \nabla_\beta u_\alpha = -u_\gamma u^\beta \nabla_\beta u^\gamma \end{aligned}$$

より、 $u_\alpha u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = 0$ という関係を用いた。

と近似すれば、運動量保存則の第 i 成分は

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0 \quad (7.4.34)$$

と書け、オイラー方程式に一致することが分かる。一方で運動量保存則の第 0 成分については、

$$h^{0\alpha}\nabla_{\alpha}p \simeq -\frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{v^i}{c}\frac{\partial p}{\partial x^i} = \frac{1}{c}\mathbf{v}\cdot\nabla p \quad (7.4.35)$$

と近似し、第 1 項を

$$u^{\alpha}\nabla_{\alpha}u^0 \simeq \frac{Du^0}{Dt} \quad (7.4.36)$$

$$= \frac{D}{Dt} \left(\frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \quad (7.4.37)$$

$$= \frac{D}{Dt} \left[c \left\{ 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}\right) \right\} \right] \quad (7.4.38)$$

$$\simeq \frac{1}{c}\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2}v^2 \right) \quad (7.4.39)$$

と近似すれば、

$$\rho\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2}v^2 \right) + \mathbf{v}\cdot\nabla p = 0 \quad (7.4.40)$$

という式になる。これは運動エネルギー保存則、すなわちオイラー方程式の両辺に $\mathbf{v}\cdot$ を作用させた式である。

7.4.3 エネルギー保存則

4 元速度と 4 元加速度の直交関係 ($u_{\mu}u^{\nu}\nabla_{\nu}u^{\mu} = 0$) を用いて、エネルギー運動量保存則の u^{μ} に平行な成分 $-u_{\mu}\nabla_{\nu}T^{\mu\nu} = 0$ を実際に計算すると、次の式が出てくる。

$$u^{\mu}\nabla_{\mu}(\rho c^2 + \rho e) + (\rho c^2 + \rho e + p)\nabla_{\mu}u^{\mu} = 0 \quad (7.4.41)$$

これが相対論的流体のエネルギー保存則である。質量保存則 (7.4.4) より u^{μ} の 4 元発散について

$$\nabla_{\mu}u^{\mu} = -\frac{1}{\rho}u^{\mu}\nabla_{\mu}\rho \quad (7.4.42)$$

が成り立つことを使うと、エネルギー保存則は

$$u^{\mu}\nabla_{\mu}(\rho c^2 + \rho e) - \left(c^2 + e + \frac{p}{\rho} \right) u^{\mu}\nabla_{\mu}\rho = 0 \quad (7.4.43)$$

とも書ける。熱力学第 1 法則 (付録 3.A.2 参照)

$$de = Tds - pd \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (7.4.44)$$

を用いると、

$$d(\rho c^2 + \rho e) = (c^2 + e)d\rho + \rho de \quad (7.4.45)$$

$$= \left(c^2 + e + \frac{p}{\rho} \right) d\rho + \rho T ds \quad (7.4.46)$$

となるので、この法則を式 (7.4.43) に適用することで、

$$u^\mu \nabla_\mu s = 0 \quad (7.4.47)$$

が言える。これは単位質量あたりのエントロピーが 4 元流線に沿って一定に保たれることを表す。これが相対論的完全流体における熱輸送の式である。

非相対論的極限では、式 (7.4.41) の第 1 項をラグランジュ微分、第 2 項の 4 元発散を $\nabla \cdot \mathbf{v}$ に近似することで、

$$\frac{D}{Dt}(\rho c^2 + \rho e) + (\rho c^2 + \rho e + p)\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (7.4.48)$$

となる。第 1 項を計算して質量保存則を使うことで、この式は

$$\rho \frac{De}{Dt} + p\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (7.4.49)$$

と書き換えられる。これは非相対論的完全流体の内部エネルギー保存則と一致する。熱輸送の式も、ラグランジュ微分に近似することによって非相対論的完全流体のエントロピーについての方程式に一致することが直ぐに分かる。

7.5 シュバルツシルト計量 (応用例)

系が球対称 (計量が角度座標に依存しない) であり、原点以外は真空 $T^{\mu\nu} = 0$ で、原点 $r = 0$ に質量 M の質点が置かれている、という理想的な設定の下でアインシュタイン方程式を解くと、解の 1 つとして次の線素を与える静的な (座標時 t に依存しない) 計量が見つかる。

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (7.5.1)$$

この解はシュバルツシルト解と呼ばれる。 g_{tt} がゼロになる

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (7.5.2)$$

はシュバルツシルト半径と呼ばれる。 $r \gg r_s$ では平坦な時空に近似できる。つまり、適切に座標変換すれば、 $r \gg r_s$ の領域のあらゆる世界点で計量がミンコフスキー計量に近似できるような座標をとれる。実際、

$$\chi = \frac{1}{2} \left(r - \frac{r_s}{2} + \sqrt{r^2 - r_s r} \right) \longleftrightarrow r = \chi \left(1 + \frac{r_s}{4\chi} \right)^2$$

と座標変換すれば、

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - r_s/(4\chi)}{1 + r_s/(4\chi)} \right)^2 cdt^2 + \left(1 + \frac{r_s}{4\chi} \right)^4 (d\chi^2 + \chi^2 d\theta^2 + \chi^2 \sin^2 \theta d\phi^2)$$

という計量が得られる。これは等方座標と呼ばれる。これを更に、3次元球座標からデカルト座標への変換のように

$$x = \chi \sin \theta \cos \phi, \quad y = \chi \sin \theta \sin \phi, \quad z = \chi \cos \theta \quad (7.5.3)$$

と変換すれば、 $\chi = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ として

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - r_s/(4\chi)}{1 + r_s/(4\chi)} \right)^2 cdt^2 + \left(1 + \frac{r_s}{4\chi} \right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (7.5.4)$$

という計量になる。この計量は $\chi = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg r_s$ の領域で $\eta_{\mu\nu}$ に近似できる。

また、シュバルツシルト計量の g_{tt} は

$$g_{tt} = -1 + \frac{2GM}{c^2 r} \quad (7.5.5)$$

なので、確かに非相対論的極限では $\phi_g = -GM/r$ の重力場を表すことも分かる^{†24}。ニュートン力学において、球対称の系で注目する物体の r 座標より内側にある物質が作る重力場は、それらの物質が全て原点に位置していると考えた場合の重力場に一致するという定理がある。このことは一般相対論の場合にも言える。つまり、太陽を球対称として考える場合には、太陽の外側^{†25}の計量は太陽の質量が原点に集まっていると考えたときのシュバルツシルト計量を使うことができる (バーコフの定理)。よって、この計量は中心星による重力を受ける物質の、自己重力を無視した運動を考える際に使われる。

7.5.1 [トピック] 水星の近日点移動

太陽質量 $M_\odot = 1.989 \times 10^{30}$ kg が全て原点にあると考えたときのシュバルツシルト半径は 3 km であり、実際の太陽は 100 万 km のオーダーの空間スケールで存在しているので、太陽の周りの時空はほとんど平坦である。よって、光速に比べて十分に小さい速度を持つ物体の運動は、ニュートン力学によってほぼ正確に記述される。ニュートン力学におけるケプラー運動を考えると、惑星は太陽を焦点とする楕円運動をする^{†26}。惑星の公転軌道は、図 7.2 のキャプショ

^{†24} 正確に言うと、非相対論的極限で重力ポテンシャルが $-GM/r$ となるという要請から係数の具体的な値が $2GM/c^2$ に決定される、という過程を辿って導出された解がシュバルツシルト解である。

^{†25} 太陽質量を $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ kg、太陽半径を光球までの半径 $R_\odot = 6.96 \times 10^8$ m とすると、太陽コア ($r < 0.25R_\odot$ の領域) の質量が M_\odot の約半分、対流層より内側 ($r < 0.7R_\odot$ の領域) の質量が約 $0.98M_\odot$ なので、この場合の「太陽の外側」は光球の外側と考えれば十分である。

^{†26} ケプラー運動や楕円図形についての基本的な知識は適宜力学の教科書を参考にして欲しい。太陽系惑星軌道の進化や人工衛星制御に興味のある方は、例えば木下宙 (1998) を薦める。

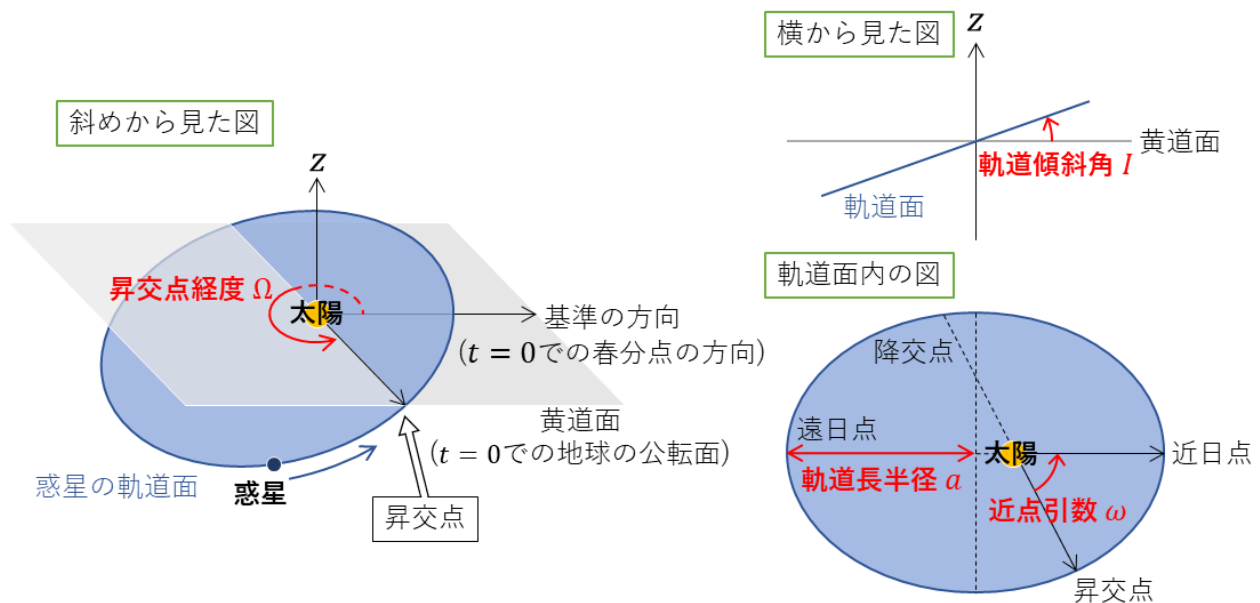


図 7.2 軌道要素：赤く示した 4 つのパラメータと楕円軌道の離心率 e 、 $t = 0$ における惑星の軌道内での位置を決めるパラメータ (例えば元期近点離角 σ) の計 6 パラメータによって、惑星の軌道と運動は一意に決まる。例えば元期として J2000.0 が用いられている場合は、地球時の 2000 年 1 月 1 日正午が $t = 0$ 。 z 軸は地球の公転の向きと右ねじの関係になるようにとる。軌道傾斜角 I については、惑星が z 軸正の方向から見て反時計回り (順行) に公転していれば 0 度から 90 度の間にとり、時計回り (逆行) のときには 90 度から 180 度の間にとる。 ω の代わりに、近日点の基準方向からの経度を表す近日点経度 $\varpi = \omega + \Omega$ が用いられることもある。

ンで説明してある 6 個のパラメータによって、元期 ($t = 0$) における黄道面と春分点^{†27} に対して一意に記述することができる。このような 6 パラメータのことを軌道要素^{†28} と言う。ニュートン力学の範疇で 2 体問題、すなわち太陽と惑星の 2 天体のみを考えて運動方程式を解いた場合、楕円運動の軌道要素は積分定数として出てくるため、時間に依らない。しかし、現実には惑星の軌道要素はごく僅かに時間変化していることが観測される。特に水星軌道の近日点の移動については、一般相対論の裏付けの文脈で話題に上がる。

^{†27} 地球の自転軸は公転面に対して垂直ではなく約 23.4 度傾いている。これに関連して地球の赤道面と公転面も角度をなすが、両者の交線上に太陽が位置する時が年に 2 回ある。このときの太陽に対する地球の位置を春分点または秋分点と言う。

^{†28} 関係する英用語は次の通り。軌道 = orbit, 黄道 = ecliptic, 赤道 = equator, 春分点 (秋分点) = equinox, 昇交点 = ascending node, 近日点 = perihelion, 近点 = periapsis, 経度 = longitude, 引数 = argument, 元期 = epoch, 歳差 = precession, 楕円 = ellipse, 離心率 = eccentricity, 傾斜角 = inclination, 摂動 = perturbation, 真近点角 (楕円軌道の焦点を原点に、近点から軌道上の天体まで測った角度 f) = true anomaly, 離心近点角 (焦点と近点を結ぶ直線に対して軌道上の天体から下ろした垂線の延長が、楕円軌道に外接する真円に交わる点を P としたとき、外接円の中心を原点に近点から点 P まで測った角度 u) = eccentric anomaly, 平均近点角 (ケプラー方程式の右辺 l) = mean anomaly

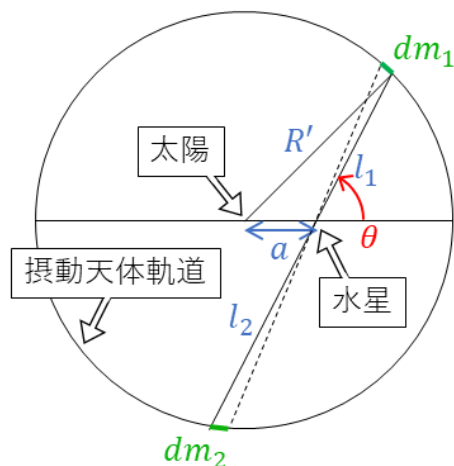


図 7.3 水星と摂動天体軌道の位置関係

地球の公転面や春分点の時間変化 (歳差) については、太陽や自転軸の天球上での動きを地上から観測することによって、元期における黄道面や春分点に対する変化として記述することができる。すると、地上で観測した各惑星の軌道の変化から歳差の影響を引くことで、各惑星の軌道要素の時間変化が決定される。このようにして決定された水星の近日点経度 $\varpi = \omega + \Omega$ の変化の観測値は

$$\left(\frac{d\varpi}{dt} \right)_{\text{観測}} = +574 \text{ 秒角/100 年} \quad (7.5.6)$$

程度であることが知られている (Cox, 2002)^{†29}。この 574 という数字のうち、531 程度の部分は他の惑星 (主に金星、地球、木星) の重力による摂動としてニュートン力学の範疇で説明され、残りの 43 程度の部分は一般相対論を用いて 2 体問題を考えることによって説明される。以下では、まず前者の摂動の効果の簡単な見積もりとして Price & Rush (1979) の方法を紹介した後、後者の一般相対論的效果の説明をする。

外惑星による摂動のニュートン力学的効果

水星は基本的には太陽の重力に従って公転しているが、質量の大きな外惑星が存在すると、外惑星からも微小ながら引力を受け、それによって軌道がごく僅かに変化する。水星と外惑星の位置関係は周期的に変化するので、このような摂動の効果も周期的であることが期待されるが、外惑星による摂動の中でも、特に水星と外惑星の公転周期 1 周分で平均した成分、つまり外惑星との具体的な位置関係に依らない平均的な成分 (永年摂動) が水星の近日点移動の主な原因であることが知られている^{†30}。この永年摂動による近日点の移動量を簡単に見積もる。

^{†29} 1 秒角は 1 度の 1/3600 である。上記の観測値は元期 J2000.0 の値である。

^{†30} 詳しくは例えば木下宙 (1998) の付録 C を読んで欲しい。

まずは、太陽と水星と摂動天体 1 つが存在する状況を考え、後から水星に比較的近くて質量の大きい天体 (金星、地球、火星、木星、土星) について和をとる。問題を簡単にするために次の仮定をする。以後外惑星 (摂動天体) についての量にはプライム (') を付ける。

1. 水星軌道について、傾斜角 $I = 0$ (実際は 7 度程度) とする。楕円軌道の平均的な半径を a とする。つまり、水星の太陽からの距離 r は、水星が公転するのに伴い a を中心として振動する。
2. 摂動天体の軌道は傾斜角 $I' = 0$ の円軌道 ($e' = 0$) とする。つまり、水星と摂動天体の軌道面は一致する。

摂動天体による永年摂動は、その円軌道上で一様な質量密度を持つ輪による摂動と等価である。輪の総質量は摂動天体の質量に一致する。つまり、摂動天体の質量を M' 、摂動天体軌道の半径を R' とすれば、輪の質量密度は

$$\lambda' = \frac{M'}{2\pi R'} \tag{7.5.7}$$

と書ける。図 7.3 のように角度 θ をとり、水星と輪の一部の間の距離を l_1, l_2 とする。輪の微小区間 ds_i の質量 dm_i は

$$dm_i = \lambda' ds_i \simeq \lambda' l_i d\theta \tag{7.5.8}$$

と書けるので、図の 2 つの微小質量が水星の単位質量あたりに及ぼす重力は

$$d\mathbf{F} = G \left(\frac{dm_1}{l_1^2} - \frac{dm_2}{l_2^2} \right) \hat{\mathbf{l}} \tag{7.5.9}$$

と書ける。 $\hat{\mathbf{l}}$ は水星から dm_1 の向きの単位ベクトルである。対称性より、 $d\mathbf{F}$ を円軌道で積分すると、太陽と水星を結ぶ方向に平行な成分しか残らない。よって、初めから平行な成分のみを積分することにする。すると、円状の輪全体が水星に及ぼす力 (太陽による引力と反対の向きが正) は

$$F(a) = \int_{\text{半円}} d\mathbf{F} \cdot \cos \theta \tag{7.5.10}$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} G\lambda' \frac{l_2 - l_1}{l_1 l_2} \cos \theta d\theta \tag{7.5.11}$$

と書ける。余弦定理より

$$R'^2 = a^2 + l_1^2 - 2al_1 \cos(\pi - \theta) \tag{7.5.12}$$

$$R'^2 = a^2 + l_2^2 - 2al_2 \cos \theta \tag{7.5.13}$$

が成り立つことを用いれば

$$F(a) = \frac{2G\lambda'a}{R'^2 - a^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \quad (7.5.14)$$

$$= \frac{GM'a}{2R'(R'^2 - a^2)} \quad (7.5.15)$$

と計算できる。

$dr/dt = \dot{r}$ と書くことにすると、水星の運動方程式は

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = \Phi(r) \quad (7.5.16)$$

と書ける。 ϕ は水星の軌道面内での位置を表す角度変数で、 $\Phi(r)$ は水星が受ける太陽からの重力と摂動力の合計である^{†31}。水星の角運動量は一定なので、 $r^2\dot{\phi} = h$ (h は定数) と書くと、

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = \Phi(r) \quad (7.5.17)$$

と書ける。水星の楕円軌道を円軌道からの微小なずれとして捉え、上記の運動方程式をテイラー展開して考える。まず軌道が半径 a の円軌道 ($r(t) = a$) だと仮定すると、上式は

$$-\frac{h^2}{a^3} = \Phi(a) \quad (7.5.18)$$

となる。次に $X(t) = r(t) - a$ として、 $|X|/a \ll 1$ の下で式 (7.5.17) を展開し、2 次以上の項は無視する。

$$\ddot{X} - \frac{h^2}{(a+X)^3} = \Phi(a+X) \quad (7.5.19)$$

$$\ddot{X} - \frac{h^2}{a^3} \left(1 - \frac{3X}{a}\right) = \Phi(a) + \Phi'(a)X \quad (7.5.20)$$

式 (7.5.18) より h を消去すると

$$\ddot{X} + \left[-\frac{3}{a}\Phi(a) - \Phi'(a)\right] X = 0 \quad (7.5.21)$$

となる。これは調和振動子の微分方程式であり、振動周期は

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{-(3/a)\Phi(a) - \Phi'(a)}} \quad (7.5.22)$$

と書ける。近日点とは $X(t)$ が最小値をとるときの水星の位置のことである。よって、近日点から次の近日点までに水星が移動する角度は、水星軌道をほぼ円軌道とみなせば $\dot{\phi}T = hT/a^2$ で

^{†31} 太陽からの重力が支配的なので $\Phi(r) < 0$ である。

あり、1 周期での近日点移動量は

$$\Delta\phi = \dot{\phi}T - 2\pi \quad (7.5.23)$$

$$= 2\pi \left(3 + a \frac{\Phi'(a)}{\Phi(a)} \right)^{-1/2} - 2\pi \quad (7.5.24)$$

と計算できる。摂動力が無い場合は $\Phi(a) = -GM_{\odot}/a^2$ であるが、これを実際に上式に代入して計算すると $\Delta\phi = 0$ になる。

太陽からの引力を F_0 、5 惑星による摂動力の合計を $F(a)$ と書くと、今までの議論より

$$\Phi(a) = F_0(a) + F(a), \quad \Phi'(a) = -\frac{2}{a}F_0(a) + F'(a) \quad (7.5.25)$$

$$\text{ただし, } F_0(a) = -\frac{GM_{\odot}}{a^2}, \quad F(a) = \sum_{\text{金地火木土}} \frac{GM'a}{2R'(R'^2 - a^2)} \quad (7.5.26)$$

と書ける。これを式 (7.5.24) に代入すると、

$$\Delta\phi + 2\pi = 2\pi \left[\frac{1 + (3F + aF')/F_0}{1 + F/F_0} \right]^{-1/2} \quad (7.5.27)$$

$$\simeq 2\pi \left(1 - \frac{3F(a) + aF'(a)}{2F_0(a)} \right) \left(1 + \frac{F(a)}{2F_0(a)} \right) \quad (7.5.28)$$

$$\simeq 2\pi \left(1 - \frac{2F(a) + aF'(a)}{2F_0(a)} \right) \quad (7.5.29)$$

と計算できる。ただし、2 段目の近似では 1 段目の分母分子のそれぞれを $|F|/|F_0| \ll 1$ の下で展開して 2 次以上の項を無視し、3 段目の近似では 2 段目の乗算を実行し、2 次以上の微小量を無視した。以上より、水星の公転周期を P とすると、近日点移動の割合は

$$\frac{\Delta\phi}{P} = \frac{\pi}{P} \frac{2F(a) + aF'(a)}{-F_0(a)} \quad (7.5.30)$$

$$= \frac{\pi a^3}{2PM_{\odot}} \sum_{\text{金地火木土}} \frac{M'(3R'^2 - a^2)}{R'(R'^2 - a^2)^2} \quad (7.5.31)$$

と書ける。

$$P = 0.2408 \times (\text{地球の公転周期}), \quad a = 5.791 \times 10^{10} \text{ m}, \quad M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg} \quad (7.5.32)$$

という値 (Cox, 2002) と表 7.1 の 1,2 列目に示した各摂動天体のデータを用い、式 (7.5.31) の各摂動天体の項とその合計を計算した結果が表 7.1 の 3 列目である。表を見ると、水星にいちばん近い金星と大質量を持つ木星からの寄与が大きいことが分かる。因みに、式 (7.5.31) を使って天王星による寄与を計算すると 0.14 秒角 / 100 年となり、5 惑星に比べて無視できる量である。

表 7.1 各摂動天体のデータ (Cox, 2002) と水星の近日点移動への寄与

摂動天体	質量 (10^{24} kg)	軌道半径 (10^{10} m)	式 (7.5.31) への寄与 (秒角 / 100 年)
金星	4.869	10.82	269.1
地球	5.974	14.96	92.4
火星	0.6419	22.79	2.4
木星	1899	77.84	160.2
土星	568.5	142.7	7.7
合計	—	—	532

一般相対論的効果

次に一般相対論的効果による水星の近日点移動を説明する^{†32}。太陽が作るシュバルツシルト計量に従って運動するテスト粒子 (自分自身は時空を曲げる質量を持たない点状物体) の運動を考える。まず、変分法を用いて測地線方程式を書き下す。 $\dot{r} = dr/d\tau$ などと書いて

$$L = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - r_s/r} + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \quad (7.5.33)$$

をラグランジュの運動方程式 (7.2.11) に代入すると、 t, ϕ, θ についての式は

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} \right] = 0, \quad \frac{d}{d\tau} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0 \quad (7.5.34)$$

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta}) - r^2 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (7.5.35)$$

となる。式 (7.5.35) より、 $\tau = 0$ で $\theta = \pi/2, \dot{\theta} = 0$ とすれば、以後常に $\theta = \pi/2$ となることが分かる。つまり、テスト粒子はニュートン力学の場合と同じように 1+2 次元の「平面」内を運動するので、以後 $\theta = \pi/2$ として考える。(7.5.34) の 2 式より、定数 k, h を用いて

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \dot{t} = \frac{k}{c}, \quad r^2 \dot{\phi} = h \quad (7.5.36)$$

と書ける。この 2 定数はそれぞれニュートン力学の場合の力学的エネルギーと角運動量に対応するものである。ラグランジュの運動方程式の r についての式を考える代わりに、4 元速度の規格化条件 $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -c^2$ を書き下して、上式より $\dot{t}, \dot{\phi}$ を消去すると、

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{c^2 r_s}{r} - \frac{r_s h^2}{r^3} = k^2 - c^2 \quad (7.5.37)$$

という式が出てくる。これをニュートン力学の場合の角運動量とエネルギーに関する式

$$r^2 \dot{\phi} = h \quad (7.5.38)$$

$$\frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - \frac{GM_\odot}{r} = E \quad (7.5.39)$$

^{†32} Pollock (2003) を参考にした。

と見比べて、ニュートン極限では $dt \simeq d\tau$ であることを考慮すると、確かに h はケプラー運動の場合の h と同じ定数であり、

$$\frac{k^2 - c^2}{2} = E \quad (7.5.40)$$

という対応も分かる。 $-r_s h^2 / r^3$ という項がニュートンの重力ポテンシャルに対する一般相対論的補正であると解釈できる。

$u = 1/r$ とおくと、

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \dot{u} \quad (7.5.41)$$

$$= -\frac{1}{u^2} \cdot h u^2 \frac{du}{d\phi} \quad (7.5.42)$$

$$= -h \frac{du}{d\phi} \quad (7.5.43)$$

と計算できるので、 $u' = du/d\phi$ と書くと、式 (7.5.37) は

$$(u')^2 + u^2 - \frac{c^2 r_s u}{h^2} - r_s u^3 = \frac{k^2 - c^2}{h^2} \quad (7.5.44)$$

と書ける。更に、両辺を ϕ で微分すると、

$$u'' + u - \frac{GM_\odot}{h^2} - \epsilon \left(\frac{h^2 u^2}{GM_\odot} \right) = 0 \quad (7.5.45)$$

$$\text{ただし, } \epsilon = \frac{3G^2 M_\odot^2}{c^2 h^2} \quad (7.5.46)$$

となる。 ϵ は無次元である。ケプラー運動の公式

$$h = \sqrt{GM_\odot a(1 - e^2)} \quad (7.5.47)$$

を用いて ϵ を見積もると^{†33}、

$$\epsilon = \frac{3GM_\odot}{c^2 a(1 - e^2)} = 7.99 \times 10^{-8} \quad (7.5.48)$$

と計算でき、小さい数である。よって、 ϵ の項を摂動とみなし、摂動展開することによって u の近似解を求める。

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots \quad (7.5.49)$$

を式 (7.5.45) に代入して、 ϵ について 0 次の項と 1 次の項をそれぞれ取り出すと、

$$0 \text{ 次: } u_0'' + u_0 - \frac{GM_\odot}{h^2} = 0 \quad (7.5.50)$$

$$1 \text{ 次: } u_1'' + u_1 - \frac{h^2 u_0^2}{GM_\odot} = 0 \quad (7.5.51)$$

^{†33} 太陽質量 $M_\odot = 1.989 \times 10^{30}$ kg、水星軌道長半径 $a = 5.791 \times 10^{10}$ m、水星軌道離心率 $e = 0.2056$

となる。0 次の式はケプラー運動の場合の方程式であり、

$$u_0 = \frac{GM_\odot}{h^2}(1 + e \cos \phi) \quad (7.5.52)$$

と解ける。ただし、 u_0 が最大値を取るときの ϕ をゼロとした。これを代入することで 1 次の式は

$$u_1'' + u_1 = \frac{GM_\odot}{h^2}(1 + 2e \cos \phi + e^2 \cos^2 \phi) \quad (7.5.53)$$

$$= \frac{GM_\odot}{h^2} \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + \frac{2GM_\odot e}{h^2} \cos \phi + \frac{GM_\odot e^2}{2h^2} \cos 2\phi \quad (7.5.54)$$

と書ける。この微分方程式は次のような解を持つ。

$$u_1 = \frac{GM_\odot}{h^2} \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + \frac{GM_\odot e}{h^2} \phi \sin \phi - \frac{GM_\odot e^2}{6h^2} \cos 2\phi \quad (7.5.55)$$

ϵ について 1 次までを考慮した解は次のようになる。

$$u \simeq u_0 + \epsilon u_1 \quad (7.5.56)$$

$$= \frac{GM_\odot}{h^2} \left[1 + e \cos \phi + \epsilon e \phi \sin \phi + \epsilon \left(1 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{6} \cos 2\phi\right) \right] \quad (7.5.57)$$

$$\simeq \frac{GM_\odot}{h^2} \left[1 + e \cos [\phi(1 - \epsilon)] + \epsilon \left(1 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{6} \cos 2\phi\right) \right] \quad (7.5.58)$$

$$\simeq \frac{GM_\odot}{h^2} [1 + e \cos [\phi(1 - \epsilon)]] \quad (7.5.59)$$

ただし 3 段目の近似では、 $\cos[\phi(1 - \epsilon)]$ を ϵ について展開すると

$$\cos[\phi(1 - \epsilon)] \simeq \cos \phi + \epsilon \cdot \phi \sin \phi \quad (7.5.60)$$

と書けることを用いた。

近日点とは、 $u = 1/r$ が最大値のときのテスト粒子の位置 ϕ のことである。式 (7.5.59) より、 u の振動周期は ϕ にして

$$\frac{2\pi}{1 - \epsilon} \simeq 2\pi(1 + \epsilon) \quad (7.5.61)$$

と書けるので、1 周期での近日点移動量は $\Delta\phi = 2\pi\epsilon$ と書ける。すなわち、水星の公転周期を $P = 0.2408$ 年として、式 (7.5.48) の見積もりを用いると、近日点移動の割合は

$$\frac{\Delta\phi}{P} = \frac{6\pi GM_\odot}{c^2 P a(1 - e^2)} = 43 \text{ 秒角} / 100 \text{ 年} \quad (7.5.62)$$

と求まる^{†34}。

^{†34} ケプラーの第 3 法則 $a^3/P^2 = GM_\odot/(4\pi^2)$ を用いればこの表式から GM_\odot を消去することもできる。

7.6 電磁場の方程式

電磁場が従うべき方程式を説明する。

7.6.1 完全反対称テンソル

共変形式の電磁場を考える上で知っておいた方がよい概念である完全反対称テンソルについて説明する。まず、レヴィ-チヴィタの記号 $[\mu\nu\lambda\sigma]$ を次のように定義する。

- $[0123] = 1$
- $0, 1, 2, 3$ の数字からなる順序組 $(\mu, \nu, \lambda, \sigma)$ に対して、例えば

$$(2, 3, 1, 0) \longrightarrow (2, 1, 3, 0), \quad (3, 2, 1, 0) \longrightarrow (1, 2, 3, 0)$$

などのように、任意の 2 つの数字を入れ替える操作について、 $(\mu, \nu, \lambda, \sigma)$ が n 回の入れ替えで $(0, 1, 2, 3)$ になるとき、

$$[\mu\nu\lambda\sigma] = (-1)^n$$

- 例えば $(1, 1, 2, 3)$ など、 $(\mu, \nu, \lambda, \sigma)$ に同じ数字が混じっているとき、

$$[\mu\nu\lambda\sigma] = 0$$

完全反対称テンソル $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ はレヴィ-チヴィタの記号を用いて次のように表される。

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} [\mu\nu\lambda\sigma] \quad (7.6.1)$$

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} = -\sqrt{-g} [\mu\nu\lambda\sigma] \quad (7.6.2)$$

g は計量の行列式である。 $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\epsilon^{\nu\mu\lambda\sigma}$ のように、任意の添え字を入れ替えると負号が付く。また、完全反対称テンソル同士の縮約には次のような性質がある。

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\mu\nu\lambda\delta} = - \begin{vmatrix} \delta^\alpha_\mu & \delta^\alpha_\nu & \delta^\alpha_\lambda \\ \delta^\beta_\mu & \delta^\beta_\nu & \delta^\beta_\lambda \\ \delta^\gamma_\mu & \delta^\gamma_\nu & \delta^\gamma_\lambda \end{vmatrix} \quad (7.6.3)$$

$$= -\delta^\alpha_\mu (\delta^\beta_\nu \delta^\gamma_\lambda - \delta^\beta_\lambda \delta^\gamma_\nu) + \delta^\alpha_\nu (\delta^\beta_\mu \delta^\gamma_\lambda - \delta^\beta_\lambda \delta^\gamma_\mu) - \delta^\alpha_\lambda (\delta^\beta_\mu \delta^\gamma_\nu - \delta^\beta_\nu \delta^\gamma_\mu) \quad (7.6.4)$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\mu\nu\gamma\delta} = -2 \begin{vmatrix} \delta^\alpha_\mu & \delta^\alpha_\nu \\ \delta^\beta_\mu & \delta^\beta_\nu \end{vmatrix} \quad (7.6.5)$$

$$= -2(\delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu \delta^\beta_\mu) \quad (7.6.6)$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\mu\beta\gamma\delta} = -6\delta^\alpha_\mu \quad (7.6.7)$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -24 \quad (7.6.8)$$

δ^μ_ν はクロネッカーのデルタ記号である。

7.6.2 電磁場テンソル

相対論において電磁場は 2 階反対称テンソル $F_{\mu\nu}$ ($F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$) で記述される。これは電磁場テンソルと呼ばれる。反対称性より、対角成分はゼロであり、独立な成分の数は 6 個である。電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ と裏表の概念として、双対電磁場テンソル (dual of the electromagnetic tensor) というものが次のように定義される。

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \quad (7.6.9)$$

前述した完全反対称テンソルの性質を用いれば、

$$\epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} *F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\rho\sigma\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \quad (7.6.10)$$

$$= -(\delta^\alpha_\rho\delta^\beta_\sigma - \delta^\alpha_\sigma\delta^\beta_\rho)F_{\alpha\beta} \quad (7.6.11)$$

$$= -2F_{\rho\sigma} \quad (7.6.12)$$

と計算できるので、逆に表すと

$$F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} *F^{\alpha\beta} \quad (7.6.13)$$

という関係があることが分かる。考えている世界点で 4 元速度 u^μ ($u_\mu u^\mu = -c^2$) を持つ観測者から見た電場 E^μ と磁場 B^μ は、 $F^{\mu\nu}$, $*F^{\mu\nu}$ と次のような関係にある。

$$\begin{cases} F^{\mu\nu} = u^\mu E^\nu/c^2 - u^\nu E^\mu/c^2 - \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}u_\alpha B_\beta/c \\ *F^{\mu\nu} = u^\mu B^\nu/c - u^\nu B^\mu/c + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}u_\alpha E_\beta/c^2 \end{cases} \quad (7.6.14)$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} E^\mu = F^{\mu\nu}u_\nu \\ B^\mu = *F^{\mu\nu}u_\nu/c \end{cases} \quad (7.6.15)$$

一般に 2 階対称テンソルと 2 階反対称テンソルのスカラー縮約がゼロであることを用いると、

$$u_\mu E^\mu = F^{\mu\nu}u_\mu u_\nu = 0, \quad u_\mu B^\mu = *F^{\mu\nu}u_\mu u_\nu/c = 0 \quad (7.6.16)$$

が常に成り立つ。つまり、 E^μ, B^μ と u^μ は直交するという拘束条件に従うので、 E^μ, B^μ の独立な成分は 3 個であることが分かる。

特にローレンツ系 (ct, x, y, z) で静止した観測者 $(u^\mu) = (c, 0, 0, 0)$ を想定した場合、式 (7.6.14) は

$$cF^{0i} = E^i = E_i, \quad F^{ij} = \epsilon^{0ij\beta}B_\beta \quad (7.6.17)$$

$$*F^{0i} = B^i = B_i, \quad c *F^{ij} = -\epsilon^{0ij\beta}E_\beta \quad (7.6.18)$$

と書けるので、電磁場テンソルを行列表示すると

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (7.6.19)$$

$$(F_{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}F^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (7.6.20)$$

$$(*F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ -B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ -B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{pmatrix} \quad (7.6.21)$$

$$(*F_{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}*F^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{pmatrix} \quad (7.6.22)$$

となる。またこの場合、式 (7.6.15) より、

$$(E^\mu) = (E_\mu) = (0, E_x, E_y, E_z), \quad (B^\mu) = (B_\mu) = (0, B_x, B_y, B_z) \quad (7.6.23)$$

というように E^μ, B^μ の第 0 成分 (t 成分) はゼロであることも分かる。

7.6.3 マクスウェル方程式

マクスウェル方程式は次のように表される。

$$\nabla_\nu *F^{\mu\nu} = 0 \quad (7.6.24)$$

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu \quad (7.6.25)$$

J^μ は 4 元電流である。 $F^{\mu\nu}$ についての 2 階共変微分をリーマンテンソルで表し、 $F^{\mu\nu}$ の反対称性を用いることで、

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)F^{\mu\nu} = R^\mu{}_{\alpha\mu\nu}F^{\alpha\nu} + R^\nu{}_{\alpha\mu\nu}F^{\mu\alpha} = 0 \quad (7.6.26)$$

が恒等的に満たされることが分かる。 $*F^{\mu\nu}$ についても同様である。マクスウェル方程式 (7.6.24), (7.6.25) は合わせて 8 個の方程式を表しているが、それぞれの式の両辺の 4 元発散は上式の拘束条件に従うため、独立な自由度は 6 である。つまり、 J^μ と境界条件が与えられれば電磁場テンソルの 6 成分が決定される。ただし、与える J^μ は次の拘束条件を満たす必要がある。式 (7.6.25) の両辺の 4 元発散をとると、

$$\mu_0 \nabla_\mu J^\mu = \nabla_\mu \nabla_\nu F^{\mu\nu} = \nabla_\nu \nabla_\mu F^{\mu\nu} = \nabla_\nu (-\mu_0 J^\nu) \quad (7.6.27)$$

$$\rightarrow \nabla_\mu J^\mu = 0 \quad (7.6.28)$$

となる。これは電荷保存則を表す。

式 (7.6.24) の左辺に $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}$ を作用させて完全反対称テンソルの性質を用いることで、

$$\begin{aligned} & \epsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} \nabla_\nu \left(\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon^{\nu\rho\sigma\mu} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} \nabla_\nu F_{\rho\sigma} \end{aligned} \quad (7.6.29)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (\delta^\nu_\alpha \delta^\rho_\beta \delta^\sigma_\gamma + \delta^\nu_\gamma \delta^\rho_\alpha \delta^\sigma_\beta + \delta^\nu_\beta \delta^\rho_\gamma \delta^\sigma_\alpha \\ &\quad - \delta^\nu_\alpha \delta^\rho_\gamma \delta^\sigma_\beta - \delta^\nu_\gamma \delta^\rho_\beta \delta^\sigma_\alpha - \delta^\nu_\beta \delta^\rho_\alpha \delta^\sigma_\gamma) \nabla_\nu F_{\rho\sigma} \end{aligned} \quad (7.6.30)$$

$$= \nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} \quad (7.6.31)$$

$$= \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} \quad (7.6.32)$$

と計算できる。ただし、最後の段への変形では、共変微分に現れるクリストッフエル記号がその対称性から相殺して消えてしまうことを用いた。つまり、式 (7.6.24) は

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0 \quad (7.6.33)$$

と書き換えることもできる。

特に、ローレンツ系において静止した観測者から見た電場 $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ と磁場 $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ を用いて書き下すと、式 (7.6.19), (7.6.21) より、式 (7.6.24) は

$$\text{第 0 成分: } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.6.34)$$

$$\text{第 } i \text{ 成分: } \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (7.6.35)$$

式 (7.6.25) は

$$\text{第 0 成分: } \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (7.6.36)$$

$$\text{第 } i \text{ 成分: } -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (7.6.37)$$

というように、節 2.1.2 で述べた形式で書けることが分かる。ただし、 $\rho_e = J^0/c$, $\mathbf{j} = (J^1, J^2, J^3)$ と書いた。つまり、この場合は電荷密度 ρ_e と 3 元電流密度 \mathbf{j} を用いて

$$(J^\mu) = (c\rho_e, \mathbf{j}) \quad (7.6.38)$$

と書ける。またこの場合、電荷保存則 (7.6.28) は

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (7.6.39)$$

と書けることも分かる。

7.6.4 ローレンツ力

電磁場中を運動する静止質量 m 、電荷 q の質点の運動方程式は、測地線方程式の右辺に次のような項を加えることによって表される。

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = \frac{q}{m} F^\mu{}_\gamma \frac{dx^\gamma}{d\tau} \quad (7.6.40)$$

特に非相対論的極限、すなわち計量がほぼミンコフスキー計量の場合には、上式の右辺の空間成分は、そのローレンツ系で静止した観測者から見た電磁場 \mathbf{E} , \mathbf{B} を用いて、

$$\frac{q}{m} F^i{}_\gamma \frac{dx^\gamma}{d\tau} \simeq \frac{q}{m} \eta^{i\alpha} F_{\alpha\gamma} \frac{dx^\gamma}{dt} \quad (7.6.41)$$

$$= \frac{q}{m} F_{i0} c + \frac{q}{m} F_{ij} v^j \quad (7.6.42)$$

$$= \frac{q}{m} (E_i + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_i) \quad (7.6.43)$$

と書ける。

7.6.5 電磁場のエネルギー運動量テンソル

電磁場のエネルギー運動量テンソルは次のように書ける。

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \quad (7.6.44)$$

特にローレンツ系において静止した観測者から見た電磁場 \mathbf{E} , \mathbf{B} を用いて書き下すと、少しの計算より次の形に書けることが分かる。

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} w & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y/c & \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z/c & \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (7.6.45)$$

$$\text{ただし, } w = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (7.6.46)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (7.6.47)$$

$$\sigma_{ij} = \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right) \quad (7.6.48)$$

w は電磁場のエネルギー密度、 \mathbf{S} はポインティングベクトル、 σ_{ij} はマクスウェルの応力テンソルである。

7.7 ローレンツ系での運動と対称性

今まで説明してきた諸物理量や法則のローレンツ系 (ct, x, y, z) での形、すなわち平坦な時空における形について見た後、時空間の対称性と大域的保存則の関係について述べる。

7.7.1 質点系のエネルギー運動量保存則

$v^i = dx^i/dt, v^2 = v_i v^i$ と書くと、4 元速度の規格化条件 $u_\mu u^\mu = -c^2$ は、ミンコフスキー計量の下で

$$u^0 u^0 \left(-1 + \frac{v^2}{c^2} \right) = -c^2 \quad \rightarrow \quad u^0 = \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.7.1)$$

と書ける。つまり、ローレンツ系での 4 元速度 u^μ は 3 元速度 $(v^i) = (v_x, v_y, v_z)$ を用いて

$$(u^\mu) = W(c, v_x, v_y, v_z) \quad (7.7.2)$$

$$\text{ただし,} \quad W = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.7.3)$$

と書ける。 W はローレンツ因子と呼ばれる。 $v/c \ll 1$ では $W \simeq 1$ で、3 元速度が光速に近づくほど W は大きくなる。

ローレンツ系ではエネルギー運動量保存則は次のように書ける。

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (7.7.4)$$

これは微分形式で書かれた保存則であり、ある世界点における局所的な保存則、すなわちその世界点での無限小の領域においてエネルギーや運動量が消えることはないという法則を表す。大域的な保存則、すなわちある有限の領域でエネルギーや運動量が保存されるという法則は、時空間の対称性に対応して表れる。一般の時空の場合において、常にそのような法則を考えられるわけではない。ローレンツ系 (平坦な時空) は、4 次元時空間に許される最大限の対称性を持っており^{†35}、次のように大域的な保存則を考えることができる (e.g. Gourgoulhon, 2013)。一般の時空の場合は後に述べる。

上式を 4 次元時空間上の区分的に滑らかな境界を持つ領域 \mathcal{V} で積分すると、

$$\int_{\mathcal{V}} \partial_\nu T^{\mu\nu} d^4x = 0 \quad (7.7.5)$$

と書ける。これにガウスの発散定理を適用すると、発散の 4 次元的体積分は領域 \mathcal{V} の 3 次元的境界 $\partial\mathcal{V}$ での面積分に置き換わるので、

$$\int_{\partial\mathcal{V}} T^{\mu\nu} dS_\nu = 0 \quad (7.7.6)$$

^{†35} 4 次元時空には最大で 10 個の独立な対称性が許される。後に説明する言葉を用いれば、最大で 10 個の独立なキリングベクトルが存在し得る。

と書ける。 dS_ν は領域 \mathcal{V} の外側を向いた方向付き面要素である。ここで、 \mathcal{V} として、2つの等座標時面 $t = t_1$ と $t = t_2$ ($t_1 < t_2$) に挟まれた領域を考える。 \mathcal{V} の境界のうちの等座標時面以外の部分からのエネルギーや運動量の流出は無いとする。つまり、孤立した系を考える。上式は

$$-\int_{(t=t_1)} T^{\mu 0} d^3x + \int_{(t=t_2)} T^{\mu 0} d^3x = 0 \quad (7.7.7)$$

と書ける。よって、系全体の 4 元運動量 Π^μ を

$$\Pi^\mu(t_1) = \frac{1}{c} \int_{(t=t_1)} T^{\mu 0} d^3x \quad (7.7.8)$$

と定義すれば、2つの座標時 t_1, t_2 について

$$\Pi^\mu(t_1) = \Pi^\mu(t_2) \quad (7.7.9)$$

が言える。つまり、上式で定義された $\Pi^\mu(t)$ は座標時 t に対して保存される。

それぞれが静止質量 m_a を持つ N 個の質点からなる系を考える。 a は各質点のラベルである。この系のエネルギー運動量テンソルは、デルタ関数を用いて次のように書ける。

$$T^{\mu 0}(x^\alpha) = \sum_{a=1}^N \int cd\tau m_a \delta^4(x^\alpha - z_a^\alpha(\tau)) u^\mu(x^\alpha) u^0(x^\alpha) \quad (7.7.10)$$

$z_a^\alpha(\tau)$ は a 番目の質点が描く世界線をパラメータ表示したものである^{†36}。よって、この系全体の 4 元運動量は

$$\Pi^\mu(t_1) = \frac{1}{c} \sum_{a=1}^N m_a \int_{(t=t_1)} d^3x \int cd\tau \delta^4(x^\alpha - z_a^\alpha(\tau)) u^\mu(x^\alpha) u^0(x^\alpha) \quad (7.7.11)$$

$$= \sum_{a=1}^N m_a \int_{(t=t_1)} d^3x \int cdt \delta^4(x^\alpha - z_a^\alpha(t)) u^\mu(x^\alpha) \quad (7.7.12)$$

$$= \sum_{a=1}^N m_a u^\mu(z_a^\alpha(t_1)) \quad (7.7.13)$$

と書ける。つまり、ある座標時 $t = t_1$ における a 番目の質点の 4 元運動量を、その座標時でのその質点の 4 元速度 $u_a^\mu(t_1)$ を用いて

$$P_a^\mu(t_1) = m_a u_a^\mu(t_1) \quad (7.7.14)$$

と定義すれば、各質点の 4 元運動量の総和

$$\Pi^\mu(t) = \sum_{a=1}^N P_a^\mu(t) = \sum_{a=1}^N m_a u_a^\mu(t) \quad (7.7.15)$$

^{†36} 完全流体の場合のエネルギー運動量テンソルの表式 (7.3.18) において e, p は考えずに、静止質量密度 ρ が各質点の描くデルタ関数的な世界線で表されていると考えれば、上記の表式はそれなりに納得できるかもしれない。

は座標時 t に対して保存される。これがローレンツ系における質点系の大域的なエネルギー運動量保存則である^{†37}。

式 (7.7.14) で定義した各質点の 4 元運動量を具体的に成分表示すると、

$$(P^\mu) = (mu^\mu) = (mWc, mWv_x, mWv_y, mWv_z) \quad (7.7.16)$$

$$= (E/c, p_x, p_y, p_z) \quad (7.7.17)$$

と書ける。 $E = P^0c = mWc^2$ はこの質点のエネルギーと呼ばれ、 $p^i = P^i = mWv^i$ はこの質点の (3 元) 運動量と呼ばれる。特に質点の速度が非相対論的 ($|v^i|/c \ll 1$) な場合、 E は次のように展開できる。

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \simeq mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (7.7.18)$$

この式の第 1 項は静止エネルギーと呼ばれ、ニュートン力学には無い概念である。第 2 項はニュートン力学で運動エネルギーと呼ばれているものである。ローレンツ因子を具体的に v^2 で表して計算するか、或いは 4 元速度の規格化条件から分かる 4 元運動量の規格化条件 ($P_\mu P^\mu = -m^2c^2$) を用いると、 E, p^i の間に次の関係が分かる。

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2 \quad (7.7.19)$$

$$\text{ただし, } p^2 = p_i p^i = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \quad (7.7.20)$$

7.7.2 ローレンツ変換

平坦な時空にローレンツ系を設定する方法は 1 通りではない。つまり、あるローレンツ系 (ct, x, y, z) から別のローレンツ系 (ct', x', y', z') に変換することができる。例えば古いローレンツ系に対して固定されていて、 x, y, z 軸の向きは同じであり、原点が異なる新しいローレンツ系への変換は、適当な定数 t_0, x_0, y_0, z_0 を用いて

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ct_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad (7.7.21)$$

^{†37} この大域的なエネルギー運動量保存則は粒子同士の弾性衝突を考える際に使われる。すなわち、衝突に関わる全粒子についての衝突前の 4 元運動量の和が衝突後の 4 元運動量の和に等しいという立式をすれば、衝突前後の各粒子の速度の関係が分かる。非弾性衝突、すなわち衝突に関わる物体のエネルギーの一部が他のエネルギー形態に変わるような衝突を考える場合は、式 (7.7.10) のエネルギー運動量テンソルにそのエネルギーを表す項を加えなければならないので、本節で説明している定式化の対象外である。

と表される。この変換を並進と言う。また、古いローレンツ系に対して固定されていて、原点は同じであり、 x, y 軸の向きを z 軸周りに角度 θ だけ回転したローレンツ系への変換は、

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7.7.22)$$

と表される。この変換を (z 軸周りの) 空間回転と言う。一方で、原点と x, y, z 軸の向きは同じ^{†38}で、古いローレンツ系の x 軸正の向きに一定速度 V で移動するローレンツ系への変換^{†39}は

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & -WV/c & 0 & 0 \\ -WV/c & W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7.7.23)$$

$$\text{ただし, } W = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (7.7.24)$$

と表される。この変換を (x 方向への) ローレンツブーストと言う。ローレンツブーストと空間回転を併せてローレンツ変換と言う。また、ローレンツ変換に並進を加えた全体をポアンカレ変換と言う。上記の 3 種の変換を組み合わせることで、任意のローレンツ系へ移れる^{†40}。例えばもっと一般に、原点と x, y, z 軸の向きは同じで、古いローレンツ系に対して一定速度 (V_x, V_y, V_z) で動くローレンツ系へのローレンツ変換は、

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underline{\Lambda} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7.7.25)$$

$$\underline{\Lambda} = \begin{pmatrix} W & -WV_x/c & -WV_y/c & -WV_z/c \\ -WV_x/c & 1 + (W - 1)V_x^2/V^2 & (W - 1)V_xV_y/V^2 & (W - 1)V_xV_z/V^2 \\ -WV_y/c & (W - 1)V_xV_y/V^2 & 1 + (W - 1)V_y^2/V^2 & (W - 1)V_yV_z/V^2 \\ -WV_z/c & (W - 1)V_xV_z/V^2 & (W - 1)V_yV_z/V^2 & 1 + (W - 1)V_z^2/V^2 \end{pmatrix} \quad (7.7.26)$$

$$\text{ただし, } V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2, \quad W = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (7.7.27)$$

^{†38} 原点が同じとは、 $(ct, x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$ と $(ct', x', y', z') = (0, 0, 0, 0)$ が同じ世界点を表すということ。

^{†39} 本質的な言い方をすると、速度 V で動く質点が静止して見えるようなローレンツ系への変換という意味である。上記の x, y 軸の空間回転と下記のローレンツブーストを見比べると、ローレンツブーストは t 軸と x 軸のある種の「回転」変換であることが想像できる。古いローレンツ系では 3 元速度 V の分だけ 4 元速度が t 軸から x 軸の方に傾いていた質点の、その 4 元速度の向きに t' 軸をとり直す変換である。

^{†40} ローレンツ変換とは、古い座標系の計量がミンコフスキー計量のときに新しい座標系の計量もミンコフスキー計量になるような変換のことである。つまり、ローレンツ系からローレンツ系への変換に限らず、一般の時空の注目する世界点でとった局所直交系から別の向きの局所直交系への変換もローレンツ変換になる。

と表される。古いローレンツ系から見て新しいローレンツ系が 3 元速度 \mathbf{V} で動いているとき、新しいローレンツ系から見ると古いローレンツ系は速度 $-\mathbf{V}$ で動いているので、ローレンツブーストの逆変換は 3 元速度 \mathbf{V} を $-\mathbf{V}$ に置き換えたものになる。

電磁場テンソル $F^{\mu\nu}$ をローレンツ系で静止した観測者から見た電磁場 \mathbf{E}, \mathbf{B} を用いて表すと式 (7.6.19) のように書けた。例えば、このローレンツ系の x 軸の方向に一定速度 V で動く観測者から見た電磁場 \mathbf{E}', \mathbf{B}' との関係を知りたい場合は、この観測者が静止して見えるローレンツ系へ式 (7.6.19) の表式を変換する。電磁テンソルの反変成分はそれぞれの世界点において

$$F^{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} F^{\mu\nu} \quad (7.7.28)$$

と変換するので、式 (7.7.23) の変換行列

$$(\Lambda^{\mu'}_{\mu}) = \begin{pmatrix} W & -WV/c & 0 & 0 \\ -WV/c & W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\Lambda} \quad (7.7.29)$$

を用いて

$$F^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu'}_{\nu} F^{\mu\nu} \quad (7.7.30)$$

$$\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & E'_x/c & E'_y/c & E'_z/c \\ -E'_x/c & 0 & B'_z & -B'_y \\ -E'_y/c & -B'_z & 0 & B'_x \\ -E'_z/c & B'_y & -B'_x & 0 \end{pmatrix} = \underline{\Lambda} \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \underline{\Lambda}^T \quad (7.7.31)$$

と計算することで、

$$E'_x = E_x, \quad B'_x = B_x \quad (7.7.32)$$

$$E'_y = W(E_y - VB_z), \quad B'_y = W\left(B_y + \frac{V}{c^2}E_z\right) \quad (7.7.33)$$

$$E'_z = W(E_z + VB_y), \quad B'_z = W\left(B_z - \frac{V}{c^2}E_y\right) \quad (7.7.34)$$

$$\text{ただし, } W = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (7.7.35)$$

という関係が分かる^{†41}。

速度の変換則を考える。あるローレンツ系 (ct, x, y, z) において一定速度 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ で運動している物体が、このローレンツ系の x 軸方向に速度 V で動く別のローレンツ系

^{†41} 上記の関係で結ばれる \mathbf{E}, \mathbf{B} と \mathbf{E}', \mathbf{B}' は同じ世界点における値であることを注意を要する。つまり、古い座標で $(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{a}, t_a)$ という値で表される世界点が新しい座標では $(\mathbf{x}', t') = (\mathbf{b}, t_b)$ という値で表される場合、 $\mathbf{E}(\mathbf{a}, t_a), \mathbf{B}(\mathbf{a}, t_a)$ と上記の関係で結ばれるのは $\mathbf{E}'(\mathbf{a}, t_a), \mathbf{B}'(\mathbf{a}, t_a)$ ではなく $\mathbf{E}'(\mathbf{b}, t_b), \mathbf{B}'(\mathbf{b}, t_b)$ である。

(ct', x', y', z') で見ると速度 $\mathbf{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)$ で動くように見える場合の、 \mathbf{v} と \mathbf{v}' の関係を求める。4 元速度は

$$u^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} u^\mu \quad (7.7.36)$$

と変換するので、

$$\begin{pmatrix} W'c \\ W'v'_x \\ W'v'_y \\ W'v'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{W} & -\widetilde{W}V/c & 0 & 0 \\ -\widetilde{W}V/c & \widetilde{W} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Wc \\ Wv_x \\ Wv_y \\ Wv_z \end{pmatrix} \quad (7.7.37)$$

$$\text{ただし, } W' = \frac{1}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}, \quad \widetilde{W} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad W = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.7.38)$$

という関係が分かる。上式の第 0 成分より

$$W' = \widetilde{W}W \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right) \quad (7.7.39)$$

が分かるので、第 i 成分より、

$$v'_x = \frac{\widetilde{W}W}{W'}(v_x - V) = \frac{v_x - V}{1 - Vv_x/c^2} \quad (7.7.40)$$

$$v'_y = \frac{\widetilde{W}W}{W'}v_y = \frac{v_y}{1 - Vv_x/c^2} \quad (7.7.41)$$

$$v'_z = \frac{\widetilde{W}W}{W'}v_z = \frac{v_z}{1 - Vv_x/c^2} \quad (7.7.42)$$

という関係が分かる。

7.7.3 時空間の対称性と保存量

一般の時空においては、局所的保存則は偏微分ではなく共変微分によって表されるので、式 (7.7.6) のようにガウスの発散定理を適用することができない。しかし、与えられた時空間が次に述べる意味で対称性を持つ場合は、それに対応する保存量が存在し、大域的な保存則を構成できる。

まず、時空間の対称性の定式化を説明する。あるベクトル場 $\xi^\mu(x)$ が与えられた時、このベクトル場が生成する次の無限小座標変換を考える。

$$x^\mu \longrightarrow \bar{x}^\mu = x^\mu - \epsilon \xi^\mu(x) \quad (7.7.43)$$

ϵ は微小量とする。例えば、旧座標系でそれぞれ $x^\mu = a^\mu$, $x^\mu = a^\mu + \epsilon \xi^\mu(a)$ と表されていた 2 点 \mathcal{P} , \mathcal{Q} を考えたとき、上の変換は、同じ座標値 a^μ で表される世界点を \mathcal{P} から \mathcal{Q} へ変更する

変換と解釈できる。この変換によって、計量は

$$g_{\mu\nu}(\mathcal{Q}) \longrightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(\mathcal{Q}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} g_{\alpha\beta}(\mathcal{Q}) \quad (7.7.44)$$

と変換される。この式は、同じ世界点における変換前後の成分を比較している。対して、同じ座標値で表される 2 点での変換前後の成分に対して定義される次の量を、計量の ξ^μ 方向へのリー微分と言う^{†42}。

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu}(\mathcal{P}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{g}_{\mu\nu}(\mathcal{Q}) - g_{\mu\nu}(\mathcal{P})}{\epsilon} \quad (7.7.45)$$

変換前の計量の関数形 $g_{\mu\nu}(x)$ と変換後の関数形 $\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x})$ が同じとき、リー微分はゼロになる。これは、考えている時空間が ξ^μ の生成する変換について対称であることを意味する。

$$g_{\alpha\beta}(\mathcal{Q}) = g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) + \epsilon \xi^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (7.7.46)$$

なので、上式の分子は次のように変形できる。ただし、引数 (\mathcal{P}) を省略する。

$$\bar{g}_{\mu\nu}(\mathcal{Q}) - g_{\mu\nu}(\mathcal{P}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} (g_{\alpha\beta} + \epsilon \xi^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) - g_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (7.7.47)$$

$$= (\delta^\alpha_\mu + \epsilon \partial_\mu \xi^\alpha) (\delta^\beta_\nu + \epsilon \partial_\nu \xi^\beta) (g_{\alpha\beta} + \epsilon \xi^\gamma \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) - g_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (7.7.48)$$

$$= \epsilon (g_{\alpha\nu} \partial_\mu \xi^\alpha + g_{\mu\beta} \partial_\nu \xi^\beta + \xi^\gamma \partial_\gamma g_{\mu\nu}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (7.7.49)$$

$$= \epsilon (\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (7.7.50)$$

よって、リー微分がゼロであることは、次の条件と等価である。

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \quad (7.7.51)$$

これをキリング方程式と言い、この式を満たすベクトル場 $\xi^\mu(x)$ をキリングベクトルと言う。これまでの議論をまとめると、キリングベクトルが式 (7.7.43) によって生成する無限小変換は、計量の座標に対する関数形を不変に保ち、時空間の対称性を表す。

$T^{\mu\nu}$ をエネルギー運動量テンソル、 ξ^μ をキリングベクトルとする。局所的保存則 $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ と式 (7.7.51) から、次式が言える。

$$\nabla_\mu (T^{\mu\nu} \xi_\nu) = 0 \quad (7.7.52)$$

これと 4 元ベクトルの発散に関する公式 (7.1.27) を用いると、ガウスの発散定理が使えて、次の関係が成り立つ。

$$0 = \int_{\mathcal{V}} \partial_\mu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu} \xi_\nu) d^4 x = \int_{\partial \mathcal{V}} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \xi_\nu dS_\mu \quad (7.7.53)$$

^{†42} この節では計量のリー微分しか扱わないが、リー微分は一般のテンソルに対して定義される。特に、スカラー場 ϕ に対しては $\mathcal{L}_\xi \phi = \xi^\nu \partial_\nu \phi$ 、ベクトル場 U^μ に対しては $\mathcal{L}_\xi U^\mu = \xi^\nu \partial_\nu U^\mu - U^\nu \partial_\nu \xi^\mu$ 、2 階テンソル場 T^α_β に対しては $\mathcal{L}_\xi T^\alpha_\beta = \xi^\nu \partial_\nu T^\alpha_\beta - T^\alpha_\nu \partial_\nu \xi^\beta + T^{\alpha\nu} \partial_\nu \xi^\beta$ である。

ここで、 $\partial\mathcal{V}$ は 4 次元時空間に取った領域 \mathcal{V} の 3 次元的境界を指す。空間的に孤立した (無限遠で $T^{\mu\nu} \rightarrow 0$ の) 系を考え、2 つの等時面 $t = t_1$ と $t = t_2$ に挟まれた領域を \mathcal{V} とすることで、

$$Q(t) = \int \sqrt{-g} T^{0\nu} \xi_\nu d^3x \quad (7.7.54)$$

は座標時 t に対して保存されることが分かる。

特に、計量 $g_{\mu\nu}(x)$ がある座標に依存しないとき、その座標の方向ベクトルはキリングベクトルになる。対称性と保存量の対応について、いくつかの例を示す。

シュバルツシルト計量の場合

シュバルツシルト計量 (7.5.1) は t, ϕ に依らないので^{†43}、 $(\xi_{(t)}^\mu) = (-1, 0, 0, 0)$ と $(\xi_{(\phi)}^\mu) = (0, 0, 0, 1)$ はキリングベクトルである。1 質点系

$$T^{0\nu}(x) = \frac{mc}{\sqrt{-g}} \int d\tau u^0 u^\nu \delta^4(x - z(\tau)) \quad (7.7.55)$$

を考えると、

$$\int d^3x \sqrt{-g} T^0{}_\nu \xi_{(t)}^\nu = mc \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = mk \quad (7.7.56)$$

$$\int d^3x \sqrt{-g} T^0{}_\nu \xi_{(\phi)}^\nu = mr^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} = mh \quad (7.7.57)$$

が保存量になる。 k, h はそれぞれ、エネルギーと角運動量に関する積分定数である (節 7.5.1 参照)。

ローレンツ系の場合

ローレンツ系 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ のキリングベクトルとしては、例えば次の 10 個の独立なベクトル場を取ることができる。共変成分を示す。

$$(\xi^{(t)}_\mu) = (1, 0, 0, 0) \quad (7.7.58)$$

$$(\xi^{(x)}_\mu) = (0, 1, 0, 0), \quad (\xi^{(y)}_\mu) = (0, 0, 1, 0), \quad (\xi^{(z)}_\mu) = (0, 0, 0, 1) \quad (7.7.59)$$

$$(\rho^{(x)}_\mu) = (0, 0, -z, y), \quad (\rho^{(y)}_\mu) = (0, z, 0, -x), \quad (\rho^{(z)}_\mu) = (0, -y, x, 0) \quad (7.7.60)$$

$$(\kappa^{(x)}_\mu) = (x, -ct, 0, 0), \quad (\kappa^{(y)}_\mu) = (y, 0, -ct, 0), \quad (\kappa^{(z)}_\mu) = (z, 0, 0, -ct) \quad (7.7.61)$$

それぞれに対応する対称性と保存量を表 7.2 にまとめた。

7.8 理想磁気流体

一般相対論的磁気流体の基礎方程式 (GRMHD) の定式化について、数値計算において有用な 3+1 形式における方法を説明する。具体的には Antón et al. (2006) の方法である。Rezzolla &

^{†43} $x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$ と書く。

表 7.2 ローレンツ系における対称性と保存量の対応関係

キリングベクトル	対称性の名称	保存量	1 質点系の場合の表式
$\xi^{(t)}_{\mu}$	時間並進	全エネルギー	$E = mWc^2$
$\xi^{(i)}_{\mu}$	空間並進	全運動量	$p_i = mWv_i$
$\rho^{(i)}_{\mu}$	空間回転	全角運動量	$[\mathbf{x} \times \mathbf{p}]_i$
$\kappa^{(i)}_{\mu}$	ローレンツブースト	—	$Ex_i/c - p_i ct$

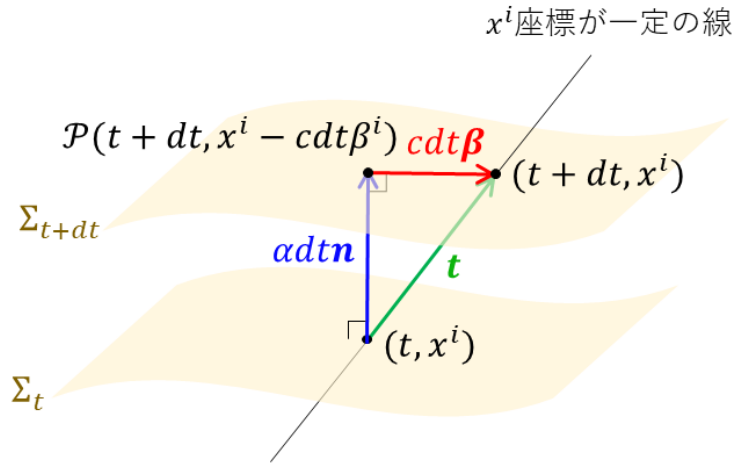


図 7.4 3+1 形式の諸概念： Σ_t, Σ_{t+dt} はそれぞれ座標時 $t, t + dt$ における等座標時面。 \mathbf{n} は Σ_t に垂直な 4 元速度。 $\mathbf{t} = (cdt, 0, 0, 0)$ は空間座標 x^i が一定値をとる曲線の接ベクトル。 $\beta = (0, \beta^i)$ は Σ_{t+dt} 内の 4 元ベクトル。

Zanotti (2013) も参考になっている。理想磁気流体、すなわち電気伝導率が無限大の流体を考える。その後、特に弱い重力下における特殊相対論的理想磁気流体の方程式 (RMHD) について、非相対論的 MHD 方程式との対比が分かるような形で説明する。GRMHD の定式化や応用例についてのレビューには Font (2008) がある。

7.8.1 3+1 形式

アインシュタイン方程式の解として計量が与えられたとき、その計量は次の形式で書くことができる。

$$ds^2 = -(\alpha^2 - \beta_i \beta^i) c^2 dt^2 + 2\beta_i dx^i c dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j \tag{7.8.1}$$

$\beta_i = \gamma_{ij} \beta^j$ である。この形式で書かれたときの α はラプス関数 (lapse function)、 β^i はシフトベクトル (shift vector)、 γ_{ij} は空間計量 (spatial metric) と呼ばれ、一般にはそれぞれ (t, x^i)

の関数である。このように計量を表すことを 3+1 形式と言う。各要素の図形的なイメージを説明する。図 7.4 のように、座標時 t と $t + dt$ における 3 次元的等座標時面 Σ_t, Σ_{t+dt} を考える。座標系は一般に歪な形をしているので、ある世界点 (t, x^i) を通る t 軸 (x^i 座標が一定の曲線) は Σ_t に垂直ではない。この点 (t, x^i) において Σ_t に垂直な方向を向く 4 元速度を \mathbf{n} とし、 $\mathbf{t} = (cdt, 0, 0, 0)$ (図の緑のベクトル) とする。 \mathbf{n} の方向と Σ_{t+dt} が交わる点 \mathcal{P} と (t, x^i) の距離は dt に比例するため、図の青いベクトルを $\alpha dt \mathbf{n} = (\alpha dt n^\mu)$ とする。 \mathcal{P} と $(t + dt, x^i)$ の距離も dt に比例するため、図の赤いベクトルを $cdt \boldsymbol{\beta} = (0, cdt \beta^i)$ とする。すると

$$\alpha dt \mathbf{n} + cdt \boldsymbol{\beta} = \mathbf{t} \tag{7.8.2}$$

という関係があるので、

$$\mathbf{n} = \frac{c}{\alpha} (1, -\beta^i) \tag{7.8.3}$$

と書ける。点 (t, x^i) から無限小離れた点 $(t + dt, x^i + dx^i)$ までの距離 ds は、図の青いベクトルと Σ_{t+dt} 内の変位ベクトルに分解して考えることで、

$$ds^2 = (\alpha dt \mathbf{n}) \cdot (\alpha dt \mathbf{n}) + (cdt \boldsymbol{\beta} + (0, dx^i)) \cdot (cdt \boldsymbol{\beta} + (0, dx^i)) \tag{7.8.4}$$

と書ける。4 元速度 \mathbf{n} の規格化条件と Σ_{t+dt} での 3 次元的計量 γ_{ij} を使うと、

$$ds^2 = -\alpha^2 c^2 dt^2 + \gamma_{ij} (\beta^i cdt + dx^i) (\beta^j cdt + dx^j) \tag{7.8.5}$$

と計算でき、式 (7.8.1) のように書ける。計量を行列表示すると次のようになる。

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_i \beta^i & \beta_i \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \quad (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta^i/\alpha^2 \\ \beta^i/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j/\alpha^2 \end{pmatrix} \tag{7.8.6}$$

γ^{ij} は γ_{ij} の逆行列 ($\gamma^{ij} \gamma_{jk} = \delta^i_k$) である。また、計量の行列式 $g = \det(g_{\mu\nu})$ は次のように計算できる。

$$\sqrt{-g} = \alpha \sqrt{\gamma} \tag{7.8.7}$$

$\gamma = \det(\gamma_{ij})$ である。

式 (7.8.1) の計量が表す座標系における流体の 4 元速度の成分を u^μ と書く。流体を考えるときには、その電磁場 E^μ, B^μ や 3 元流速 v^i がどの観測者から見たものなのかを明確にする必要がある。よく考えられる観測者としてはまず、共動観測者 (comoving observer)、すなわち、各世界点において流体と共に 4 元速度 u^μ で動く観測者がある。一方で、各世界点において、等座標時面 Σ_t に垂直な 4 元速度 n^μ を持つ観測者をオイラー的観測者 (Eulerian observer) と言う。つまり、

$$(n^\mu) = \frac{c}{\alpha} (1, -\beta^i), \quad (n_\mu) = (-\alpha c, 0, 0, 0) \tag{7.8.8}$$

という 4 元速度を持つ観測者のことである。特にローレンツ系の場合は $\alpha = 1, \beta^i = 0$ なので、座標系に対して静止した観測者に一致する。4 元流速 u^μ の n^μ に平行な成分はオイラー的観測

者から見た時間成分、すなわち W を適当な規格化定数 (オイラー的観測者に対するローレンツ因子) として Wc を表す。一方で u^μ の n^μ に垂直な成分はオイラー的観測者から見た空間成分、すなわちオイラー的観測者から見た 3 元流速を v^i として Wv^i を表す^{†44}。つまり、座標系 (7.8.1) における 4 元流速の成分 u^μ とオイラー的観測者から見た 3 元流速 v^i の間には次のような関係がある。

$$v^i = \frac{h^i{}_\mu u^\mu}{W} = \frac{c}{\alpha} \left(\frac{u^i}{u^0} + \beta^i \right) \quad (7.8.9)$$

$$v_i = \frac{u_i}{W} = \frac{c\gamma_{ij}}{\alpha} \left(\frac{u^j}{u^0} + \beta^j \right) \quad (7.8.10)$$

$$(u^\mu) = \left(\frac{cW}{\alpha}, W \left(v^i - \frac{c\beta^i}{\alpha} \right) \right) \quad (7.8.11)$$

$$\text{ただし, } h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{n_\mu n_\nu}{c^2} \quad (7.8.12)$$

$$W = -\frac{n_\mu u^\mu}{c^2} = \frac{\alpha u^0}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.8.13)$$

$h^i{}_\mu$ は n^μ に垂直な方向への射影テンソル (節 7.4.2 参照) であり、その定義より $h_{ij} = \gamma_{ij}$ が分かる。 $v^2 = \gamma_{ij}v^i v^j$ である。

文献によっては、ある観測者から見た物理量の空間成分の定義方法に違う流儀が採用されていることがある。上述した方法では、射影テンソルを用いて空間成分を定義した。その成分は座標系の基底で展開された反変成分である。一方で、注目する点で観測者が静止するような局所直交系における空間成分を考えることもある。これは、与えられた座標系において次のように考えることと等価である。例えば、オイラー的観測者から見た流速を考える場合、次の 4 つの 4 元ベクトルを導入する。

$$(e_{(0)}^\mu) = (n^\mu)/c = (1/\alpha, -\beta^i/\alpha) \quad (7.8.14)$$

$$(e_{(a)}^\mu) = \left(0, x_{(a)}^i / \sqrt{\lambda_{(a)}} \right), \quad a = 1, 2, 3 \quad (7.8.15)$$

ただし、 $x_{(a)}^i$ は行列 (γ_{ij}) の a 番目の固有ベクトルであり、ユークリッド的に正規化されている ($\sum_i (x_{(a)}^i)^2 = 1$)。 $\lambda_{(a)}$ はそれに対応する固有値である。対称行列の固有ベクトルが互いに直交することを考慮すれば、これらの 4 元ベクトルには次の関係があることが分かる。

$$e_{(\sigma)}^\mu e_{(\rho)\mu} = \eta_{\sigma\rho} \quad (7.8.16)$$

$\eta_{\sigma\rho}$ はミンコフスキー計量である。各点でこのような関係にあるベクトル場の組をテトラッド (tetrad, 四脚場) と言う^{†45}。テトラッドを基底として 4 元速度を展開したときの時間成分と空

^{†44} この例のように、4 元ベクトルで表される物理量 Q^μ について、ある 4 元速度 U^μ ($U_\mu U^\mu = -c^2$) に平行な成分は U^μ で運動する観測者から見たときの Q^μ の時間成分であり、 Q^μ の U^μ に垂直な成分は U^μ で運動する観測者から見たときの空間成分であると解釈できる。

^{†45} 各点でベクトル場の基底になるようなベクトル場の組を局所標構 (local frame) と言う。

間成分に対して、ローレンツ因子 \widetilde{W} と 3 元速度 \widetilde{v}_i を導入する。

$$u^\mu = \widetilde{W} c e_{(0)}^\mu + \sum_{i=1}^3 \widetilde{W} \widetilde{v}_i e_{(i)}^\mu, \quad \widetilde{W} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^3 (\widetilde{v}_i)^2 / c^2}} \quad (7.8.17)$$

つまり、4 元速度の反変成分を次のように表す。

$$(u^\mu) = \left(\frac{\widetilde{W} c}{\alpha}, \widetilde{W} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\widetilde{v}_j x_{(j)}^i}{\sqrt{\lambda_{(j)}}} - \frac{c \beta^i}{\alpha} \right) \right) \quad (7.8.18)$$

特に、考えている座標系で空間計量が対角化されている場合 ($\gamma_{ij} = \lambda_{(i)} \delta_{ij}$, $x_{(j)}^i = \delta_{ij}$) は、内積と射影テンソルによって導入した W, v^i との間には次の関係がある。

$$\widetilde{W} = W, \quad \frac{\widetilde{v}_i}{\sqrt{\gamma_{ii}}} = v^i \quad (7.8.19)$$

以降の説明では専ら射影テンソルの流儀を用いる。

7.8.2 理想 MHD 条件と誘導方程式

完全流体の静止質量保存則とエネルギー運動量保存則、状態方程式により、流体のダイナミクスを特徴づける量は決定され、磁気流体の場合にそれらの量と相互作用する電磁場は、マクスウェル方程式により決定される。方程式系を閉じるためにはマクスウェル方程式に現れる 4 元電流 J^μ が流体の物理量によって決定されなければならない。その関係を与えるのがオームの法則であり、いちばん単純な形式のものを採用するならば次のように表される。

$$J^\mu = \rho_e u^\mu + \sigma F^{\mu\nu} u_\nu \quad (7.8.20)$$

右辺第 1 項は u^μ に平行なので、共動観測者にとっての時間成分のみに寄与する項である。つまり、 ρ_e は固有電荷密度を表す。第 2 項は節 7.6 で説明したように、共動観測者にとっての電場 $\tilde{E}^\mu = F^{\mu\nu} u_\nu$ を表す。 \tilde{E}^μ が u^μ と垂直なことを考慮すると、第 2 項は共動観測者には電場が 3 元電流密度 (4 元電流の空間成分) に比例するように見えることを表している。 σ は電気伝導率である。上式は電気伝導率が等方的だという仮定の下での式である。以下では電気伝導度が無限大の場合を考える。この場合の定式化を理想磁気流体力学 (ideal MHD) と言う。 σ が無限大の場合に J^μ の発散を抑えるためには、上式より

$$F^{\mu\nu} u_\nu = 0 \quad (7.8.21)$$

でなければならない。つまり、共動観測者から見た電場はゼロである。この条件は理想 MHD 条件と呼ばれる。このとき、オイラー的観測者から見た電場 E^μ と磁場 B^μ の間には次のような

関係がある^{†46}。

$$E^\mu = \frac{\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} u_\alpha n_\beta B_\gamma}{cW} \quad (7.8.22)$$

具体的に計算すると

$$E^0 = 0, \quad E^i = -\alpha\epsilon^{0ijk} v_j B_k \quad (7.8.23)$$

である。式 (7.6.14) で u^μ を n^μ に置き換えたものに式 (7.8.22) を代入し、完全反対称テンソルの性質を用いて計算すると、

$$*F^{\mu\nu} = \frac{u^\mu B^\nu - u^\nu B^\mu}{Wc} \quad (7.8.24)$$

と書けることが分かる。これを用いてマクスウェル方程式 $\nabla_\nu *F^{\mu\nu} = 0$ を計算すると、第 0 成分と第 i 成分について次のように書ける^{†47}。

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{\gamma} B^i) = 0 \quad (7.8.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} B^i) = \frac{\partial}{\partial x^j} [\sqrt{\gamma}(\alpha v^i - c\beta^i) B^j - \sqrt{\gamma}(\alpha v^j - c\beta^j) B^i] \quad (7.8.26)$$

特にローレンツ系では $\alpha = 1, \beta^i = 0, \gamma = 1$ なので、上段の式はローレンツ系では $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を表し、下段の式は誘導方程式 (2.5.15) を一般の時空に対して拡張したものであることが分かる。

7.8.3 保存則

磁気完全流体のエネルギー運動量テンソルは次のように書ける。

$$T^{\mu\nu} = T_{\text{fluid}}^{\mu\nu} + T_{\text{EM}}^{\mu\nu} \quad (7.8.27)$$

$$\text{ただし,} \quad T_{\text{fluid}}^{\mu\nu} = \rho h \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} + p g^{\mu\nu} \quad (7.8.28)$$

$$T_{\text{EM}}^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \quad (7.8.29)$$

$$h = c^2 + e + \frac{p}{\rho} \quad (7.8.30)$$

^{†46} 式 (7.6.14) で u^μ を n^μ に置き換えたものを用いて右辺を計算すると左辺が出てくる。 $B^\mu n_\mu = 0$ より、 $B^0 = 0$ が分かる。

^{†47} 4 元発散が計量の行列式と偏微分で書けるという公式 (7.1.27) と、3+1 形式における計量の行列式の関係 (7.8.7) を用いる。

h は単位質量あたりのエンタルピーと呼ばれる。静止質量保存則とエネルギー運動量保存則 (節 7.4 参照) を、数値計算において有用である保存形

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{物理量の密度}) + \frac{\partial}{\partial x^i}(\text{物理量のフラックス})^i = (\text{物理量の源泉を表す項}) \quad (7.8.31)$$

に書き換える^{†48}。

共動観測者から見た磁場を \tilde{B}^μ と書く。オイラー的観測者から見た磁場 B^μ との関係は次のように書ける。

$$\tilde{B}^0 = \frac{W v_j B^j}{\alpha c} \quad (7.8.32)$$

$$\tilde{B}^i = \frac{B^i + \alpha \tilde{B}^0 u^i / c}{W} = \frac{B^i}{W} + \frac{W v_j B^j (\alpha v^i - c \beta^i)}{\alpha c^2} \quad (7.8.33)$$

$$\tilde{B}_\mu \tilde{B}^\mu = \frac{B_i B^i + \alpha^2 (\tilde{B}^0)^2}{W^2} = \frac{B_i B^i}{W^2} + \frac{(v_j B^j)^2}{c^2} \quad (7.8.34)$$

この \tilde{B}^μ を用いると、式 (7.6.14) と理想 MHD 条件より

$$F^{\mu\nu} = -\frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\alpha \tilde{B}_\beta}{c} \quad (7.8.35)$$

と書けるので、 $T_{\text{EM}}^{\mu\nu}$ は次のように書き換えられる。

$$T_{\text{EM}}^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left[\left(\frac{u^\mu u^\nu}{c^2} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \right) \tilde{B}_\alpha \tilde{B}^\alpha - \tilde{B}^\mu \tilde{B}^\nu \right] \quad (7.8.36)$$

よって、エネルギー運動量テンソルは次のように書ける。

$$T^{\mu\nu} = \rho h^* \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} + p^* g^{\mu\nu} - \frac{1}{\mu_0} \tilde{B}^\mu \tilde{B}^\nu \quad (7.8.37)$$

$$\text{ただし, } h^* = h + \frac{\tilde{B}_\alpha \tilde{B}^\alpha}{\mu_0 \rho} = c^2 + e^* + \frac{p^*}{\rho} \quad (7.8.38)$$

$$e^* = e + \frac{\tilde{B}_\alpha \tilde{B}^\alpha}{2\mu_0 \rho} \quad (7.8.39)$$

$$p^* = p + \frac{\tilde{B}_\alpha \tilde{B}^\alpha}{2\mu_0} \quad (7.8.40)$$

^{†48} 完全流体にして理想磁気流体の MHD 方程式系は双曲型と呼ばれる保存形に書き換えられる (e.g. Antón et al., 2006)。双曲型の保存形で書かれた方程式系は、解の一部に不連続があったとしても正しく数値的に解けることが知られている (e.g. Rezzolla & Zanotti, 2013)。このように、今まで培われてきた数値計算の手法を適用できるという点において、方程式系の保存形を見つけることは重要である。

e^* は内部エネルギー e と磁場のエネルギー (非相対論的極限で $B^2/(2\mu_0)$ と表されていたもの、節 3.3 参照) を合わせた単位質量あたりのエネルギーと解釈できる。一方で p^* はガス圧 p と磁気圧 (非相対論的極限で $B^2/(2\mu_0)$ と表されていたもの、節 4.2.3 参照) を合わせた圧力である。また最後の項 $\tilde{B}^\mu \tilde{B}^\nu / \mu_0$ は磁気張力 (節 4.2.3 参照) を表す。

静止質量保存則は 4 元発散の公式 (7.1.27) を用いると

$$\partial_\mu (\alpha \sqrt{\gamma} \rho u^\mu) = 0 \tag{7.8.41}$$

と書ける。オイラー的観測者から見た質量密度を

$$D = -\frac{n_\mu \rho u^\mu}{c^2} = \rho W \tag{7.8.42}$$

と書くことにする。 u^μ と v^i の関係 (7.8.11) を用いて上式を計算すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} D) + \frac{\partial}{\partial x^j} [\sqrt{\gamma} D (\alpha v^j - c \beta^j)] = 0 \tag{7.8.43}$$

と書ける。

エネルギー運動量保存則を分解するために、まず $T^{\mu\nu}$ を n_μ に平行な成分と垂直な成分に次のように分解する。

$$T^{\mu\nu} = E \frac{n^\mu n^\nu}{c^2} + S^\mu n^\nu + S^\nu n^\mu + S^{\mu\nu} \tag{7.8.44}$$

$$\text{ただし, } E = \frac{n_\alpha n_\beta}{c^2} T^{\alpha\beta} \tag{7.8.45}$$

$$S^\mu = -\frac{h^\mu_\alpha n_\beta}{c^2} T^{\alpha\beta} \tag{7.8.46}$$

$$S^{\mu\nu} = h^\mu_\alpha h^\nu_\beta T^{\alpha\beta} \tag{7.8.47}$$

$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu / c^2$ である。 $E, S^\mu, S^{\mu\nu}$ はそれぞれ、オイラー的観測者から見た全エネルギー密度、全運動量密度、全応力と解釈できる。具体的に計算すると次のようになる。

$$E = \alpha^2 T^{00} = \rho h^* W^2 - p^* - \frac{\alpha^2}{\mu_0} \tilde{B}^0 \tilde{B}^0 \quad (7.8.48)$$

$$S^0 = 0 \quad (7.8.49)$$

$$S^i = \frac{\alpha}{c} (\beta^i T^{00} + T^{0i}) = \frac{\rho h^* W^2 v^i}{c^2} - \frac{\alpha}{\mu_0 c} (\beta^i \tilde{B}^0 \tilde{B}^0 + \tilde{B}^0 \tilde{B}^i) \quad (7.8.50)$$

$$S^{0\mu} = S^{\mu 0} = 0 \quad (7.8.51)$$

$$S^{ij} = \beta^i \beta^j T^{00} + \beta^i T^{0j} + \beta^j T^{0i} + T^{ij} \quad (7.8.52)$$

$$= \frac{\rho h^* W^2 v^i v^j}{c^2} + p^* \gamma^{ij} - \frac{1}{\mu_0} (\beta^i \beta^j \tilde{B}^0 \tilde{B}^0 + \beta^i \tilde{B}^0 \tilde{B}^j + \beta^j \tilde{B}^0 \tilde{B}^i + \tilde{B}^i \tilde{B}^j) \quad (7.8.53)$$

2 階対称テンソルの 4 元発散についての公式^{†49}

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = g^{\nu\lambda} \left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} T^{\mu\lambda}) - \frac{1}{2} T^{\alpha\beta} \partial_\lambda g_{\alpha\beta} \right] \quad (7.8.54)$$

を用いると、エネルギー-運動量保存則は次のように書ける。

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) = \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\alpha\beta} \partial_\nu g_{\alpha\beta} \quad (7.8.55)$$

この式の空間成分を考えると式 (7.8.44) を代入することで、運動量保存則は次のように書ける。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} S_i) + \frac{\partial}{\partial x^j} [\sqrt{\gamma} (\alpha S^j_i - \beta^j c S_i)] = \frac{\alpha \sqrt{\gamma}}{2} T^{\mu\nu} \partial_i g_{\mu\nu} \quad (7.8.56)$$

エネルギー保存則を書き下すためにエネルギー-運動量保存則 $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ と n_ν の縮約をとる。

$$\nabla_\mu (T^{\mu\nu} n_\nu) - T^{\mu\nu} \nabla_\mu n_\nu = 0 \quad (7.8.57)$$

これに式 (7.8.44) を代入して計算すると、エネルギー保存則は次のように書ける。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} E) + \frac{\partial}{\partial x^j} [\sqrt{\gamma} (\alpha c^2 S^j - \beta^j c E)] = \alpha^2 \sqrt{\gamma} c (T^{\mu 0} \partial_\mu \ln \alpha - T^{\mu\nu} \Gamma^0_{\nu\mu}) \quad (7.8.58)$$

^{†49} この公式は次の形でも書ける。

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} T^{\mu\lambda}$$

この形式を用いて運動量保存則を計算すると、右辺にクリストッフェル記号が陽に現れる形式になるが、数学的には後述する形式と等価である。

7.8.4 弱い重力下での保存則

前述した質量保存則、運動量保存則、エネルギー保存則の弱い重力下での形式を導く。弱くて時間変化しない重力場においては、次の形の計量を考えることができる^{†50}。

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\phi_g}{c^2} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2\phi_g}{c^2} \right) \eta_{ij} dx^i dx^j \quad (7.8.59)$$

$$\text{ただし, } \frac{|\phi_g|}{c^2} \ll 1 \quad (7.8.60)$$

$\phi_g(x^i)$ は重力ポテンシャルである。前述した 3 つの保存則の左辺には計量単体の微分は出てこないで、 $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma_{ij} = \eta_{ij}$ として計算する。一方で右辺に出てくる計量の微分項では $2\phi_g/c^2$ も考慮して計算する。すると、各保存則は次のように書ける。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho W) + \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho W v^j) = 0 \quad (7.8.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho h^* W^2 v^i}{c^2} - \frac{1}{\mu_0 c} \tilde{B}^0 \tilde{B}^i \right) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\rho h^* W^2 v^i v^j}{c^2} + p^* \eta^{ij} - \frac{1}{\mu_0} \tilde{B}^i \tilde{B}^j \right) \\ = - \left[\rho h^* W^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) + 2p^* - \frac{1}{\mu_0} \left(\tilde{B}^0 \tilde{B}^0 + \tilde{B}^k \tilde{B}^k \right) \right] \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\phi_g}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (7.8.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho h^* W^2 - p^* - \frac{1}{\mu_0} \tilde{B}^0 \tilde{B}^0 \right) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\rho h^* W^2 v^j - \frac{c}{\mu_0} \tilde{B}^0 \tilde{B}^j \right) \\ = - \left(\rho h^* W^2 v^j - \frac{c}{\mu_0} \tilde{B}^0 \tilde{B}^j \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\phi_g}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (7.8.63)$$

ただし $v^2 = v_i v^i$ である。共動系での磁場 \tilde{B}^μ は次のように表される。

$$\tilde{B}^0 = \frac{W v_j B^j}{c} \quad (7.8.64)$$

$$\tilde{B}^i = \frac{B^i}{W} + \frac{W v_j B^j v^i}{c^2} \quad (7.8.65)$$

$$\tilde{B}_\mu \tilde{B}^\mu = \frac{B^2}{W^2} + \frac{(v_j B^j)^2}{c^2} \quad (7.8.66)$$

$B^2 = B_i B^i$ である。更に、内部エネルギー e 、圧力 p 、磁気エネルギー $B^2/(2\mu_0)$ がそれぞれ静止エネルギー ρc^2 に比べて十分に小さい場合

$$\rho c^2 \gg \rho e, p, \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (7.8.67)$$

を考える。質量保存則の形は式 (7.8.61) と変わらない。運動量保存則は式 (7.8.62) で

$$\rho h^* \simeq \rho c^2 \quad (7.8.68)$$

^{†50} 例えばシュバルツシルト時空では、等方座標 (7.5.4) において $\chi \gg r_s$ の領域を考えて計量の各成分を展開すれば、 $\phi_g = -GM/\chi = -GM/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ としてこの形になる。

と近似し、他にもオーダーの小さい項を無視することで、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho W^2 v^i) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\rho W^2 v^i v^j + p^* \eta^{ij} - \frac{1}{\mu_0} \tilde{B}^i \tilde{B}^j \right) = -\rho W^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial \phi_g}{\partial x^i} \quad (7.8.69)$$

となる。エネルギー保存則については、式 (7.8.63) の両辺から質量保存則 (7.8.61) の両辺に c^2 を乗じたものを引くことで ρc^2 のオーダーの項は無くなるため、次のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho c^2 W(W-1) + \rho e^* W^2 + p^*(W^2-1) - \frac{W^2 (v_k B^k)^2}{\mu_0 c^2} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\rho c^2 W(W-1) v^j + \rho e^* W^2 v^j + p^* W^2 v^j - \frac{1}{\mu_0} W v_k B^k \tilde{B}^j \right) = -\rho W^2 v^j \frac{\partial \phi_g}{\partial x^j} \end{aligned} \quad (7.8.70)$$

流体の速度が光速に比べて十分に遅い場合 ($v/c \ll 1$) は、

$$\tilde{B}^i \simeq B^i, \quad \rho c^2 W(W-1) \simeq \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (7.8.71)$$

などと近似することで、上式は非相対論な理想磁気流体の質量保存則、運動量保存則、全エネルギー保存則に一致することが分かる。

以上の議論を眺めると次のことが言える。

- 流速が光速に対して無視できなくなると保存則の各所にローレンツ因子が現れる。
- 理想磁気流体の場合は共動系での電場がゼロなので、共動系での磁場を用いることで電場を用いずに方程式系を閉じることができる。流速が光速に比べて十分に遅い場合は実験室系での磁場と共動系での磁場は同じと考えられる。
- 内部エネルギー、圧力、磁気エネルギーが静止エネルギーに対して無視できない大きさを持つ場合は運動量保存則にもこれらのエネルギーの寄与が現れる。
- 内部エネルギー、圧力、磁気エネルギーが静止エネルギーに対して無視できない大きさを持つ場合はこれらのエネルギーに対しても重力がはたらく (重力加速度の係数にこれらのエネルギーが現れる)。

7.9 放射輸送

相対論的な放射輸送方程式と放射モーメント方程式について、第 5 章で述べた各方程式の形式との対応がわかるように説明する。本節は Cardall et al. (2013), Shibata et al. (2011), Bronzwaer et al. (2018) を参考にした^{†51}。

^{†51} 例えば Cardall et al. (2013) は核の崩壊による超新星爆発の際にニュートリノがどのように放射されるかを調べる文脈で、3+1 形式での相対論的放射モーメント方程式を定式化している。また、Bronzwaer et al. (2018) はブラックホールに降着する物質が発する光子が地球からどのように観測されるかを推定する文脈で、相対論的放射輸送方程式の数値計算コードを開発している。

なお、本節では添え字 ν は、光子の振動数で積分されていない単色の量であることを表すために用いる。ベクトルやテンソルの成分を表すために ν を添え字として用いることはしない。

7.9.1 光子の 4 元運動量

光子は光的測地線を描いて運動することを節 7.2.1 (528 ページ) の脚注で述べた。すなわち、光子の描く世界線をパラメータ λ を用いて記述することにして、光子の 4 元運動量を

$$p^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \quad (7.9.1)$$

と定めると、 p^α は次の条件に従う。 λ はアフィンパラメータと呼ばれる。

$$p_\alpha p^\alpha = 0 \quad (7.9.2)$$

$$\frac{dp^\alpha}{d\lambda} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} p^\beta p^\gamma \quad (7.9.3)$$

つまり、 p^α の大きさはゼロである。これは光速で運動する光子が質量を持たないことに対応する。4 元速度 u^α を持つ流体の共動系で見たときの光子の振動数 ν は

$$h\nu = -u_\alpha p^\alpha (= -u^\alpha p_\alpha) \quad (7.9.4)$$

と表される。 h はプランク定数である。共動系、すなわち注目する世界点 \mathcal{P}_0 で流体が静止して見えるような局所直交系 ($g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(\mathcal{P}_0) = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$) での成分は添え字にハット ($\hat{\alpha}$ など) を付けて表すことにする。共動系では ($u^{\hat{\alpha}} = (c, 0, 0, 0)$) と表されるので、式 (7.9.2) と (7.9.4) より、共動系での 4 元運動量の成分 $p^{\hat{\alpha}}$ は次のように書ける。

$$(p^{\hat{\alpha}}) = \frac{h\nu}{c} (1, \hat{\ell}^i) \quad (7.9.5)$$

$$\text{ただし, } \sum_{i=1}^3 \hat{\ell}^i \hat{\ell}^i = 1 \quad (7.9.6)$$

$\hat{\ell}^i$ は共動系で見た光子の空間的放射方向を表す単位ベクトルである。この放射方向を極座標 (θ, ϕ) を用いて表すことにすると、

$$(\hat{\ell}^i) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (7.9.7)$$

という関係を持つ。一般の座標系においては、 u^α と直交する単位 4 元ベクトル ℓ^α

$$u_\alpha \ell^\alpha = 0, \quad \ell_\alpha \ell^\alpha = 1 \quad (7.9.8)$$

を用いて、

$$p^\alpha = \frac{h\nu}{c} \left(\frac{u^\alpha}{c} + \ell^\alpha \right) \quad (7.9.9)$$

と書ける。 $(\ell^{\hat{\alpha}}) = (0, \hat{\ell}^i)$ である。

7.9.2 [トピック] 太陽スペクトルの重力赤方偏移

太陽研究において比較的出番の多い一般相対論的効果は重力赤方偏移であろう。太陽表面で発せられた光は、太陽の重力ポテンシャルの穴を抜ける過程で波長が長くなる。太陽表面の重力ポテンシャルと地表面の重力ポテンシャルでは前者の方が低いため、地上で太陽光を観測すると、あらゆる吸収線^{†52}は一定の割合で長波長側へずれて観測される。節 5.1.5 で説明しているが、光はドップラー効果によっても波長が変化する。観測者から遠ざかる向きに運動する物質から発せられた光は、その観測者には発せられた波長よりも長い波長の光として観測される。遠ざかる速さを v とすると、 $v/c \ll 1$ (c は光速) の場合には、発せられた振動数 ν' と観測される振動数 ν の間には次の関係がある。

$$1 - \frac{\nu}{\nu'} = \frac{v}{c} \quad (7.9.10)$$

後に計算するように、地上で太陽光を観測すると、太陽が $v = 633 \text{ m s}^{-1}$ で遠ざかっているのに相当する幅だけ重力赤方偏移する。この重力赤方偏移の観測に付きまとう問題について紹介する。

理論

アインシュタイン方程式の解として静的な (座標時 x^0 に依らない) 計量 $g_{\mu\nu}$ が与えられている。この計量が表す座標と時空間において、ある世界点 \mathcal{P}_{em} で静止している物質から発せられた光子が光的測地線に沿って運動し、世界点 \mathcal{P}_{rec} で静止している観測者によって観測されたとする。この世界線を記述するアフィンパラメータを λ とする。まずは、光子の 4 元運動量について次の量を計算してみる。

$$\frac{dp_0}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}(g_{0\mu}p^\mu) \quad (7.9.11)$$

$$= \frac{dg_{0\mu}}{d\lambda}p^\mu + g_{0\mu}\frac{dp^\mu}{d\lambda} \quad (7.9.12)$$

$$= \frac{dg_{0\mu}}{d\lambda}p^\mu - g_{0\mu}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta \quad (7.9.13)$$

$$= p^\mu p^\nu \partial_\nu g_{0\mu} - g_{0\mu} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\beta g_{\nu\alpha} + \partial_\alpha g_{\nu\beta} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}) p^\alpha p^\beta \quad (7.9.14)$$

$$= p^\mu p^\nu \partial_\nu g_{0\mu} - \frac{1}{2} (p^\alpha p^\beta \partial_\beta g_{0\alpha} + p^\beta p^\alpha \partial_\alpha g_{0\beta}) \quad (7.9.15)$$

$$= 0 \quad (7.9.16)$$

ただし、2 段目から 3 段目への第 2 項の変形では測地線方程式 (7.9.3) を用い、4 段目への変形では第 1 項に連鎖律、第 2 項にクリストッフェル記号の定義 (7.1.21) を用いた。上式は p_0 の

^{†52} 吸収線については節 5.3.3 も参照のこと。

値が光子の描く世界線に沿って保存されることを表す^{†53}。

考えている座標系において静止している物体の 4 元速度は次のように表される。

$$(u^\mu) = \left(\frac{c}{\sqrt{-g_{00}}}, 0, 0, 0 \right) \quad (7.9.17)$$

ただし、 u^0 の表式は規格化条件 $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -c^2$ を具体的に計算すれば分かる。発せられた振動数 ν_{em} と観測された振動数 ν_{rec} の比は式 (7.9.4) を用いて次のように表される。

$$\frac{\nu_{\text{rec}}}{\nu_{\text{em}}} = \frac{u^0(\mathcal{P}_{\text{rec}})p_0(\mathcal{P}_{\text{rec}})}{u^0(\mathcal{P}_{\text{em}})p_0(\mathcal{P}_{\text{em}})} \quad (7.9.18)$$

$$= \sqrt{\frac{-g_{00}(\mathcal{P}_{\text{em}})}{-g_{00}(\mathcal{P}_{\text{rec}})}} \quad (7.9.19)$$

ただし、上の議論より $p_0(\mathcal{P}_{\text{em}}) = p_0(\mathcal{P}_{\text{rec}})$ であることを用いた。

弱くて ($|\phi_g|/c^2 \ll 1$) 時間変化しない重力下では、計量の 00 成分は重力ポテンシャル ϕ_g を用いて次のように表されるのであった。

$$g_{00} = - \left(1 + \frac{2\phi_g}{c^2} \right) \quad (7.9.20)$$

つまり、式 (7.9.19) は光が発せられた空間座標 \mathbf{x}_{em} と観測された空間座標 \mathbf{x}_{rec} における重力ポテンシャルを用いて次のように書ける。

$$\frac{\nu_{\text{rec}}}{\nu_{\text{em}}} = \sqrt{\frac{1 + 2\phi_g(\mathbf{x}_{\text{em}})/c^2}{1 + 2\phi_g(\mathbf{x}_{\text{rec}})/c^2}} \quad (7.9.21)$$

$$\simeq 1 + \frac{\phi_g(\mathbf{x}_{\text{em}})}{c^2} - \frac{\phi_g(\mathbf{x}_{\text{rec}})}{c^2} \quad (7.9.22)$$

つまり、重力赤方偏移の大きさは光が発せられた座標と観測された座標の重力ポテンシャル差に依存する。

太陽に関する量には添え字 \odot 、地球に関する量には添え字 \oplus を用いる。国際天文学連合 (IAU) の 2015 年時点での推奨値 (Prša et al., 2016)

$$GM_\odot = 1.327 \times 10^{20} \text{ m}^3\text{s}^{-2} \quad (7.9.23)$$

$$R_\odot = 6.957 \times 10^8 \text{ m} \quad (7.9.24)$$

$$GM_\oplus = 3.986 \times 10^{14} \text{ m}^3\text{s}^{-2} \quad (7.9.25)$$

$$R_\oplus = 6.378 \times 10^6 \text{ m} \quad (7.9.26)$$

$$1 \text{ au} = 1.496 \times 10^{11} \text{ m} \quad (7.9.27)$$

^{†53} 節 7.7.3 の概念を用いると、計量が座標時 x^0 に依らない場合、 x^0 の方向ベクトル $(\xi^\mu) = (1, 0, 0, 0)$ がキリングベクトルになるため、内積 $p_\mu \xi^\mu = p_0$ は測地線に沿って保存される。これは光子のエネルギー保存則に相当する。

を用いて計算する。太陽表面と地球 (距離 1 au) 間の太陽による重力ポテンシャル差は

$$\frac{\delta\phi_{\odot}}{c} = \frac{GM_{\odot}}{c} \left(\frac{1}{R_{\odot}} - \frac{1}{1 \text{ au}} \right) = 633.3 \text{ m s}^{-1} \quad (7.9.28)$$

と計算できるのに対し、地球が作る重力ポテンシャルの地表における値は

$$\frac{\delta\phi_{\oplus}}{c} = \frac{GM_{\oplus}}{cR_{\oplus}} = 0.2 \text{ m s}^{-1} \quad (7.9.29)$$

と計算できる。よって、地表で太陽光を観測した場合は、ドップラー速度に換算して

$$\frac{\delta\phi_{\odot}}{c} - \frac{\delta\phi_{\oplus}}{c} = 633.1 \text{ m s}^{-1} \quad (7.9.30)$$

に相当する幅の重力赤方偏移が起きる。

観測

太陽光の重力赤方偏移の観測例として [González Hernández et al. \(2020\)](#) を紹介する。この研究では、高精度で波長の絶対値を測定できる特殊な分光器を用いて月で反射された太陽光の観測が行われた。ヨーロッパ南天天文台 (ESO) の 3.6 メートル望遠鏡に設置された分光器 HARPS は、発する波長が分かっているレーザー光と観測されたスペクトルを比較することにより、ドップラー速度に換算して 1 m s^{-1} 以下の精度で波長の絶対値を測定することができる。この装置を用いて、鉄により形成される吸収線 257 個の中心波長を測定することにより、重力赤方偏移が見積もられた。

この際に問題になるのは太陽表面の対流である。太陽表面には粒状斑 (granulation) と呼ばれる熱対流が存在する。これは、 1 km s^{-1} のオーダーの上昇流や下降流が 1000 km 程度の空間スケールで乱雑に起きる現象である。つまり、粒状斑を解像出来る分解能で太陽表面を観測した場合、各領域は粒状斑対流によって乱雑に赤方/青方偏移している。[González Hernández et al. \(2020\)](#) では月に反射した太陽光を観測しているため、各領域から発せられたスペクトルを広範囲で平均した量を観測することになる。このため、光球で形成される吸収線を観測した場合、ドップラー幅 (節 5.3.4 参照) よりも太い線輪郭が観測される。更に、粒状斑対流の下降流域よりも上昇流域の方が明るいため、青方偏移が卓越し、吸収線の中心波長は青色側にずれることになる。高高度ほど対流の速さは小さくなるため、このずれ幅は高高度で形成される吸収線ほど小さくなるはずである。つまり、吸収線によって異なる。この粒状斑対流による青方偏移の大きさは不運にも重力赤方偏移と同じオーダーであるため、この効果を正しく取り除かないことには重力赤方偏移の測定結果が得られない。

粒状斑対流は 3 次元シミュレーションによって比較的良い精度で再現することができる (e.g. [Nordlund et al., 2009](#))。シミュレーションから計算された、粗い分解能で観測したときの青方偏移した吸収線の線輪郭は観測と良い精度で一致する ([Asplund et al., 2000](#))。

González Hernández et al. (2020) は、3次元シミュレーション結果から推定された吸収線の中心波長と観測された中心波長を比較し、たくさんの吸収線について統計を取ることによって、最終的には重力赤方偏移の値として $638 \pm 6 \text{ m s}^{-1}$ を得た。これは不確かさの範囲内で理論値と一致している。

太陽の重力赤方偏移の観測の歴史については竹田洋一 (2013) を参考にして欲しい。

7.9.3 放射輸送方程式 (ボルツマン方程式)

光子の分布関数 $f(x^\alpha, p^i)$ を考える。分布関数とは、注目する世界点で局所直交座標 (ct, x, y, z) をとったとき、

$$f(t, x^i, p^i) dx dy dz dp^1 dp^2 dp^3 \quad (7.9.31)$$

が 6次元相空間中の体積要素 $dx dy dz dp^1 dp^2 dp^3$ 内の光子数となるような量である。測地線に沿った光子数の保存則をあらわすボルツマン方程式、すなわち放射輸送方程式は、アフィンパラメータ λ を用いて次のように書ける。

$$\frac{df}{d\lambda} = C[f] \quad (7.9.32)$$

$C[f]$ は物質との相互作用により注目する測地線での光子数が増減する効果を表す。上式に連鎖律と式 (7.9.3) を用いることで、放射輸送方程式は次のようにも書ける。

$$p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - \Gamma^i_{\beta\gamma} p^\beta p^\gamma \frac{\partial f}{\partial p^i} = C[f] \quad (7.9.33)$$

特にローレンツ系では $\Gamma^i_{\beta\gamma} = 0$ であり、このローレンツ系で見た振動数を $\tilde{\nu}$ 、放射方向を $\tilde{\ell}^i$ とすると

$$(p^\alpha) = \frac{h\tilde{\nu}}{c} (1, \tilde{\ell}^i) \quad (7.9.34)$$

と表せることを用いれば、放射輸送方程式は

$$\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} + \tilde{\ell}^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{c}{h\tilde{\nu}} C[f] \quad (7.9.35)$$

となる。分布関数と放射強度の間に $f = c^2 I_\nu / (h^4 \tilde{\nu}^3)$ という関係があること (節 5.1.1、277 ページの脚注を参照) を用いれば、これは節 5.1.2 で説明した放射輸送方程式 (5.1.30) と同じ式であることが分かる。光子の放射と吸収のみを考慮した衝突項 $C[f]$ は、第 5 章で用いた放射率 \tilde{j}_ν と吸収係数 $\tilde{\alpha}_\nu$ (ただしローレンツ系、つまり実験室系で評価した値) によって

$$C[f] = \frac{c\tilde{j}_\nu}{h^3 \tilde{\nu}^2} - \frac{h\tilde{\nu}\tilde{\alpha}_\nu}{c} f \quad (7.9.36)$$

と表される。

分布関数の引数として、与えられた計量 $g_{\alpha\beta}$ が表す座標 x^α 、共動系で見た振動数 ν と放射方向 (θ, ϕ) の 7 変数を選ぶことにする。各世界点における共動系から x^α への変換を $L^\alpha_{\hat{\alpha}}$ とする^{†54}。また、

$$(p^{\hat{i}}) = (\nu, \theta, \phi) \tag{7.9.37}$$

と書くことにする。すると、放射輸送方程式は次のように書ける。

$$L^\alpha_{\hat{\alpha}} p^{\hat{\alpha}} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - \Gamma^{\hat{j}}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}} p^{\hat{\beta}} p^{\hat{\gamma}} \frac{\partial p^{\hat{i}}}{\partial p^{\hat{j}}} \frac{\partial f}{\partial p^{\hat{i}}} = C[f] \tag{7.9.38}$$

$\Gamma^{\hat{j}}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}$ は共動系での接続係数である。 $\partial p^{\hat{i}}/\partial p^{\hat{j}}$ を行列表示 (\hat{i} 行 \hat{j} 列) すると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p^{\hat{i}}}{\partial p^{\hat{j}}} \end{pmatrix} = \frac{c}{h\nu} \begin{pmatrix} \nu \sin \theta \cos \phi & \nu \sin \theta \sin \phi & \nu \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi / \sin \theta & \cos \phi / \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \tag{7.9.39}$$

である。

7.9.4 放射モーメント方程式

式 (7.9.38) は次のような形式に書き換えることができる^{†55}。

$$S^\mu + M^\mu = L^\mu_{\hat{\mu}} p^{\hat{\mu}} C[f] \tag{7.9.40}$$

ただし、

$$S^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{-g} L^\mu_{\hat{\mu}} L^\alpha_{\hat{\alpha}} p^{\hat{\mu}} p^{\hat{\alpha}} f) + \Gamma^\mu_{\beta\gamma} L^\beta_{\hat{\beta}} L^\gamma_{\hat{\gamma}} p^{\hat{\beta}} p^{\hat{\gamma}} f \tag{7.9.41}$$

$$M^\mu = \frac{1}{\nu \sin \theta} \frac{\partial}{\partial p^{\hat{i}}} \left(-\nu \sin \theta \Gamma^{\hat{j}}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}} \frac{\partial p^{\hat{i}}}{\partial p^{\hat{j}}} L^\mu_{\hat{\mu}} p^{\hat{\mu}} p^{\hat{\beta}} p^{\hat{\gamma}} f \right) \tag{7.9.42}$$

任意の世界点において、局所直交系をとったとき、その座標系での 4 元運動量の成分 $p^{\bar{\alpha}}$ を用いて

$$dP = \frac{dp^{\bar{1}} dp^{\bar{2}} dp^{\bar{3}}}{p^{\bar{0}}} \tag{7.9.43}$$

^{†54} 具体的には次のように分解できる。

$$L^\alpha_{\hat{\alpha}} = b^\alpha_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\bar{\alpha}}_{\hat{\alpha}}$$

$\Lambda^{\bar{\alpha}}_{\hat{\alpha}}$ は共動系から別の局所直交系へのローレンツブーストであり、 $b^\alpha_{\bar{\alpha}}$ はその直交系から x^α への変換

$$b^\alpha_{\bar{\alpha}} b^\beta_{\bar{\beta}} g_{\alpha\beta} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$$

(節 7.1.6 の 3 ステップ目の変換) である。

^{†55} 式 (7.1.22) の関係も用いる。

と表される量を運動量空間の不変体積要素と言う。同じ世界点を考える限りどのような局所直交系をとっても不変な量である。特に共動系で見た振動数 ν と放射方向 (θ, ϕ) で表すと

$$dP = \frac{h^2}{c^2} \nu d\nu \sin \theta d\theta d\phi = \frac{h^2}{c^2} \nu d\nu d\Omega \quad (7.9.44)$$

と書ける。この不変体積要素での積分を用いて、放射場のエネルギー運動量テンソルを

$$T^{\alpha\beta}(x^\mu) = c \int p^\alpha p^\beta f(x^\mu, \nu, \theta, \phi) dP \quad (7.9.45)$$

と定義する。式 (7.9.40) の両辺を不変体積要素で積分すると、運動量微分の項が消えて次のようになる^{†56}。

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = -g^\alpha \quad (7.9.46)$$

$$\text{ただし, } g^\alpha = -c \int p^\alpha C[f] dP \quad (7.9.47)$$

これは放射場のエネルギー運動量保存則を表す^{†57}。 g^α は流体が放射場から得る 4 元運動量を表す。

オイラー的観測者の速度を n^α としたとき、オイラー的観測者から見た放射エネルギー密度 u 、放射フラックス F^α 、放射圧テンソル $P^{\alpha\beta}$ は次のように表される (節 7.8.3 参照)。

$$u = \frac{n_\alpha n_\beta}{c^2} T^{\alpha\beta} \quad (7.9.48)$$

$$F^\alpha = -h^\alpha_\beta n_\gamma T^{\beta\gamma} \quad (7.9.49)$$

$$P^{\alpha\beta} = h^\alpha_\gamma h^\beta_\delta T^{\gamma\delta} \quad (7.9.50)$$

h^α_β は n^α に垂直な方向への射影テンソルである。特にローレンツ系の場合、式 (7.9.4), (7.9.34) の関係と、ローレンツ因子 W を用いて $(u^\alpha) = W(c, v^i)$ と表せることより、ローレンツ系 (実験室系) で見た振動数 $\tilde{\nu}$ と共動系で見た振動数 ν の間には

$$h\nu = h\tilde{\nu}W \left(1 - \frac{v_i \tilde{\ell}^i}{c}\right) \quad (7.9.51)$$

という関係があるが、流体の 3 元速度 v^i が光速に比べて十分に小さい場合は両者は等しいと考

^{†56} 570 ページの脚注で説明した、2 階対称テンソルの 4 元発散の公式を用いる。

^{†57} 一方で、不変体積要素の代わりに立体角 $d\Omega$ で式 (7.9.40) の両辺を積分した式を考えると、単色の放射モーメントに関する保存則が得られる。単色の放射モーメントについては Cardall et al. (2013), Shibata et al. (2011) を読んで欲しい。本節では以後、振動数で積分した放射モーメントに関する保存則について説明する。

えられる。この場合、上記の放射モーメントはそれぞれ次のように書ける。

$$u = T^{00} = \frac{h^4}{c^3} \int d\nu \int d\Omega f \nu^3 \quad (7.9.52)$$

$$F^i = cT^{i0} = \frac{h^4}{c^2} \int d\nu \int d\Omega \tilde{\ell}^i f \nu^3 \quad (7.9.53)$$

$$P^{ij} = T^{ij} = \frac{h^4}{c^3} \int d\nu \int d\Omega \tilde{\ell}^i \tilde{\ell}^j f \nu^3 \quad (7.9.54)$$

$f = c^2 I_\nu / (h^4 \tilde{\nu}^3)$ という関係を用いれば、上式は節 5.1.1 で述べた放射モーメントの定義と一致することが分かる。放射場のエネルギー運動量テンソルは上記の量を用いて次のように分解できる。

$$T^{\alpha\beta} = u \frac{n^\alpha n^\beta}{c^2} + F^\alpha \frac{n^\beta}{c^2} + F^\beta \frac{n^\alpha}{c^2} + P^{\alpha\beta} \quad (7.9.55)$$

よって、保存則 (7.9.46) を節 7.8.3 と同様にして書き換えることで、3+1 形式での放射エネルギー保存則と運動量保存則は次のように書ける。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\gamma}u) + \frac{\partial}{\partial x^j}[\sqrt{\gamma}(\alpha F^j - \beta^j cu)] = \alpha^2 \sqrt{\gamma}c (T^{\alpha 0} \partial_\alpha \ln \alpha - T^{\alpha\beta} \Gamma^0_{\alpha\beta}) - \alpha c g^0 \quad (7.9.56)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\gamma}F_i) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\sqrt{\gamma} \left(\alpha P^j_i - \frac{\beta^j}{c} F_i \right) \right] = \frac{\alpha \sqrt{\gamma}}{2} T^{\alpha\beta} \partial_i g_{\alpha\beta} - g_i \quad (7.9.57)$$

特にローレンツ系で節 5.1.3 の形式と一致することは直ぐに確かめられる。また、 g^0, g^i は節 5.1.3 で導入した g^0, \mathbf{g} と同じ量であることも分かる。

参考文献

-
- Alfè, D., Gillan, M., & Price, G. (2002), Composition and temperature of the Earth's core constrained by combining ab initio calculations and seismic data, *Earth and Planetary Science Letters*, **195**, 91–98. doi: [10.1016/S0012-821X\(01\)00568-4](https://doi.org/10.1016/S0012-821X(01)00568-4)
- Aluie, H., & Eyink, G. L. (2009), Localness of energy cascade in hydrodynamic turbulence. II. Sharp spectral filter, *Physics of Fluids*, **21**, 115108. doi: [10.1063/1.3266948](https://doi.org/10.1063/1.3266948)
- Antón, L., Zanotti, O., Miralles, J. A., et al. (2006), Numerical 3+1 general relativistic magnetohydrodynamics: A local characteristic approach, *The Astrophysical Journal*, **637**, 296–312. doi: [10.1086/498238](https://doi.org/10.1086/498238)
- Anufriev, A. P., Jones, C. A., & Soward, A. M. (2005), The Boussinesq and anelastic liquid approximations for convection in the Earth's core, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **152**, 163–190. doi: [10.1016/j.pepi.2005.06.004](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2005.06.004)
- Arendt, Jr., P. N. (1998), Electromagnetic forces and fields in a rotating reference frame (preprint), <https://arxiv.org/abs/astro-ph/9801194>
- Asplund, M., Grevesse, N., Sauval, A. J., & Scott, P. (2009), The chemical composition of the Sun, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **47**, 481–522. doi: [10.1146/annurev.astro.46.060407.145222](https://doi.org/10.1146/annurev.astro.46.060407.145222)
- Asplund, M., Nordlund, A., Trampedach, R., Allende Prieto, C., & Stein, R. F. (2000), Line formation in solar granulation. I. Fe line shapes, shifts and asymmetries, *Astronomy & Astrophysics*, **359**, 729–742, <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2000A%26A...359..729A/abstract>
- Atkins, P. W., & Friedman, R. S. (2010), *Molecular Quantum Mechanics*, 5th edn. (Oxford: Oxford University Press)
- Aurnou, J. M., Calkins, M. A., Cheng, J. S., et al. (2015), Rotating convective turbulence in Earth and planetary cores, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **246**, 52–71. doi: [10.1016/j.pepi.2015.07.001](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2015.07.001)
- Balescu, R. (1988), *Transport Processes in Plasmas, Vol. 2: Neoclassical Transport Theory* (Amsterdam: North Holland)
- Ballester, J. L., Alexeev, I., Collados, M., et al. (2018), Partially ionized plasmas in astrophysics, *Space Science Reviews*, **214**, 58. doi: [10.1007/s11214-018-0485-6](https://doi.org/10.1007/s11214-018-0485-6)

- Barnett, S. M., Babiker, M., & Padgett, M. J. (2017), Optical orbital angular momentum, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **375**, 20150444. doi: [10.1098/rsta.2015.0444](https://doi.org/10.1098/rsta.2015.0444)
- Bellot Rubio, L., & Orozco Suárez, D. (2019), Quiet Sun magnetic fields: an observational view, *Living Reviews in Solar Physics*, **16**, 1. doi: [10.1007/s41116-018-0017-1](https://doi.org/10.1007/s41116-018-0017-1)
- Berger, M. A. (1984), Rigorous new limits on magnetic helicity dissipation in the solar corona, *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, **30**, 79–104. doi: [10.1080/03091928408210078](https://doi.org/10.1080/03091928408210078)
- Berger, M. A., & Field, G. B. (1984), The topological properties of magnetic helicity, *Journal of Fluid Mechanics*, **147**, 133–148. doi: [10.1017/S0022112084002019](https://doi.org/10.1017/S0022112084002019)
- Black, D. C., & Bodenheimer, P. (1975), Evolution of rotating interstellar clouds. I - Numerical techniques, *The Astrophysical Journal*, **199**, 619–632. doi: [10.1086/153729](https://doi.org/10.1086/153729)
- Blum, K. (2012), *Density Matrix Theory and Applications*, 3rd edn. (Berlin: Springer). doi: [10.1007/978-3-642-20561-3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-20561-3)
- Bodhaine, B. A., Wood, N. B., Dutton, E. G., & Slusser, J. R. (1999), On Rayleigh optical depth calculations, *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, **16**, 1854–1861. doi: [10.1175/1520-0426\(1999\)016<1854:ORODCj2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0426(1999)016<1854:ORODCj2.0.CO;2)
- Boley, A. C., Hartquist, T. W., Durisen, R. H., & Michael, S. (2007), The internal energy for molecular hydrogen in gravitationally unstable protoplanetary disks, *The Astrophysical Journal*, **656**, L89–L92. doi: [10.1086/512235](https://doi.org/10.1086/512235)
- Borovsky, J. E., & Valdivia, J. A. (2018), The Earth’s magnetosphere: A systems science overview and assessment, *Surveys in Geophysics*, **39**, 817–859. doi: [10.1007/s10712-018-9487-x](https://doi.org/10.1007/s10712-018-9487-x)
- Borrero, J. M., & Ichimoto, K. (2011), Magnetic structure of sunspots, *Living Reviews in Solar Physics*, **8**, 4. doi: [10.12942/lrsp-2011-4](https://doi.org/10.12942/lrsp-2011-4)
- Braginskii, S. I. (1958), Transport phenomena in a completely ionized two-temperature plasma, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, **6**, 358–369, <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1958JETP....6..358B/abstract>
- . (1965), Transport processes in a plasma, *Reviews of Plasma Physics*, **1**, 205–311
- Braginsky, S. I., & Roberts, P. H. (1995), Equations governing convection in earth’s core and the geodynamo, *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, **79**, 1–97. doi: [10.1080/03091929508228992](https://doi.org/10.1080/03091929508228992)
- . (2007), Anelastic and Boussinesq approximations, in *Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism*, ed. D. Gubbins & E. Herrero-Bervera (Dordrecht: Springer), 11–19. doi: [10.1007/978-1-4020-4423-6_6](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-4423-6_6)

- Bronzwaer, T., Davelaar, J., Younsi, Z., et al. (2018), RAPTOR - I. Time-dependent radiative transfer in arbitrary spacetimes, *Astronomy & Astrophysics*, **613**, A2. doi: [10.1051/0004-6361/201732149](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201732149)
- Brun, A. S., Miesch, M. S., & Toomre, J. (2011), Modeling the dynamical coupling of solar convection with the radiative interior, *The Astrophysical Journal*, **742**, 79. doi: [10.1088/0004-637x/742/2/79](https://doi.org/10.1088/0004-637x/742/2/79)
- Brun, A. S., & Rempel, M. (2009), Large scale flows in the solar convection zone, *Space Science Reviews*, **144**, 151–173. doi: [10.1007/s11214-008-9454-9](https://doi.org/10.1007/s11214-008-9454-9)
- Burke, P. G. (2011), *R-Matrix Theory of Atomic Collisions: Application to Atomic, Molecular and Optical Processes* (Berlin: Springer). doi: [10.1007/978-3-642-15931-2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-15931-2)
- Calvo, G. F., Picón, A., & Bagan, E. (2006), Quantum field theory of photons with orbital angular momentum, *Physical Review A*, **73**, 013805. doi: [10.1103/PhysRevA.73.013805](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.73.013805)
- Cameron, R. P. (2014), On the angular momentum of light, PhD thesis, University of Glasgow, Glasgow, <http://theses.gla.ac.uk/5849/>
- Cantwell, B. J. (2019/08/26 閲覧), Fundamentals of compressible flow (Lecture notes at Stanford University), <https://web.stanford.edu/~cantwell/>
- Cardall, C. Y., Endeve, E., & Mezzacappa, A. (2013), Conservative 3+1 general relativistic variable Eddington tensor radiation transport equations, *Physical Review D*, **87**, 103004. doi: [10.1103/PhysRevD.87.103004](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.103004)
- Carlsson, M., De Pontieu, B., & Hansteen, V. H. (2019), New view of the solar chromosphere, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **57**, 189–226. doi: [10.1146/annurev-astro-081817-052044](https://doi.org/10.1146/annurev-astro-081817-052044)
- Carlsson, M., & Leenaarts, J. (2012), Approximations for radiative cooling and heating in the solar chromosphere, *Astronomy & Astrophysics*, **539**, A39. doi: [10.1051/0004-6361/201118366](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201118366)
- Casini, R., White, S. M., & Judge, P. G. (2017), Magnetic diagnostics of the solar corona: synthesizing optical and radio techniques, *Space Science Reviews*, **210**, 145–181. doi: [10.1007/s11214-017-0400-6](https://doi.org/10.1007/s11214-017-0400-6)
- Castor, J. I. (2004), *Radiation Hydrodynamics* (Cambridge: Cambridge University Press). doi: [10.1017/CBO9780511536182](https://doi.org/10.1017/CBO9780511536182)
- Charbonneau, P. (2014), Solar dynamo theory, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **52**, 251–290. doi: [10.1146/annurev-astro-081913-040012](https://doi.org/10.1146/annurev-astro-081913-040012)
- Choudhuri, A. R. (2021), The meridional circulation of the Sun: Observations, theory and connections with the solar dynamo, *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, **64**, 239601. doi: [10.1007/s11433-020-1628-1](https://doi.org/10.1007/s11433-020-1628-1)

- Christensen, U. R., & Wicht, J. (2015), 8.10 - Numerical dynamo simulations, in *Treatise on Geophysics*, 2nd edn., ed. G. Schubert (Oxford: Elsevier), 245–277. doi: [10.1016/B978-0-444-53802-4.00145-7](https://doi.org/10.1016/B978-0-444-53802-4.00145-7)
- Christensen-Dalsgaard, J. (2021), Solar structure and evolution, *Living Reviews in Solar Physics*, **18**, 2. doi: [10.1007/s41116-020-00028-3](https://doi.org/10.1007/s41116-020-00028-3)
- Christensen-Dalsgaard, J., Däppen, W., Ajukov, S. V., et al. (1996), The current state of solar modeling, *Science*, **272**, 1286–1292. doi: [10.1126/science.272.5266.1286](https://doi.org/10.1126/science.272.5266.1286)
- Cox, A. N., ed. (2002), *Allen's Astrophysical Quantities* (New York: Springer). doi: [10.1007/978-1-4612-1186-0](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1186-0)
- Davidson, P. A. (2001), *An Introduction to Magnetohydrodynamics* (Cambridge: Cambridge University Press). doi: [10.1017/CBO9780511626333](https://doi.org/10.1017/CBO9780511626333)
- . (2013), Scaling laws for planetary dynamos, *Geophysical Journal International*, **195**, 67–74. doi: [10.1093/gji/ggt167](https://doi.org/10.1093/gji/ggt167)
- Davies, C. J., & Gubbins, D. (2011), A buoyancy profile for the Earth's core, *Geophysical Journal International*, **187**, 549–563. doi: [10.1111/j.1365-246X.2011.05144.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2011.05144.x)
- de la Cruz Rodríguez, J., & van Noort, M. (2017), Radiative diagnostics in the solar photosphere and chromosphere, *Space Science Reviews*, **210**, 109–143. doi: [10.1007/s11214-016-0294-8](https://doi.org/10.1007/s11214-016-0294-8)
- del Toro Iniesta, J. C., & Ruiz Cobo, B. (2016), Inversion of the radiative transfer equation for polarized light, *Living Reviews in Solar Physics*, **13**, 4. doi: [10.1007/s41116-016-0005-2](https://doi.org/10.1007/s41116-016-0005-2)
- Del Zanna, G., & Mason, H. E. (2018), Solar UV and X-ray spectral diagnostics, *Living Reviews in Solar Physics*, **15**, 5. doi: [10.1007/s41116-018-0015-3](https://doi.org/10.1007/s41116-018-0015-3)
- Dere, K. P., Landi, E., Young, P. R., et al. (2009), CHIANTI - an atomic database for emission lines - IX. Ionization rates, recombination rates, ionization equilibria for the elements hydrogen through zinc and updated atomic data, *Astronomy & Astrophysics*, **498**, 915–929. doi: [10.1051/0004-6361/200911712](https://doi.org/10.1051/0004-6361/200911712)
- Dere, K. P., Zanna, G. D., Young, P. R., Landi, E., & Sutherland, R. S. (2019), CHIANTI—An atomic database for emission lines. XV. Version 9, Improvements for the X-ray satellite lines, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, **241**, 22. doi: [10.3847/1538-4365/ab05cf](https://doi.org/10.3847/1538-4365/ab05cf)
- Dickenson, G. D., Niu, M. L., Salumbides, E. J., et al. (2013), Fundamental vibration of molecular hydrogen, *Physical Review Letters*, **110**, 193601. doi: [10.1103/PhysRevLett.110.193601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.193601)
- Dodelson, S., & Schmidt, F. (2020), *Modern Cosmology*, 2nd edn. (Oxford: Elsevier). doi: [10.1016/B978-0-12-819622-7](https://doi.org/10.1016/B978-0-12-819622-7)

10.1016/C2017-0-01943-2

- dos Santos, W. C. (2016), Introduction to Einstein-Maxwell equations and the Rainich conditions (preprint), <https://arxiv.org/abs/1606.08527>
- Dziewonski, A. M., & Anderson, D. L. (1981), Preliminary reference Earth model, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **25**, 297–356. doi: 10.1016/0031-9201(81)90046-7
- Epperlein, E. M., & Haines, M. G. (1986), Plasma transport coefficients in a magnetic field by direct numerical solution of the Fokker–Planck equation, *The Physics of Fluids*, **29**, 1029–1041. doi: 10.1063/1.865901
- Feldman, U., Mandelbaum, P., Seely, J. F., Doschek, G. A., & Gursky, H. (1992), The potential for plasma diagnostics from stellar extreme-ultraviolet observations, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, **81**, 387. doi: 10.1086/191698
- Font, J. A. (2008), Numerical hydrodynamics and magnetohydrodynamics in general relativity, *Living Reviews in Relativity*, **11**, 7. doi: 10.12942/lrr-2008-7
- Fontenla, J. M., Avrett, E. H., & Loeser, R. (1993), Energy balance in the solar transition region. III. Helium emission in hydrostatic, constant-abundance models with diffusion, *The Astrophysical Journal*, **406**, 319–345. doi: 10.1086/172443
- Galtier, S. (2016), *Introduction to Modern Magnetohydrodynamics* (Cambridge: Cambridge University Press). doi: 10.1017/CBO9781316665961
- Gastine, T., Yadav, R. K., Morin, J., Reiners, A., & Wicht, J. (2013), From solar-like to antisolar differential rotation in cool stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, **438**, L76–L80. doi: 10.1093/mnrasl/slt162
- Glatzmaier, G. A. (1984), Numerical simulations of stellar convective dynamos. I. The model and method, *Journal of Computational Physics*, **55**, 461–484. doi: 10.1016/0021-9991(84)90033-0
- Goedbloed, H., Keppens, R., & Poedts, S. (2019), *Magnetohydrodynamics of Laboratory and Astrophysical Plasmas* (Cambridge: Cambridge University Press). doi: 10.1017/9781316403679
- González Hernández, J. I., Rebolo, R., Pasquini, L., et al. (2020), The solar gravitational redshift from HARPS-LFC Moon spectra. A test of the general theory of relativity, *Astronomy & Astrophysics*, **643**, A146. doi: 10.1051/0004-6361/202038937
- Goodman, M. L., & Judge, P. G. (2012), Radiating current sheets in the solar chromosphere, *The Astrophysical Journal*, **751**, 75. doi: 10.1088/0004-637X/751/1/75
- Gourgoulhon, E. (2013), *Special Relativity in General Frames: From Particles to Astrophysics* (Berlin: Springer). doi: 10.1007/978-3-642-37276-6
- Greer, B. J., Hindman, B. W., Featherstone, N. A., & Toomre, J. (2015), Helioseismic imag-

- ing of fast convective flows throughout the near-surface shear layer, *The Astrophysical Journal*, **803**, L17. doi: [10.1088/2041-8205/803/2/L17](https://doi.org/10.1088/2041-8205/803/2/L17)
- Grevesse, N., & Sauval, A. (1998), Standard solar composition, *Space Science Reviews*, **85**, 161–174. doi: [10.1023/A:1005161325181](https://doi.org/10.1023/A:1005161325181)
- Griffiths, D. J. (2013), *Introduction to Quantum Mechanics: Pearson New International Edition*, 2nd edn. (Harlow: Pearson Education Limited)
- Grynberg, G., Aspect, A., Fabre, C., & Cohen-Tannoudji, C. (2010), *Introduction to Quantum Optics: From the Semi-classical Approach to Quantized Light* (Cambridge: Cambridge University Press). doi: [10.1017/CBO9780511778261](https://doi.org/10.1017/CBO9780511778261)
- Gubbins, D., Alfè, D., Davies, C., & Pozzo, M. (2015), On core convection and the geodynamo: Effects of high electrical and thermal conductivity, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **247**, 56–64, transport Properties of the Earth's Core. doi: [10.1016/j.pepi.2015.04.002](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2015.04.002)
- Gubbins, D., Alfè, D., Masters, G., Price, G. D., & Gillan, M. (2004), Gross thermodynamics of two-component core convection, *Geophysical Journal International*, **157**, 1407–1414. doi: [10.1111/j.1365-246X.2004.02219.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2004.02219.x)
- Gubbins, D., Alfè, D., Masters, G., Price, G. D., & Gillan, M. J. (2003), Can the Earth's dynamo run on heat alone?, *Geophysical Journal International*, **155**, 609–622. doi: [10.1046/j.1365-246X.2003.02064.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-246X.2003.02064.x)
- Gubbins, D., & Davies, C. (2013), The stratified layer at the core–mantle boundary caused by barodiffusion of oxygen, sulphur and silicon, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **215**, 21–28. doi: [10.1016/j.pepi.2012.11.001](https://doi.org/10.1016/j.pepi.2012.11.001)
- Guenther, D. B., Demarque, P., Kim, Y.-C., & Pinsonneault, M. H. (1992), Standard solar model, *The Astrophysical Journal*, **387**, 372–393. doi: [10.1086/171090](https://doi.org/10.1086/171090)
- Gurnett, D. A., & Bhattacharjee, A. (2005), *Introduction to Plasma Physics: With Space and Laboratory Applications* (Cambridge: Cambridge University Press). doi: [10.1017/CBO9780511809125](https://doi.org/10.1017/CBO9780511809125)
- Haas, F. (2011), *Quantum Plasmas: An Hydrodynamic Approach* (New York: Springer). doi: [10.1007/978-1-4419-8201-8](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8201-8)
- Hanasoge, S., Gizon, L., & Sreenivasan, K. R. (2016), Seismic sounding of convection in the Sun, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **48**, 191–217. doi: [10.1146/annurev-fluid-122414-034534](https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-122414-034534)
- Hanasoge, S., Miesch, M. S., Roth, M., et al. (2015), Solar dynamics, rotation, convection and overshoot, *Space Science Reviews*, **196**, 79–99. doi: [10.1007/s11214-015-0144-0](https://doi.org/10.1007/s11214-015-0144-0)
- Hanasoge, S. M., Duvall, T. L., & Sreenivasan, K. R. (2012), Anomalously weak solar

- convection, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **109**, 11928–11932. doi: [10.1073/pnas.1206570109](https://doi.org/10.1073/pnas.1206570109)
- Hanasoge, S. M., Hotta, H., & Sreenivasan, K. R. (2020), Turbulence in the Sun is suppressed on large scales and confined to equatorial regions, *Science Advances*, **6**, eaba9639. doi: [10.1126/sciadv.aba9639](https://doi.org/10.1126/sciadv.aba9639)
- Hansen, C. J., Kawaler, S. D., & Trimble, V. (2004), *Stellar Interiors: Physical Principles, Structure, and Evolution*, 2nd edn. (New York: Springer). doi: [10.1007/978-1-4419-9110-2](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9110-2)
- Hartigan, P., Frank, A., Varniere, P., & Blackman, E. G. (2007), Magnetic fields in stellar jets, *The Astrophysical Journal*, **661**, 910–918. doi: [10.1086/513499](https://doi.org/10.1086/513499)
- Hartigan, P., & Morse, J. (2007), Collimation, proper motions, and physical conditions in the HH 30 jet from Hubble Space Telescope slitless spectroscopy, *The Astrophysical Journal*, **660**, 426–440. doi: [10.1086/513015](https://doi.org/10.1086/513015)
- Helander, P., & Sigmar, D. J. (2002), *Collisional Transport in Magnetized Plasmas* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Hesthaven, J. S., & Warburton, T. (2008), *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications* (New York: Springer New York). doi: [10.1007/978-0-387-72067-8](https://doi.org/10.1007/978-0-387-72067-8)
- Holme, R. (2015), 8.04 - Large-scale flow in the core, in *Treatise on Geophysics*, 2nd edn., ed. G. Schubert (Oxford: Elsevier), 91–113. doi: [10.1016/B978-0-444-53802-4.00138-X](https://doi.org/10.1016/B978-0-444-53802-4.00138-X)
- Horton, W. (2017), *Turbulent Transport in Magnetized Plasmas*, 2nd edn. (Republic of Singapore: World Scientific). doi: [10.1142/10595](https://doi.org/10.1142/10595)
- Hotta, H. (2018), Breaking Taylor-Proudman balance by magnetic fields in stellar convection zones, *The Astrophysical Journal*, **860**, L24. doi: [10.3847/2041-8213/aacafb](https://doi.org/10.3847/2041-8213/aacafb)
- Hotta, H., Iijima, H., & Kusano, K. (2019), Weak influence of near-surface layer on solar deep convection zone revealed by comprehensive simulation from base to surface, *Science Advances*, **5**, eaau2307. doi: [10.1126/sciadv.aau2307](https://doi.org/10.1126/sciadv.aau2307)
- Hotta, H., Rempel, M., Yokoyama, T., Iida, Y., & Fan, Y. (2012), Numerical calculation of convection with reduced speed of sound technique, *Astronomy & Astrophysics*, **539**, A30. doi: [10.1051/0004-6361/201118268](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201118268)
- Huang, K. (1987), *Statistical Mechanics*, 2nd edn. (Hoboken: John Wiley & Sons)
- Iglesias, C. A., & Rogers, F. J. (1996), Updated OPAL opacities, *The Astrophysical Journal*, **464**, 943–953. doi: [10.1086/177381](https://doi.org/10.1086/177381)
- Iijima, H., & Yokoyama, T. (2015), Effect of coronal temperature on the scale of solar chromospheric jets, *The Astrophysical Journal*, **812**, L30. doi: [10.1088/2041-8205/812/2/L30](https://doi.org/10.1088/2041-8205/812/2/L30)

- Imada, S., Isobe, H., & Shimizu, T. (2011), Magnetic reconnection in the solar atmosphere observed by Hinode, in *The Sun, the Solar Wind, and the Heliosphere*, ed. M. P. Miralles & J. Sánchez Almeida (Dordrecht: Springer), 63–72. doi: [10.1007/978-90-481-9787-3_7](https://doi.org/10.1007/978-90-481-9787-3_7)
- Irwin, A. W. (1981), Polynomial partition function approximations of 344 atomic and molecular species, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, **45**, 621–633. doi: [10.1086/190730](https://doi.org/10.1086/190730)
- Ji, J.-Y., & Held, E. D. (2013), Closure and transport theory for high-collisionality electron-ion plasmas, *Physics of Plasmas*, **20**, 042114, erratum, *Physics of Plasmas*, **23**, 019901 (2016). doi: [10.1063/1.4801022](https://doi.org/10.1063/1.4801022)
- Jones, C. A. (2015), 8.05 - Thermal and compositional convection in the outer core, in *Treatise on Geophysics*, 2nd edn., ed. G. Schubert (Oxford: Elsevier), 115–159. doi: [10.1016/B978-0-444-53802-4.00141-X](https://doi.org/10.1016/B978-0-444-53802-4.00141-X)
- Kato, S., & Fukue, J. (2020), *Fundamentals of Astrophysical Fluid Dynamics: Hydrodynamics, Magnetohydrodynamics, and Radiation Hydrodynamics* (Singapore: Springer Singapore). doi: [10.1007/978-981-15-4174-2](https://doi.org/10.1007/978-981-15-4174-2)
- Khodachenko, M. L., Arber, T. D., Rucker, H. O., & Hanslmeier, A. (2004), Collisional and viscous damping of MHD waves in partially ionized plasmas of the solar atmosphere, *Astronomy & Astrophysics*, **422**, 1073–1084. doi: [10.1051/0004-6361:20034207](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20034207)
- Khomenko, E., Collados, M., Díaz, A., & Vitas, N. (2014), Fluid description of multi-component solar partially ionized plasma, *Physics of Plasmas*, **21**, 092901. doi: [10.1063/1.4894106](https://doi.org/10.1063/1.4894106)
- King, J. I. F., Sillars, R. V., & Harrison, R. H. (1965), Hopf q-FUNCTION evaluated to eight-digit accuracy., *The Astrophysical Journal*, **142**, 1655–1659. doi: [10.1086/148452](https://doi.org/10.1086/148452)
- Kippenhahn, R., Weigert, A., & Weiss, A. (2012), *Stellar Structure and Evolution*, 2nd edn. (Berlin: Springer). doi: [10.1007/978-3-642-30304-3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-30304-3)
- Kitchatinov, L. L. (2012), Theory of differential rotation and meridional circulation, *Proceedings of the International Astronomical Union*, **8**, 399–410. doi: [10.1017/S1743921313002834](https://doi.org/10.1017/S1743921313002834)
- . (2016), Meridional circulation in the sun and stars, *Geomagnetism and Aeronomy*, **56**, 945–951. doi: [10.1134/S0016793216080107](https://doi.org/10.1134/S0016793216080107)
- Kitchatinov, L. L., & Olemskoy, S. V. (2011), Differential rotation of main-sequence dwarfs and its dynamo efficiency, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **411**, 1059–1066. doi: [10.1111/j.1365-2966.2010.17737.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.17737.x)
- Konôpková, Z., McWilliams, R. S., Gómez-Pérez, N., & Goncharov, A. F. (2016), Direct measurement of thermal conductivity in solid iron at planetary core conditions, *Nature*,

- 534**, 99–101. doi: [10.1038/nature18009](https://doi.org/10.1038/nature18009)
- Krause, F., & Rädler, K.-H. (1980), *Mean-field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory* (Oxford: Pergamon Press). doi: [10.1016/C2013-0-03269-0](https://doi.org/10.1016/C2013-0-03269-0)
- Kulsrud, R. M. (2004), *Plasma Physics for Astrophysics* (Princeton: Princeton University Press)
- Laine, M., & Vuorinen, A. (2016), *Basics of Thermal Field Theory* (Cham: Springer). doi: [10.1007/978-3-319-31933-9](https://doi.org/10.1007/978-3-319-31933-9)
- Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1980), Course of Theoretical Physics, Vol. 5, *Statistical Physics, part 1*, 3rd edn. (Oxford: Pergamon Press Ltd.)
- (1987), Course of Theoretical Physics, Vol. 6, *Fluid Mechanics*, 2nd edn. (Oxford: Pergamon Press plc)
- Landi Degl’Innocenti, E., & Landolfi, M. (2004), *Polarization in Spectral Lines* (Dordrecht: Springer). doi: [10.1007/1-4020-2415-0](https://doi.org/10.1007/1-4020-2415-0)
- Leake, J. E., DeVore, C. R., Thayer, J. P., et al. (2014), Ionized plasma and neutral gas coupling in the Sun’s chromosphere and Earth’s ionosphere/thermosphere, *Space Science Reviews*, **184**, 107–172. doi: [10.1007/s11214-014-0103-1](https://doi.org/10.1007/s11214-014-0103-1)
- Leenaarts, J. (2020), Radiation hydrodynamics in simulations of the solar atmosphere, *Living Reviews in Solar Physics*, **17**, 3. doi: [10.1007/s41116-020-0024-x](https://doi.org/10.1007/s41116-020-0024-x)
- Leenaarts, J., Carlsson, M., Hansteen, V., & Rutten, R. J. (2007), Non-equilibrium hydrogen ionization in 2D simulations of the solar atmosphere*, *Astronomy & Astrophysics*, **473**, 625–632. doi: [10.1051/0004-6361:20078161](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20078161)
- Lites, B. W., & Ichimoto, K. (2013), The SP-PREP data preparation package for the Hinode Spectro-Polarimeter, *Solar Physics*, **283**, 601–629. doi: [10.1007/s11207-012-0205-4](https://doi.org/10.1007/s11207-012-0205-4)
- Lowrie, W. (2011), *A Student’s Guide to Geophysical Equations* (Cambridge: Cambridge University Press). doi: [10.1017/CBO9780511794438](https://doi.org/10.1017/CBO9780511794438)
- Matsui, H., King, E., & Buffett, B. (2014), Multiscale convection in a geodynamo simulation with uniform heat flux along the outer boundary, *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, **15**, 3212–3225. doi: [10.1002/2014GC005432](https://doi.org/10.1002/2014GC005432)
- McDonald, K. T. (2008), Electrodynamics of rotating systems (Joseph Henry Laboratories, Princeton University), <http://www.hep.princeton.edu/~mcdonald/examples/rotatingEM.pdf>
- Miesch, M. S. (2005), Large-Scale dynamics of the convection zone and tachocline, *Living Reviews in Solar Physics*, **2**, 1. doi: [10.12942/lrsp-2005-1](https://doi.org/10.12942/lrsp-2005-1)
- Mihalas, D., & Mihalas, B. W. (1999), *Foundations of Radiation Hydrodynamics* (New York: Dover Publications)

- Mininni, P. D., Alexakis, A., & Pouquet, A. (2008), Nonlocal interactions in hydrodynamic turbulence at high Reynolds numbers: The slow emergence of scaling laws, *Phys. Rev. E*, **77**, 036306. doi: [10.1103/PhysRevE.77.036306](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.77.036306)
- Nakagawa, Y., & Raadu, M. A. (1972), On practical representation of magnetic field, *Solar Physics*, **25**, 127–135. doi: [10.1007/BF00155751](https://doi.org/10.1007/BF00155751)
- Nimmo, F. (2015), 8.02 - Energetics of the Core, in *Treatise on Geophysics (Second Edition)*, 2nd edn., ed. G. Schubert (Oxford: Elsevier), 27–55. doi: [10.1016/B978-0-444-53802-4.00139-1](https://doi.org/10.1016/B978-0-444-53802-4.00139-1)
- Nordlund, A., Stein, R. F., & Asplund, M. (2009), Solar surface convection, *Living Reviews in Solar Physics*, **6**, 2. doi: [10.12942/lrsp-2009-2](https://doi.org/10.12942/lrsp-2009-2)
- Ogilvie, G. I. (2016), Astrophysical fluid dynamics, *Journal of Plasma Physics*, **82**, 205820301. doi: [10.1017/S0022377816000489](https://doi.org/10.1017/S0022377816000489)
- O'Mara, B., Miesch, M. S., Featherstone, N. A., & Augustson, K. C. (2016), Velocity amplitudes in global convection simulations: The role of the Prandtl number and near-surface driving, *Advances in Space Research*, **58**, 1475–1489, solar Dynamo Frontiers. doi: [10.1016/j.asr.2016.03.038](https://doi.org/10.1016/j.asr.2016.03.038)
- Pain, J.-C., Gilleron, F., & Comet, M. (2017), Detailed opacity calculations for astrophysical applications, *Atoms*, **5**, 22. doi: [10.3390/atoms5020022](https://doi.org/10.3390/atoms5020022)
- Pandey, B. P., & Wardle, M. (2008), Hall magnetohydrodynamics of partially ionized plasmas, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **385**, 2269–2278. doi: [10.1111/j.1365-2966.2008.12998.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.12998.x)
- Pedlosky, J. (2003), *Waves in the Ocean and Atmosphere* (Berlin: Springer). doi: [10.1007/978-3-662-05131-3](https://doi.org/10.1007/978-3-662-05131-3)
- Pollock, C. (2003), Mercury's perihelion (2019/12/01 閲覧), http://www.math.toronto.edu/~colliand/426_03/Papers03/C_Pollock.pdf
- Price, D. (2007), Core properties, theoretical determination, in *Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism*, ed. D. Gubbins & E. Herrero-Bervera (Dordrecht: Springer), 94–98. doi: [10.1007/978-1-4020-4423-6_39](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-4423-6_39)
- Price, M. P., & Rush, W. F. (1979), Nonrelativistic contribution to Mercury's perihelion precession, *American Journal of Physics*, **47**, 531–534. doi: [10.1119/1.11779](https://doi.org/10.1119/1.11779)
- Priest, E. (2014), *Magnetohydrodynamics of the Sun* (Cambridge: Cambridge University Press). doi: [10.1017/CBO9781139020732](https://doi.org/10.1017/CBO9781139020732)
- Prša, A., Harmanec, P., Torres, G., et al. (2016), Nominal Values for Selected Solar and Planetary Quantities: IAU 2015 Resolution B3, *The Astronomical Journal*, **152**, 41. doi: [10.3847/0004-6256/152/2/41](https://doi.org/10.3847/0004-6256/152/2/41)

- Rajaguru, S. P., & Antia, H. M. (2020), Time-Distance Helioseismology of Deep Meridional Circulation, in *Dynamics of the Sun and Stars*, ed. M. J. P. F. G. Monteiro, R. A. García, J. Christensen-Dalsgaard, & S. W. McIntosh (Cham: Springer International Publishing), 107–113
- Raouafi, N. E., Riley, P., Gibson, S., Fineschi, S., & Solanki, S. K. (2016), Diagnostics of coronal magnetic fields through the Hanle effect in UV and IR lines, *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, **3**, 20. doi: 10.3389/fspas.2016.00020
- Rempel, M. (2005), Solar differential rotation and meridional flow: the role of a subadiabatic tachocline for the Taylor-Proudman balance, *The Astrophysical Journal*, **622**, 1320–1332. doi: 10.1086/428282
- Rezzolla, L., & Zanotti, O. (2013), *Relativistic Hydrodynamics* (Oxford: Oxford University Press). doi: 10.1093/acprof:oso/9780198528906.001.0001
- Rincon, F., & Rieutord, M. (2018), The Sun's supergranulation, *Living Reviews in Solar Physics*, **15**, 6. doi: 10.1007/s41116-018-0013-5
- Roberts, P. H., & King, E. M. (2013), On the genesis of the Earth's magnetism, *Reports on Progress in Physics*, **76**, 096801. doi: 10.1088/0034-4885/76/9/096801
- Robertson, H. P. (1940), The invariant theory of isotropic turbulence, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **36**, 209–223. doi: 10.1017/S0305004100017199
- Rogers, F. J., & Iglesias, C. A. (1992), Radiative atomic Rosseland mean opacity tables, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, **79**, 507–568. doi: 10.1086/191659
- Rüdiger, G., & Hollerbach, R. (2004), *The Magnetic Universe: Geophysical and Astrophysical Dynamo Theory* (Weinheim: Wiley-VCH)
- Rutten, R. J. (2003), Radiative transfer in stellar atmospheres (Lecture notes at Utrecht University), <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2003rtsa.book.....R>
- Rybicki, G. B., & Lightman, A. P. (1985), *Radiative Processes in Astrophysics* (Weinheim: Wiley-VCH). doi: 10.1002/9783527618170
- Ryutova, M. (2015), *Physics of Magnetic Flux Tubes* (Berlin: Springer). doi: 10.1007/978-3-662-45243-1
- Sadeghpour, H. R., & Dalgarno, A. (1992), Rayleigh and Raman scattering by hydrogen and caesium, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, **25**, 4801–4809. doi: 10.1088/0953-4075/25/22/015
- Sakurai, J. J., & Napolitano, J. (2010), *Modern Quantum Mechanics*, 2nd edn. (Boston: Addison Wesley)
- Sakurai, T. (1989), Computational modeling of magnetic fields in solar active regions, *Space*

- Science Reviews*, **51**, 11–48. doi: [10.1007/BF00226267](https://doi.org/10.1007/BF00226267)
- Schlichenmaier, R., Jahn, K., & Schmidt, H. U. (1998), Magnetic flux tubes evolving in sunspots. A model for the penumbral fine structure and the Evershed flow, *Astronomy & Astrophysics*, **337**, 897–910, <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1998A&A...337..897S>
- Schumacher, J., & Sreenivasan, K. R. (2020), Colloquium: Unusual dynamics of convection in the Sun, *Reviews of Modern Physics*, **92**, 041001. doi: [10.1103/RevModPhys.92.041001](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.92.041001)
- Schwartz, M. D. (2013), *Quantum Field Theory and the Standard Model* (Cambridge University Press). doi: [10.1017/9781139540940](https://doi.org/10.1017/9781139540940)
- Seaton, M. J., Yan, Y., Mihalas, D., & Pradhan, A. K. (1994), Opacities for stellar envelopes, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **266**, 805–828. doi: [10.1093/mnras/266.4.805](https://doi.org/10.1093/mnras/266.4.805)
- Seehafer, N. (1978), Determination of constant α force-free solar magnetic fields from magnetograph data, *Solar Physics*, **58**, 215–223. doi: [10.1007/BF00157267](https://doi.org/10.1007/BF00157267)
- Shibata, K., & Takasao, S. (2016), Fractal reconnection in solar and stellar environments, in *Magnetic Reconnection: Concepts and Applications*, ed. W. Gonzalez & E. Parker (Cham: Springer), 373–407. doi: [10.1007/978-3-319-26432-5_10](https://doi.org/10.1007/978-3-319-26432-5_10)
- Shibata, M., Kiuchi, K., Sekiguchi, Y.-i., & Suwa, Y. (2011), Truncated moment formalism for radiation hydrodynamics in numerical relativity, *Progress of Theoretical Physics*, **125**, 1255–1287. doi: [10.1143/PTP.125.1255](https://doi.org/10.1143/PTP.125.1255)
- Shore, B. W., & Menzel, D. H. (1965), Generalized tables for the calculation of dipole transition probabilities, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, **12**, 187–214. doi: [10.1086/190124](https://doi.org/10.1086/190124)
- Spitzer, L. (1962), *Physics of Fully Ionized Gases* (Hoboken: John Wiley & Sons)
- Spitzer, L., & Härm, R. (1953), Transport phenomena in a completely ionized gas, *Physical Review*, **89**, 977–981. doi: [10.1103/PhysRev.89.977](https://doi.org/10.1103/PhysRev.89.977)
- Sreenivasan, K. R. (1995), On the universality of the Kolmogorov constant, *Physics of Fluids*, **7**, 2778–2784. doi: [10.1063/1.868656](https://doi.org/10.1063/1.868656)
- Stacey, F. D. (2007a), Core properties, physical, in *Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism*, ed. D. Gubbins & E. Herrero-Bervera (Dordrecht: Springer), 91–94. doi: [10.1007/978-1-4020-4423-6_38](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-4423-6_38)
- . (2007b), Core, electrical conductivity, in *Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism*, ed. D. Gubbins & E. Herrero-Bervera (Dordrecht: Springer), 116–117. doi: [10.1007/978-1-4020-4423-6_45](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-4423-6_45)
- . (2007c), Core, thermal conduction, in *Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomag-*

- netism*, ed. D. Gubbins & E. Herrero-Bervera (Dordrecht: Springer), 120–122. doi: [10.1007/978-1-4020-4423-6_47](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-4423-6_47)
- Stenflo, J. O. (2003), Spectro-polarimetry, in *Dynamic Sun*, ed. B. N. Dwivedi (Cambridge: Cambridge University Press), 128–147
- Stern, D. P. (1966), The motion of magnetic field lines, *Space Science Reviews*, **6**, 147–173. doi: [10.1007/BF00222592](https://doi.org/10.1007/BF00222592)
- Tarduno, J. A., Cottrell, R. D., Davis, W. J., Nimmo, F., & Bono, R. K. (2015), PALEOMAGNETISM. A Hadean to Paleoarchean geodynamo recorded by single zircon crystals, *Science*, **349**, 521–524. doi: [10.1126/science.aaa9114](https://doi.org/10.1126/science.aaa9114)
- Thébault, E., Finlay, C. C., Beggan, C. D., et al. (2015), International Geomagnetic Reference Field: the 12th generation, *Earth, Planets and Space*, **67**, 79. doi: [10.1186/s40623-015-0228-9](https://doi.org/10.1186/s40623-015-0228-9)
- Trujillo Bueno, J., Landi Degl’Innocenti, E., & Belluzzi, L. (2017), The physics and diagnostic potential of ultraviolet spectropolarimetry, *Space Science Reviews*, **210**, 183–226. doi: [10.1007/s11214-016-0306-8](https://doi.org/10.1007/s11214-016-0306-8)
- Vaidya, B., Mignone, A., Bodo, G., & Massaglia, S. (2015), Astrophysical fluid simulations of thermally ideal gases with non-constant adiabatic index: Numerical implementation, *Astronomy & Astrophysics*, **580**, A110. doi: [10.1051/0004-6361/201526247](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201526247)
- Vallis, G. K. (2017), *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation*, 2nd edn. (Cambridge: Cambridge University Press). doi: [10.1017/9781107588417](https://doi.org/10.1017/9781107588417)
- Vernazza, J. E., Avrett, E. H., & Loeser, R. (1981), Structure of the solar chromosphere. III - Models of the EUV brightness components of the quiet sun, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, **45**, 635–725. doi: [10.1086/190731](https://doi.org/10.1086/190731)
- Verscharen, D., Klein, K. G., & Maruca, B. A. (2019), The multi-scale nature of the solar wind, *Living Reviews in Solar Physics*, **16**, 5. doi: [10.1007/s41116-019-0021-0](https://doi.org/10.1007/s41116-019-0021-0)
- Versteeg, H. K., & Malalasekera, W. (2007), *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method* (London: Pearson Education Limited)
- Vočadlo, L. (2007), Core viscosity, in *Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism*, ed. D. Gubbins & E. Herrero-Bervera (Dordrecht: Springer), 104–106. doi: [10.1007/978-1-4020-4423-6_42](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-4423-6_42)
- Vögler, A., Shelyag, S., Schüssler, M., et al. (2005), Simulations of magneto-convection in the solar photosphere. Equations, methods, and results of the MURaM code, *Astronomy & Astrophysics*, **429**, 335–351. doi: [10.1051/0004-6361:20041507](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20041507)
- Vranjes, J., & Krstic, P. S. (2013), Collisions, magnetization, and transport coefficients in

- the lower solar atmosphere, *Astronomy & Astrophysics*, **554**, A22. doi: [10.1051/0004-6361/201220738](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201220738)
- Warhaft, Z. (2002), Turbulence in nature and in the laboratory, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **99**, 2481–2486. doi: [10.1073/pnas.012580299](https://doi.org/10.1073/pnas.012580299)
- Wicht, J., & Sanchez, S. (2019), Advances in geodynamo modelling, *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, **113**, 2–50. doi: [10.1080/03091929.2019.1597074](https://doi.org/10.1080/03091929.2019.1597074)
- Wiegmann, T., & Sakurai, T. (2021), Solar force-free magnetic fields, *Living Reviews in Solar Physics*, **18**, 1. doi: [10.1007/s41116-020-00027-4](https://doi.org/10.1007/s41116-020-00027-4)
- Wiese, W. L., & Fuhr, J. R. (2009), Accurate atomic transition probabilities for hydrogen, helium, and lithium, *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, **38**, 565–720. doi: [10.1063/1.3077727](https://doi.org/10.1063/1.3077727)
- Yoshizawa, A., Itoh, S. I., & Itoh, K. (2002), *Plasma and Fluid Turbulence: Theory and Modelling* (Bristol: IOP Publishing). doi: [10.1088/0741-3335/45/3/701](https://doi.org/10.1088/0741-3335/45/3/701)
- Zhakin, A. (2012), Electrohydrodynamics, *Physics-Uspokhi*, **55**, 465. doi: [10.3367/UFNe.0182.201205b.0495](https://doi.org/10.3367/UFNe.0182.201205b.0495)
- Zhang, Y., Hou, M., Liu, G., et al. (2020), Reconciliation of experiments and theory on transport properties of iron and the geodynamo, *Physical Review Letters*, **125**, 078501. doi: [10.1103/PhysRevLett.125.078501](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.078501)
- サクライ, J. J. (1967), サクライ上級量子力学〈第 1 巻〉輻射と粒子 (樺沢宇紀訳, Tokyo: 丸善プラネット, 2010 年)
- ランダウ, Л. Д., & リフシッツ, E. M. (1973), 力学 (増訂第 3 版), ランダウ=リフシッツ理論物理学教程 (広重徹 & 水戸巖訳, Tokyo: 東京図書株式会社, 1974 年)
- 横山雅之. (2000), 誰にでもわかるトーラスプラズマの輸送現象 新古典輸送-粒子軌道からの理解-, *プラズマ・核融合学会誌*, **76**, 1176–1188
- 岡本久, & 中村周. (2006), 関数解析 (Tokyo: 岩波書店)
- 梶島岳夫. (2014), 乱流の数値シミュレーション 改訂版 (Tokyo: 養賢堂)
- 岸本泰明. (2000), 誰にでもわかるトーラスプラズマの輸送現象 異常輸送, *プラズマ・核融合学会誌*, **76**, 1280–1308
- 久保亮五. (1998), 大学演習 熱学・統計力学 (Tokyo: 裳華房)
- 後藤仁志. (2018), 粒子法 —連続体・混相流・粒状体のための計算科学— (Tokyo: 森北出版)
- 佐古彰史. (2021), ゲージ理論・一般相対性理論のための微分幾何入門 (Tokyo: 森北出版)
- 沙川貴大. (2022), 非平衡統計力学 —ゆらぎの熱力学から情報熱力学まで—, 基本法則から読み解く 物理学最前線 No. 28 (Tokyo: 共立出版)
- 砂川重信. (1999), 理論電磁気学 (Tokyo: 紀伊國屋書店)
- 坂井秀隆. (2015), 常微分方程式, 大学数学の入門 No. 10 (Tokyo: 東京大学出版会)

- 市川浩樹, & 土屋卓久. (2018), 外核の化学組成, *地学雑誌*, **127**, 631–646. doi: 10.5026/jgeography.127.631
- 時弘哲治, 伊理正夫, 杉原厚吉, 速水謙, & 今井浩. (2006), *工学における特殊関数*, 工系数学講座 No. 13 (Tokyo: 共立出版)
- 柴田一成, 横山央明, & 工藤哲洋. (2023), *宇宙電磁流体力学の基礎*, 宇宙物理学の基礎 No. 2 (Tokyo: 日本評論社)
- 小寫康史, 小出眞路, & 高橋芳太. (2019), *ブラックホール宇宙物理の基礎*, 宇宙物理学の基礎 No. 6 (Tokyo: 日本評論社)
- 松尾一泰. (2020), *圧縮性流体力学 —内部流れの理論と解析—*, 2nd edn. (Tokyo: オーム社)
- 須藤靖. (2005), *一般相対論入門* (Tokyo: 日本評論社)
- . (2008), *解析力学・量子論* (Tokyo: 東京大学出版会)
- 瀬田剛. (2021), *格子ボルツマン法* (Tokyo: 森北出版)
- 清水明. (2021), *熱力学の基礎 第2版 I —熱力学の基本構造—* (Tokyo: 東京大学出版会)
- 西川亘. (2012), 3. 輻射輸送における原子過程, *プラズマ・核融合学会誌*, **88**, 639–648
- 大西直文. (2012), 1. 輻射流体シミュレーションの基礎, *プラズマ・核融合学会誌*, **88**, 467–474
- 池辺八洲彦, 池辺淑子, 浅井信吉, & 宮崎佳典. (2009), *現代線形代数—分解定理を中心として—* (Tokyo: 共立出版)
- 竹田洋一. (2013), 重力赤方偏移と精密視線速度測定, *天文月報*, **106**, 581–595
- 中原幹夫. (2003), *理論物理学のための幾何学とトポロジー I [原著第2版]* (中原幹夫 & 佐久間一浩訳, Tokyo: 日本評論社, 2018年)
- 中山司. (2008), *流れ解析のための有限要素法入門* (Tokyo: 東京大学出版会)
- 中村文隆, 鶴剛, 長田哲也, et al. (2022), *放射素過程の基礎*, 宇宙物理学の基礎 No. 4 (Tokyo: 日本評論社)
- 塚田捷. (2003), *物理数学 II —対称性と振動・波動・場の記述—*, 基礎物理学シリーズ 4 (Tokyo: 朝倉書店)
- 藤井孝藏. (1994), *流体力学の数値計算法* (Tokyo: 東京大学出版会)
- 梅村雅之, 福江純, & 野村英子. (2016), *輻射輸送と輻射流体力学*, 宇宙物理学の基礎 No. 3 (Tokyo: 日本評論社)
- 福山秀敏, & 小形正男. (2003), *物理数学 I*, 基礎物理学シリーズ 3 (Tokyo: 朝倉書店)
- 木下宙. (1998), *天体と軌道の力学* (Tokyo: 東京大学出版会)
- 木田重雄, & 柳瀬眞一郎. (1999), *乱流力学* (Tokyo: 朝倉書店)
- 齋藤正彦. (1966), *線型代数入門*, 基礎数学 1 (Tokyo: 東京大学出版会)

索引 (日本語-英語対応表)

あ行

アインシュタイン / Einstein
 — 係数 / — coefficients, A (B) value, 304
 — の縮約記法 / — summation convention, 16, 517
 — 方程式 / equation, 531
 圧縮率 / compressibility, 172, 180
 圧力電離 / pressure ionization, 171
 アルベーン / Alfvén
 — の定理, → 磁力線凍結定理
 — マッハ数 / — Mach number, 204
 アンペールの法則 / Ampère's law, 119, 125

 移流項 / advection term, 146

 渦度方程式 / vorticity equation, 154
 運動論 / kinetic theory, 428
 — 的方程式 / kinetic equation, 452

 H 定理 / H-theorem, 459
 永年変化 (地磁気の) / geomagnetic secular variation, 216
 永年方程式 / secular equation, 402
 エクマン数 / Ekman number, 204
 S 行列 / S-matrix, scattering matrix, 419
 エディントン / Eddington
 — 因子 / — factor, 282
 — 近似 / — approximation, 293
 — フラックス / — flux, 279
 エネルギー運動量テンソル / energy-momentum tensor, stress-energy tensor, 532
 完全流体の—, 533
 質点系の—, 556
 電磁場の—, 554
 放射場の—, 579
 理想磁気流体の—, 568
 エネルギーカスケード / energy cascade, 270
 エネルギースペクトル (乱流の) / energy spectral function, 265
 エルサッサー数 / Elsasser number, 204
 エルミート / Hermite
 — 行列 / Hermitian matrix, 53
 — 多項式 / — polynomial, 94
 円筒座標 / cylindrical coordinate, 55
 エントロピー / entropy, 160, 177

 オイラー / Euler
 — 角 / — angles, 399
 — 的観測者 / Eulerian observer, 564
 — 表現 / Eulerian specification, 20
 — 方程式 / — equation, 150, 539
 — ポテンシャル / — potentials, 227

応力 / stress, 146, 150
 オーム / Ohm
 — 一般化された—の法則 / generalized —'s law, 497
 — 散逸 / — dissipation, 157
 — の法則 / —'s law, 123, 469, 566
 オルト水素とパラ水素 / ortho- and para-hydrogen, 190
 オンサーガー対称性 / Onsager symmetry, 175, 484
 温度風平衡 / thermal wind balance, 229

か行

ガウス / Gauss
 — 関数 / Gaussian function, 33, 316
 — 係数 / — coefficient, 214
 — 積分 / Gaussian integral, 188, 430
 — の発散定理 / —' divergence theorem, 26
 — の法則 / —' law, 118
 カウリング / Cowling
 — 抵抗率 / — resistivity, 498
 化学ポテンシャル / chemical potential, 183, 196
 角運動量演算子 / angular momentum operator, 386, 392
 拡散 / diffusion
 — 近似 / — approximation, 333
 — 時間 / — time, 34
 — 方程式 / — equation, 32
 拡散率 (拡散係数) / diffusivity, 32
 磁気— / magnetic —, 126
 カノニカル分布 / canonical distribution, 186
 グランド— / grand —, 196
 慣性系 / inertial frame, 515, 524
 完全反対称テンソル / totally antisymmetric tensor, Levi-Civita tensor, 550
 完全流体 / perfect fluid, 165, 532, 535
 緩和時間 (衝突による) / relaxation time, 431, 440

 軌道要素 / orbital element, 542
 吸収 / absorption
 — 行列 / — matrix, 353
 — 係数 / — coefficient, 280, 306
 — 線 / — line, 307
 球ベッセル関数 / spherical Bessel function, 91
 球面調和関数 / spherical harmonics, 79, 387
 強結合プラズマ・弱結合プラズマ / strongly or weakly coupled plasma, 433
 共変微分 / covariant derivative, 520
 行列式 / determinant, 43
 極座標 / polar coordinates, 55
 局所 / local
 — 直交系 / — orthonormal frame, 524

—熱平衡 / — thermodynamic equilibrium,
LTE, 155, 290, 431, 466
キリングベクトル / Killing vector field, 561
キルヒホッフの法則 / Kirchhoff's law, 290, 307

クーロン / Coulomb
—ゲージ / — gauge, 142
—相互作用 / — interaction, 143
—対数 / — logarithm, 440, 455
クライン-仁科の公式 / Klein-Nishina formula, 318
クラマース-ハイゼンベルクの公式 (レイリー散乱の場合) / Kramers-Heisenberg formula, 322
グリーン関数 / Green's function, 36, 134
クリストッフェル記号 / Christoffel symbol, → 接続係数
グリュナイゼン定数 / Grüneisen parameter, 173, 180
クレプシュ-ゴルダン係数 / Clebsch-Gordan coefficients, 396
クロネッカーのデルタ / Kronecker delta, 16
群速度 / group velocity, 107

計量 / metric, 517
ゲージ変換 / gauge transformation, 128
源泉関数 / source function, 289, 297

光学的厚さ (光学的深さ) / optical depth, 289
交換関係 / commutation relation, 379
光球 / photosphere, 290
光子 / photon, 198, 276, 408
—破壊確率 / — destruction probability, 297
ゴント因子 / Gaunt factor, 305, 327, 329
黒体放射 / black body radiation, 198, 290, 307
誤差関数 / error function, 34, 474
固有値と固有ベクトル / eigen value and eigen vector, 45, 112, 375
固有値と固有ベクトル / eigen value and eigen vector, 73
コリオリの力 / Coriolis' force, 154
コルモゴロフのマイナス 3 分の 5 乗則 / Kolmogorov's minus five-thirds law, 271

さ行

サイクロトロン周波数 / cyclotron frequency, → ジャイロ周波数
最小作用の原理 / principle of least action, 360, 528
彩層 / chromosphere, 307
サハの式 / Saha equation, 166, 193
座標表示, 379
散逸関数 / dissipation function, 156
3-j 記号 / 3-j symbols, 396
3+1 形式 / 3+1 formalism, 564
散乱 / scattering
共鳴— / resonance —, 323
—係数 / — coefficient, 281, 296
コンプトン— / Compton —, 318
小角— / small-angle collisions, 438

—振幅 / — amplitude, 424
弾性— (光子の) / elastic —, 281
トムソン— / Thomson —, 138, 318
ミー— / Mie —, 141
ラザフォード— / Rutherford —, 436
ラマン— / Raman —, 322
レイリー— / Rayleigh —, 140, 319

磁化 (プラズマの) / magnetization of plasmas, 447
時間的・空間的 (相対論) / timelike, spacelike, 525

磁気 / magnetic
—圧 / — pressure, 208, 569
—拡散 / — diffusion, 205
—張力 / — tension, 208, 569
—プラントル数 / — Prandtl number, 205
—ヘリシティ / — helicity, 217
—ミラー / — mirror, 445
—モーメント / — moment, 444
—レイノルズ数 / — Reynolds number, 203

指数積分関数 / exponential-integral function, 294

磁束 / magnetic flux, 119

—管 / flux tube, 208

磁場 / magnetic field, 118

ジャイロ

—周波数 / gyrofrequency, 441

—粘性 / gyroviscosity, 488

—半径 / gyroradius, 442

弱電流の仮定, 467

周縁減光 / limb darkening, 290

重力 / gravity

—エネルギー / gravitational energy, 160

—ポテンシャル / gravitational potential, 35, 151, 530

ジュール熱 / Joule heat, → オーム散逸

縮退プラズマ / degenerate plasma, 447, 503

シュテファン-ボルツマンの法則 / Stefan-Boltzmann law, 200

シュバルツシルト計量 / Schwarzschild metric, 540

シュバルツシルトの判定条件 / Schwarzschild

criterion, 231

シュバルツシルト-ミルン方程式 /

Schwarzschild-Milne equations, 294

シュレディンガー方程式 / Schrödinger equation, 378

純粋状態と混合状態 / pure states and mixed states, 337

準中性の仮定 / the assumption of quasi charge-neutrality, 467

衝突 / collision

—径数 / impact parameter, 436

—時間 / — time, 440

衝突項 / collision term, 451

フォッカー-プランクの—, 457

ボルツマンの—, 512

磁力線 / magnetic field line, 119

—凍結定理 / Alfvén's frozen-in theorem, 207

振動子強度 / oscillator strength, f value, 305

水星の近日点移動 / advance of the perihelion of Mercury, 542

水素原子 / hydrogen atom, 193, **390**
 スケールハイト / pressure scale-height, 223
 スツルム-リウヴィルの固有値問題 / Sturm-Liouville theory, 73
 ストークス / Stokes
 —の定理 / —' theorem, 27
 —パラメータ / — parameters, 342
 スピッツァーの輸送係数 / Spitzer's value of transport coefficients, 489
 スピン / spin, 388, 391
 光子の—, 410
 静止質量 / rest mass, 532
 正準方程式 / canonical equation of motion, 361
 静水圧平衡 / hydrostatic equilibrium, 223
 生成消滅演算子 / creation and annihilation operators, 301, **384**, 407
 制動放射 / bremsstrahlung, 137, 328
 ゼーマン効果 / Zeeman effect, 343, 401
 世界線 / worldline, 517
 接続係数 / connection coefficient, 520
 摂動論 / perturbation theory, 417
 遷移 / transition
 —行列 / — matrix, T-matrix, 420
 自由-自由— / free-free —, → 制動放射
 束縛-自由— / bound-free —, → 光電離
 束縛-束縛— / bound-bound —, 301
 —率 / — rate, 413, 420
 線強度 / line strength, 304
 選択律 / selection rule, 304, 344
 線輪郭関数 / line profile function, 306, 314
 相空間 / phase space, 187, 429
 相互作用描像 / interaction picture, 417
 添え字表記, 15
 測地線方程式 / geodesic equation, 528
 速度相関テンソル / velocity correlation tensor, 261

た行

体積弾性率 / bulk modulus, 180
 縦成分と横成分 / longitudinal and transverse part, 32
 単位系, 118
 断熱 / adiabatic
 —温度勾配 / — temperature gradient, 182, 231
 —指数 / — index, 165, 182, → チャンドラセカールの断熱指数
 —不変量 / — invariant, 372, 443
 断面積 / cross section, 280, 436, → 微分断面積
 運動量輸送— / momentum transfer —, 492
 粘性— / viscosity —, 493
 遅延ポテンシャル / retarded potential, 135
 地衡流 / geostrophic flow, 228
 チャンドラセカール / Chandrasekhar
 —関数 / — function, 474
 —の断熱指数 / —'s adiabatic exponents, 182

調和振動子 / harmonic oscillator, 192, 361, **383**
 直交関数系 / orthogonal system, 74
 テイラー-プラウドマンの定理 / Taylor-Proudman theorem, 228
 ディラック方程式 / Dirac equation, 393
 テトラッド / tetrad, 565
 デバイ / Debye
 —数 / — number, 433, 439
 —長, —遮蔽 / — length, — shielding, 432
 デルタ関数 / delta function, 100
 —の性質, 380
 電荷緩和時間 / charge relaxation time, 125
 電気双極近似 / electric dipole approximation, 302
 電気伝導率 / electrical conductivity, 123, 484
 電磁場 / electromagnetic field
 —テンソル / electromagnetic tensor, 551
 —のエネルギー密度 / energy density of —, 157, 554
 電磁波 / electromagnetic wave
 古典的— / classical —, 131
 量子力学的— / quantum —, → 光子
 電磁ポテンシャル / electromagnetic potentials, 127
 テンソル積 (直積) / tensor product, **60**, 377
 伝搬行列 / propagation matrix, 352
 統計平衡方程式 / statistical equilibrium equations, 334, 350, 490
 等重率の原理 / principle of equal a priori weights, 184
 動粘性率 / kinematic viscosity, 150
 ドップラー効果 (光の) / Doppler shift, **285**, 314
 ドリフト運動 / drift, 443
 トロイダル-ポロイダル分解 / toroidal-poloidal decomposition, 225

な行

内部エネルギー / internal energy, 155, 177, 186, 532
 ナビエ-ストークス方程式 / Navier-Stokes equations, 150
 二色性行列 / dichroism matrix, 353
 ニュートン流体 / Newtonian fluid, 148
 ヌッセルト数 / Nusselt number, 205
 熱 / heat
 —拡散率 / thermal diffusivity, 204
 —速度 / thermal speed, 430
 —伝導率 / thermal conductivity, 157, 446
 —膨張率 / volume expansion coefficient, 172, 180
 —輸送の式 (エントロピーについての方程式), 160, 540
 —流束 / — flux, 157, 465, 484
 熱化距離 / thermalization length, 298
 粘性率 / viscosity, 150, 487

は行

パーセバルの定理 / Parseval's theorem, 99
 灰色近似 / gray (grey) approximation, 293
 ハイゼンベルクの運動方程式 / Heisenberg equation of motion, 379
 パウリの排他律 / Pauli exclusion principle, 406, 504
 パッシェン-バック効果 / Paschen-Back effect, 401
 波動関数 / wave function, 376
 ハミルトニアン / Hamiltonian, 361, 378, 381
 反磁性熱流束 / diamagnetic heat flux, 486
 反変ベクトルと共変ベクトル / contravariant and covariant vector, 518
 ハンレ効果 / Hanle effect, 358

 ビアンキの恒等式 / Bianchi identity, 523, 531
 光電離 / photoionization, 324, 491
 微細構造 / fine structure, 393
 歪速度テンソル / strain tensor, 149, 482
 非弾性近似 / anelastic approximation, 244
 比熱 / specific heat, 164, 180
 微分断面積 / differential cross section, 139, 321, 421
 ヒルベルト空間 / Hilbert space, 70, 374

 ファラデーの電磁誘導の法則 / Faraday's induction law, 119
 フーリエ / Fourier
 — 級数 / — series, 72, 76
 — の法則 / —'s law, 157
 — 変換 / — transform, 99
 フェルミ / Fermi
 — エネルギー / — energy, 505
 — の黄金律 / —'s golden rule, 302, 413
 粒子 / Fermion, → ボース粒子とフェルミ粒子
 フォークト関数 / Voigt function, 317
 フォースフリー磁場 / force-free field, 224
 フォッカー-プランク方程式 / Fokker-Planck equation, 452, → 衝突項
 フォック状態 / Fock state, 408
 ブシネスク近似 / Boussinesq approximation, 242
 一般化された — / generalized —, 247
 不透明度 / opacity, 280
 ロスランド平均 — / Rosseland mean —, 333
 部分電離プラズマ / partially ionized plasma, 166, 489
 ブラギンスキー方程式 / Braginsky equations, 479
 プラズマ / plasma
 — 周波数 / — frequency, 434
 — パラメータ / — parameter, → クーロン対数
 — ベータ / — beta, 203
 ブラソフ方程式 / Vlasov equation, → 運動論的方程式
 フラックス / flux, 37
 放射の —, → 放射フラックス, エディントンフラックス
 流体の —, 159
 プランク関数 / Planck function, → 黒体放射
 プラントル数 / Prandtl number, 205
 分散 / dispersion
 — 関係 / — relation, 107

 — 行列 / — matrix, 353
 分子 / molecular
 — 回転 / — rotation, 190, 388
 — 振動 / — vibration, 192
 分子的混沌の仮定 / assumption of molecular chaos, 512
 分配関数 / partition function, 186, 194
 大 — / grand —, 196
 分布関数 / distribution function
 光子の —, 276, 285, 577
 プラズマの —, 429

 平均自由行程 / mean free path, 35
 光子の —, 280, 289, 298
 電子-イオン衝突の —, 440
 平行平面大気 / plane-parallel atmosphere, 291
 平坦な時空 / flat spacetime, 524
 ベクトル / vector
 — 解析の公式, 31
 — 表記, 15
 — ポテンシャル / — potential, → 放射ゲージ
 ベクレ数 / Péclet number, 204
 ベッセル関数 / Bessel function, 85
 ベルヌーイの定理 / Bernoulli's theorem, 162
 ヘルムホルツ / Helmholtz
 — の自由エネルギー / — free energy, 179, 187
 — の定理 / —'s theorem, 31
 偏極 (原子の) / atomic polarization, 346
 偏光 / polarization, 132, 336
 完全 — / complete —, 337
 — 度 / degree of —, 343
 — 分光観測 / spectropolarimetry, 336

 ポアソン / Poisson
 — 方程式 / —'s equation, 35, 535
 ポインティングベクトル / Poynting vector, 133, 148, 157, 554
 放射 / radiation
 — 圧 / — pressure, 198, 278, 288, 333, 579
 — エネルギー密度 / — energy density, 277, 579
 — 強度 / specific intensity, 276
 — ゲージ / — gauge, 130, 363, 407
 — 損失関数 / radiative loss function, 333
 — フラックス / — flux, 278, 579
 — モーメント / angle moment of intensity, 277, 579
 — モーメント方程式 / moment equation, 282, 580
 — 輸送方程式 / radiative transfer equation, 281, 577
 — 輸送方程式 (定常の) / radiative transfer equation, 297
 放射場 / radiation field, 143
 巨視的な —, → 放射強度
 量子力学的 —, 407, → 光子
 放射率 / emissivity, 280, 306
 ボーア磁子 / Bohr magneton, 403
 ボース粒子とフェルミ粒子 / Boson and Fermion, 191, 197, 388, 406

ホール効果 / Hall effect, 498
 保存則 / conservation law, 37
 運動エネルギー— / kinetic energy —, 156, 539
 運動量— / momentum —, 146, 538, 570
 エネルギー運動量— (相対論), 531, 555
 確率密度の— / probability density —, 416
 質量— / mass —, 145, 536, 569
 全エネルギー— / total energy —, 158, 161, 287, 570
 電荷— / charge —, 124, 553
 磁場のエネルギー— / magnetic energy —, 157
 内部エネルギー— / internal energy —, 157, 539
 放射エネルギー— / radiative energy —, → 放射
 モーメント方程式
 ホップ関数 / Hopf function, 296
 ポテンシャル磁場 / potential magnetic field,
 current-free magnetic field, 211
 ポリトロープ指数 / polytrope index, 172
 ボルツマン / Boltzmann
 —因子 / — factor, 186
 —の原理 / —'s principle, 184
 —方程式 / — equation, → 運動論的方程式
 ポロイダル場 / poloidal field, → トロイダル-ポロイダル
 分解

ま行

マクスウェル / Maxwell
 —の応力 / — stress, 148, 554
 —の関係式 / — relations, 179
 —方程式 / —'s equations, 118, 552
 マクスウェル-ボルツマン分布 / Maxwell-Boltzmann
 distribution, 429, 459
 摩擦力 / friction force, 464, 484
 マッハ数 / Mach number, 203
 密度行列 / density matrix, 338
 ミンコフスキー計量 / Minkowski metric, 524
 無次元化 (方程式の) / equations in dimensionless
 form, 202
 モーメント / moment
 放射輸送方程式の—, → 放射モーメント
 運動論的方程式の—, 462

や行

誘導方程式 / induction equation, 126
 輸送理論 / transport theory, 479
 余因子行列 / adjugate matrix, 44

ら行

ラーモア / Larmor
 —の公式 / — formula, 138

—半径 / — radius, → ジャイロ半径
 ラグランジアン / Lagrangian, 359
 ラグランジュ / Lagrange
 —の運動方程式 / Euler-Lagrange equation, 360
 —微分 / Lagrangian derivative, 21, 536
 —表現 / Lagrangian specification, 19
 ラゲール陪多項式 / associated Laguerre
 polynomials, 93
 ラプラス方程式 / Laplace's equation, 84
 ランダムウォーク / random walk, 34, 446
 ランデの g 因子 / Landé g-factor, 404
 リー微分 / Lie derivative, 561
 リーマンテンソル / Riemann curvature tensor, 522
 リエナール-ヴィーヘルトポテンシャル /
 Liénard-Wiechert potentials, 136
 理想 MHD / ideal MHD, 206
 理想気体 / ideal gas, 163
 単原子分子—, 187
 二原子分子—, 189
 リップマン-シュウィンガー方程式 /
 Lippmann-Schwinger equation, 422
 流体粒子 / fluid particle (fluid element), 19
 両極性拡散 / ambipolar diffusion, 498
 量子化 / quantization
 正準— / canonical —, 379
 第二— / second —, 407
 量子ビート / quantum beats, 348
 ルジャンドル / Legendre
 —多項式 / — polynomial, 77
 —陪関数 / associated — function, 77
 レイノルズ / Reynolds
 —応力 / — stress, 266
 —数 / — number, 203
 —の輸送定理 / —' transport theorem, 37
 レイリー数 / Rayleigh number, 204
 レヴィ-チヴィタの記号 / Levi-Civita symbol, 16, 550
 連続体 / continuum, 17
 ローゼンブルースポテンシャル / Rosenbluth
 potentials, 457
 ローレンツ / Lorentz
 —因子 / — factor, 555, 565
 —系 / — frame, 524, 555
 —散乱演算子 / — scattering operator, 472
 —変換 / — transformation, 122, 558
 —力 / — force, 121, 147, 554
 —輪郭 / — profile, 316
 ローレンツゲージ / Lorenz gauge, 129
 ロスビー数 / Rossby number, 204